Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Шидловский, Об арифметических свойствах значений E -функций, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 3, 452–458

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1187>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 14:04:10

УДК 511.36

ОБ АРИФМЕТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ЗНАЧЕНИЙ E -ФУНКЦИЙ

А. Б. Шидловский

Доказываются теоремы об алгебраической независимости значений в алгебраических точках подсовокупностей E -функций в случае, когда основная рассматриваемая совокупность функций алгебраически зависима над полем рациональных функций.

Библиография: 5 названий.

Доказываются теоремы об алгебраической независимости значений в алгебраических точках подсовокупностей E -функций в случае, когда основная рассматриваемая совокупность функций алгебраически зависима над $\mathbb{C}(z)$. С историей вопроса можно ознакомиться по книге [1].

Пусть всюду в дальнейшем

$$f_1(z), \dots, f_m(z) \quad (1)$$

будет множество E -функций, составляющих решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений

$$y'_k = \sum_{i=1}^m Q_{k,i} y_i, \quad k = 1, \dots, m, \quad m \geq 2, \quad Q_{k,i} \in \mathbb{C}(z), \quad (2)$$

или системы

$$y'_k = Q_{k,0} + \sum_{i=1}^m Q_{k,i} y_i, \quad k = 1, \dots, m, \quad m \geq 2. \quad (3)$$

Обозначим $T(z) \in \mathbb{C}[z]$ – общий наименьший знаменатель всех функций $Q_{k,i}$ в системе (2) или (3). Далее, пусть $\xi \in \mathbb{A}$, $\xi T(\xi) \neq 0$, где $\mathbb{A}$ – поле всех алгебраических чисел над $\mathbb{Q}$.

Доказано, что числа

$$f_1(\xi), \dots, f_m(\xi) \quad (4)$$

однородно алгебраически независимы (алгебраически независимы) тогда и только тогда, когда функции (1) однородно алгебраически независимы (алгебраически независимы) над $\mathbb{C}(z)$, а также, что степени однородной трансцендентности (степени трансцендентности) этих чисел над $\mathbb{C}(z)$ и функций (1) над $\mathbb{A}$ равны.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-00181.

Пусть теперь степень однородной трансцендентности (трансцендентности) функций (1) над $\mathbb{C}(z)$ равна l , $1 \leq l < m$, а функции

$$f_1(z), \dots, f_l(z) \quad (5)$$

однородно алгебраически независимы (алгебраически независимы) над $\mathbb{C}(z)$.

Доказано, что тогда числа

$$f_1(\xi), \dots, f_l(\xi) \quad (6)$$

однородно алгебраически независимы (алгебраически независимы) для всех $\xi \in \mathbb{A}$, за исключением конечного числа из них. Установлено несколько теорем об алгебраической независимости чисел (6) для некоторых подклассов E -функций и точно оговоренных точек ξ (см. [1]).

В дальнейшем в многочленах из $\mathbb{C}[z, z_1, \dots, z_m]$ и $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_m]$ будем считать члены упорядоченными в порядке лексикографического расположения по степеням $z_m, \dots, z_1$ с коэффициентами из $\mathbb{C}[z]$ и $\mathbb{C}$.

Рассмотрим совокупность однородных (произвольных) минимальных уравнений функций (1) над $\mathbb{C}[z]$ (см. [2] или [1, гл. 4, § 10]), и пусть Λ – множество нулей всех их старших коэффициентов.

Пусть $\mathbb{K}$ – любое фиксированное алгебраическое поле над $\mathbb{Q}$, содержащее все коэффициенты степенных рядов по степеням z всех функций (1) и число $\xi \in \mathbb{A}$, $\xi T(\xi) \neq 0$, а $h = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$. Далее, $\mathbb{K}_1, \dots, \mathbb{K}_h$ – алгебраические поля, сопряженные с $\mathbb{K}$, $\xi_i \in \mathbb{K}_i$, $i = 1, \dots, h$, – числа, сопряженные с ξ ; $f_{1,i}(z), \dots, f_{m,i}(z)$ – функции, получающиеся из функций (1) заменой всех коэффициентов их степенных рядов на сопряженные числа из поля $\mathbb{K}_i$; а многочлены P_i, Q_i, R_i , $i = 1, \dots, h$, получаются аналогично из рассматриваемых ниже многочленов $P, Q, R \in \mathbb{K}[z, z_1, \dots, z_m]$.

В 1973 г. В. Г. Чирский доказал в неоднородном случае следующую теорему (см. [3]).

ТЕОРЕМА 1. *Если коэффициенты степенных рядов функций (1) и число ξ , $\xi T(\xi) \neq 0$, $\xi \notin \Lambda$, принадлежат некоторому мнимому квадратичному алгебраическому полю над $\mathbb{Q}$, то числа (6) однородно алгебраически независимы (алгебраически независимы).*

При аналогичных условиях, но при любом поле $\mathbb{K}$ в 1989 г. было установлено следующее утверждение (см. [2]).

ТЕОРЕМА 2. *Существует индекс i , $1 \leq i \leq h$, такой, что числа*

$$f_{1,i}(\xi_i), \dots, f_{m,i}(\xi_i) \quad (7)$$

однородно алгебраически независимы (алгебраически независимы).

Ниже доказывается более общее утверждение, чем теоремы 1 и 2.

Пусть $\xi \in \mathbb{C}$, а $\varphi_\xi: \mathbb{C}[z, z_1, \dots, z_m] \rightarrow \mathbb{C}[z_1, \dots, z_m]$ – гомоморфизм, который представляет собой замену переменной z на ξ во всех многочленах кольца $\mathbb{C}[z, z_1, \dots, z_m]$. Если $\mathfrak{U}$ – любой идеал этого кольца, то будем обозначать $\mathfrak{U}_\xi = \varphi_\xi \mathfrak{U}$ – идеал, соответствующий $\mathfrak{U}$ в кольце $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_m]$ при гомоморфизме φ_ξ .

Пусть $\mathfrak{P}^0(\mathfrak{P})$ – простой идеал кольца $\mathbb{C}[z, z_1, \dots, z_m]$, порожденный всеми однородными по $z_1, \dots, z_m$ многочленами (всеми многочленами), обращающимися в нуль при

подстановке в них функций (1) вместо $z_1, \dots, z_m$. Если функции (1) однородно алгебраически независимы, то полагаем $\mathfrak{P}^0 = (0)$ ($\mathfrak{P} = (0)$).

Заметим, что идеал $\mathfrak{P}_\xi^0$ прост для всех $\xi \in \mathbb{A}$, за исключением конечного числа из них (см. [4]).

Если $\xi \in \mathbb{A}$, $\xi T(\xi) \neq 0$, а однородный идеал $\mathfrak{P}_\xi^0$ (идеал $\mathfrak{P}_\xi$), соответствующий функциям (1), является простым, то совокупность функций (1) будем называть *однородно простой (простой) в точке ξ* .

ТЕОРЕМА 3. Пусть совокупность E -функций (1) составляет решение системы (2) (системы (3)), имеет степень однородной трансцендентности (степень трансцендентности) над $\mathbb{C}(z)$ равную l , $1 \leq l < t$, и является однородно простой (простой) в точке $\xi \in \mathbb{A}$, $\xi T(\xi) \neq 0$, $\xi \notin \Lambda$, а функции (5) однородно алгебраически независимы (алгебраически независимы) над $\mathbb{C}(z)$.

Тогда при любом $i = 1, \dots, h$ числа (7) однородно алгебраически независимы (алгебраически независимы).

Заметим, что неоднородные случаи теорем 1, 2 и 3 являются следствиями их однородных случаев. Надо только заменить число t на $t+1$ и положить $f_{t+1}(z) \equiv 1$. Поэтому в дальнейших рассуждениях будем рассматривать только однородные случаи.

Для доказательства теоремы 3 рассмотрим две теоремы, представляющие и самостоятельный интерес.

ТЕОРЕМА 4 (см. [4]). Если совокупность E -функций (1) составляет решение системы (3) и является однородно простой в точке $\xi \in \mathbb{A}$, $\xi T(\xi) \neq 0$, то для любого однородного многочлена

$$P = P(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{A}[z_1, \dots, z_m], \quad P \notin \mathfrak{P}_\xi^0,$$

выполняется условие

$$P(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)) \neq 0. \quad (8)$$

Заметим, что утверждение, аналогичное теореме 4, в случае, когда степени трансцендентности функций (1) относительно $\mathbb{C}(z)$ и $\mathbb{C}$ равны, содержится в [1, гл. 4, теорема 7].

ТЕОРЕМА 5. Если при условиях теоремы 4 для однородного многочлена

$$P = P(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{A}[z_1, \dots, z_m], \quad P \neq 0, \quad (9)$$

выполняется равенство

$$P(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)) = 0, \quad (10)$$

а поле $\mathbb{K}$ содержит все коэффициенты многочлена P , то

$$P_i(f_{1,i}(\xi), \dots, f_{m,i}(\xi_i)) = 0, \quad i = 1, \dots, h. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 4 из равенства (10) следует, что $P \in \mathfrak{P}_\xi^0$. Поэтому

$$P = (z - \xi)Q + R, \quad R \in \mathfrak{P}^0, \quad (12)$$

где по лемме 2 из [1, гл.3] однородные многочлены $Q, R \in \mathbb{K}[z, z_1, \dots, z_m]$ и $R(\xi, z_1, \dots, z_m) \neq 0$.

Из равенства (12) имеем

$$P_i = (z - \xi_i)Q_i + R_i, \quad i = 1, \dots, h. \quad (13)$$

Так как $R \in \mathfrak{P}^0$, то $R(z, f_1(z), \dots, f_m(z)) = 0$. Следовательно,

$$R_i(z, f_{1,i}(z), \dots, f_{m,i}(z)) = 0, \quad i = 1, \dots, h,$$

и

$$R_i(\xi_i, f_{1,i}(\xi_i), \dots, f_{m,i}(\xi_i)) = 0, \quad i = 1, \dots, h.$$

Но тогда при $z = \xi_i$ из равенств (13) следует, что выполняются равенства (11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Допустим противное, что при некотором значении i числа (7) однородно алгебраически зависимы. Можно считать, что $i = 1$. Тогда $P(f_1(\xi), \dots, f_l(\xi)) = 0$, где $P = P(z_1, \dots, z_l) \in \mathbb{A}[z_1, \dots, z_m]$, $P \neq 0$. Поэтому, пользуясь теоремой 5, получим, что выполняются все равенства (11) и поэтому числа (7) однородно алгебраически независимы при любом $i = 1, \dots, h$. Но это противоречит утверждению теоремы 2. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 3.

Рассмотрим несколько следствий из теоремы 4, справедливых при ее условиях, некоторые из которых приведены в работе [4]. Они формулируются только в однородных случаях. Но их легко переформулировать и в неоднородных случаях.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если функции (1) линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$, то числа (4) линейно независимы над $\mathbb{A}$ (см. [4]).

СЛЕДСТВИЕ 2. Если функции (1) не связаны однородным алгебраическим уравнением над $\mathbb{C}(z)$ степени k , $k \geq 1$, то числа (4) не связаны однородным алгебраическим уравнением над $\mathbb{A}$ степени k (см. [4]).

Обозначим $\mathfrak{R}^0(\xi)$ ($\mathfrak{R}(\xi)$) – простой идеал кольца $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_m]$, порожденный всеми однородными (произвольными) многочленами, обращающимися в нуль при подстановке в них чисел (4) вместо переменных $z_1, \dots, z_m$. Если числа (4) однородно алгебраически независимы, то полагаем $\mathfrak{R}^0(\xi) = 0$ ($\mathfrak{R}(\xi) = (0)$).

СЛЕДСТВИЕ 3. Идеал $\mathfrak{P}_\xi^0$ является простым тогда и только тогда, когда $\mathfrak{P}_\xi^0 = \mathfrak{R}^0(\xi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathfrak{P}_\xi^0 = \mathfrak{R}^0(\xi)$, то идеал $\mathfrak{P}_\xi^0$ прост, так как $\mathfrak{R}^0(\xi)$ прост. Если же $\mathfrak{P}_\xi^0 \neq \mathfrak{R}^0(\xi)$, то существует однородный многочлен P из (9) такой, что $P \in \mathfrak{R}^0(\xi)$, но $P \notin \mathfrak{P}_\xi^0$ и, следовательно, такой, что выполняется равенство (10). Если предположить, что $\mathfrak{P}_\xi^0$ прост, то равенство (10) по теореме 4 будет противоречить условию (8). Поэтому $\mathfrak{P}_\xi^0$ не является простым идеалом.

Обозначим $\mathbb{L}_N^0$ – векторное пространство над $\mathbb{C}(z)$, порожденное произведениями степеней функций (1)

$$f_m^{k_m}(z) \dots f_1^{k_1}(z), \quad 0 \leq k_1 + \dots + k_m = N, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Аналогично обозначим векторное пространство $\mathbb{L}_N$ с условием $0 \leq k_1 + \dots + k_m \leq N$. Пусть $r_N^0 = \dim \mathbb{L}_N^0$ и $r_N = \dim \mathbb{L}_N$. Обозначим также $\mathcal{L}_N^0$ и $\mathcal{L}_N$ – векторные пространства над $\mathbb{A}$, получающиеся из $\mathbb{L}_N^0$ и $\mathbb{L}_N$ заменой переменной z на число ξ . Пусть $\rho_N^0 = \dim \mathcal{L}_N^0$ и $\rho_N = \dim \mathcal{L}_N$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Идеал $\mathfrak{P}_\xi^0$ прост тогда и только тогда, когда при любом $N \in \mathbb{N}$ выполняется равенство $r_N^0 = \rho_N^0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если идеал $\mathfrak{P}_\xi^0$ прост, то по следствию 3 выполняется равенство $\mathfrak{P}_\xi^0 = \mathfrak{R}^0(\xi)$ и поэтому $r_N^0 = \rho_N^0$ при любом N . Если же $\mathfrak{P}_\xi^0$ не прост, то снова по следствию 3 $\mathfrak{P}_\xi^0 \neq \mathfrak{R}^0(\xi)$ и, следовательно, условие $r_N^0 = \rho_N^0$ при всех значениях N выполняться не может.

Приведем некоторые приложения установленных выше утверждений.

Пусть коэффициенты степенных рядов E -функций (1) и число ξ принадлежат минимальному квадратичному алгебраическому полю над $\mathbb{Q}$ и $\xi T(\xi) \neq 0$. Тогда по лемме 18 гл. 3 и лемме 3 гл. 4 книги [1] при любом $N \in \mathbb{N}$ выполняется равенство $r_N^0 = \rho_N^0$. Поэтому по следствию 4 в рассматриваемом случае идеал $\mathfrak{P}_\xi^0$ прост и совокупность функций (1) является однородно простой в точке ξ . Следовательно, все установленные выше утверждения будут справедливы и в этом случае.

Если совокупность E -функций (1) имеет равные степени однородной трансцендентности (степени трансцендентности) относительно $\mathbb{C}(z)$ и $\mathbb{C}$, то она является однородно простой (простой) в любой точке ξ , $\xi T(\xi) \neq 0$.

Действительно, если допустить противное, то по следствию 3 существует однородный многочлен $P \in \mathfrak{P}_\xi^0$ из (9) такой, что выполняется равенство (10), которое противоречит утверждению теоремы 7 из гл. 4 книги [1].

Поэтому в рассматриваемом случае справедливы все установленные выше результаты.

Теперь предположим, что $l = m - 1$, а функции

$$f_1(z), \dots, f_m(z) \tag{14}$$

однородно алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$ и связаны с $f_m(z)$ однородным алгебраическим уравнением

$$P(z, f_1(z), \dots, f_m(z)) = 0, \tag{15}$$

где по лемме 5 гл. 4 книги [1] неприводимый многочлен

$$P = P(z, z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{K}[z_1, \dots, z_m]. \tag{16}$$

По следствию 4 совокупность функций (1) будет однородно простой в точке ξ тогда и только тогда, когда многочлен

$$P(\xi, z_1, \dots, z_m) \quad (17)$$

неприводим. В этом случае для функций (1) справедливо утверждение теоремы 3 при $l = m - 1$.

Рассмотрим более общую теорему, в которой для простой в точках ξ совокупности E -функций (1) при $l = m - 1$ задача об алгебраической независимости чисел (6) решается до конца.

Пусть E -функции (1) связаны уравнением (15). Обозначим $D(z)$ – общий наибольший делитель всех коэффициентов из $\mathbb{C}(z)$ при произведениях степеней $z_1, \dots, z_m$, содержащих z_m , в неприводимом многочлене P , а Ω – множество нулей $D(z)$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть совокупность E -функций (1) составляет решение системы 2 (системы (3)), функции (14) однородно алгебраически независимы (алгебраически независимы) над $\mathbb{C}(z)$ и связаны с функцией $f_m(z)$ уравнением (15), где P – однородный по $z_1, \dots, z_m$ (произвольный) неприводимый многочлен (16) степени s по $z_1, \dots, z_m$, а множество Ω определено многочленом P . Далее, $\xi \in \mathbb{A}$, $\xi T(\xi) \neq 0$ и многочлен (17) неприводим.

Тогда числа

$$f_1(\xi), \dots, f_{m-1}(\xi) \quad (18)$$

однородно алгебраически независимы (алгебраически независимы) в том и только том случае, когда $\xi \notin \Omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как многочлен (17) неприводим, то множество функций (1) является однородно простым в точке ξ . Если $\Omega \neq \emptyset$, то числа (18) однородно алгебраически зависимы в точках $\xi \in \Omega$.

Пусть теперь $\xi \notin \Omega$. Возможны два случая.

1) Точка ξ не является нулем старшего коэффициента из $\mathbb{K}[z]$ при произведениях степеней $z_1, \dots, z_m$ в многочлене P (16). Так как множество функций (1) является простым в точке ξ , то по теореме 3 числа (18) однородно алгебраически независимы.

2) Точка ξ является нулем старшего коэффициента в P . Допустим противное, что числа (18) однородно алгебраически зависимы. Тогда по лемме 11 гл. 4 книги [1] в левой части уравнения (15), рассматриваемого как многочлен от $f_m(z)$ с коэффициентами из $\mathbb{K}[z, f_1(z), \dots, f_{m-1}(z)]$, все коэффициенты при различных степенях $f_m(z)$ обращаются в нуль при $z = \xi$. Так как $\xi \notin \Omega$, то $s \geq 2$ и среди таких коэффициентов найдется многочлен $Q(z, f_1(z), \dots, f_{m-1}(z))$ степени k по переменным (14), где $1 \leq k < s$, не делящийся на $z - \xi$ и такой, что

$$Q(\xi, f_1(\xi), \dots, f_{m-1}(\xi)) = 0. \quad (19)$$

Так как $k < s$, то функции (1) не связаны однородным алгебраическим уравнением над $\mathbb{C}(z)$ степени k . Поэтому по следствию 2 числа (18) не связаны однородным алгебраическим уравнением степени k над $\mathbb{A}$. Но это противоречит равенству (19). Полученное противоречие доказывает справедливость теоремы 6.

Представляет интерес получить аналогичный результат с использованием минимальных уравнений при любом возможном значении l . В связи с теоремой 6 можно ознакомиться со статьей [5].

Из установленных в статье утверждений следуют несколько теорем из гл. 4 книги [1]. Из теоремы 3 – теорема 8, из следствий 1 и 2 – теорема 9, из теоремы 6 – теорема 11. Следствие 1 может быть сформулировано более обще и так, что из него следовало бы первое утверждение теоремы 9.

СЛЕДСТВИЕ 5. Если функции (1) линейно независимы (линейно независимы вместе с функцией $f(z) = 1$) над $\mathbb{C}(z)$, то числа (4) линейно независимы (линейно независимы вместе с (1) над $\mathbb{A}$), каждое из чисел (4) не равно нулю (трансцендентно), все нули (алгебраические $\mathbb{A}$ -точки) функций (2), отличные от нуля и нулей $T(z)$, трансцендентны.

Последний результат легко переформулировать на случай E -функций, удовлетворяющей линейному дифференциальному уравнению с коэффициентами из $\mathbb{C}[z]$, и ряда ее последовательных производных (см. теорему 12 в гл. 4 книги [1]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987.
- [2] Шидловский А. Б. К проблеме алгебраической независимости значений E -функций в алгебраических точках // Матем. заметки. 1989. Т. 45. № 1. С. 115–122.
- [3] Чирский В. Г. Об арифметических свойствах значений аналитических функций, связанных алгебраическими уравнениями над полем рациональных функций // Матем. заметки. 1973. Т. 14. № 1. С. 83–94.
- [4] Нестеренко Ю. В., Шидловский А. Б. О линейной независимости значений E -функций // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 8. С. 93–108.
- [5] Шидловский А. Б. Об алгебраической независимости значений E -функций // Тр. МИАН. 1997. Т. 218. С. 439–443.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
12.01.1999