Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Яроцкий, Принцип инвариантности для неоднородного случайного блуждания на решетке $\mathbb{Z}^1$, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 3, 459–472

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1188>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 15:51:35

УДК 519.2

ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ НА РЕШЕТКЕ $\mathbb{Z}^1$

Д. А. Яроцкий

Рассматривается неоднородное случайное блуждание на решетке $\mathbb{Z}^1$ с переходными вероятностями, отличающимися от переходных вероятностей некоторого однородного блуждания лишь в конечном числе точек. Доказано, что траектории такого блуждания в пределе сходятся к траекториям некоторого обобщенного диффузионного процесса на прямой. Полученный результат обобщает хорошо известный принцип инвариантности для сумм независимых случайных величин и броуновского движения.

Библиография: 6 названий.

1. Введение. Предварительные сведения и основной результат. Рассматривается случайное блуждание X_t на решетке $\mathbb{Z}^1$ (где $t \in \mathbb{Z}$, $t \geq 0$) с переходными вероятностями.

$$\Pr(X_{t+1} = l \mid X_t = k) \equiv \Pr(k \rightarrow l) = \pi(l - k) + V(l - k, k). \quad (1)$$

Функции $\pi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, $V: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяют естественным условиям:

$$\pi(l - k) + V(l - k, k) \geq 0 \quad \forall k, l; \quad (2)$$

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} (\pi(l - k) + V(l - k, k)) = 1 \quad \forall k. \quad (3)$$

Кроме того, наложим такие требования:

- 1) функции π и V – финитны, т.е. $\exists \rho \in \mathbb{N}$ такое, что при $|k| > \rho$ $\pi(k) = 0$ и при $\max(|k|, |l|) > \rho$ $V(k, l) = 0$;
- 2) невозмущенный скачок является несмещенным, т.е.

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} k \pi(k) = 0; \quad (4)$$

- 3) дисперсия невозмущенного скачка положительна, т.е.

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 \pi(k) = a > 0; \quad (5)$$

- 4) невозмущенное блуждание (отвечающее случаю $V(k, l) = 0$) является неприводимым, т.е. $\text{НОД}(l \mid \pi(l) \neq 0, l \in \mathbb{Z}) = 1$;

5) $\forall l \in \mathbb{Z}, \forall r > 0 \exists l_1 > r, \exists l_2 < -r, \exists t_1, t_2$ такие, что $\mathbf{P}(X_{t_0+t_k} = l_k \mid X_{t_0} = l) > 0$, $k = 1, 2$, – “просачиваемость процесса в обе стороны”;

6) кроме того, будем считать, что блуждание начинается в нуле, т.е. $X_0 = 0$.

Рассмотрим функцию

$$G_\gamma(t, y, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi ta}} \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{2ta}} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \operatorname{sign} x e^{-\frac{(|x|+|y|)^2}{2ta}} \right), \quad (6)$$

где $t, y, x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ и $\gamma > 0$ – некоторый положительный параметр.

В работе [1] был построен непрерывный марковский процесс на прямой, который является предельным для данного неоднородного блуждания на решетке в смысле слабой сходимости соответствующих стохастических полугрупп. При этом функция (6), где константа a определяется формулой (5), $\gamma = \gamma(\pi, V) > 0$ – параметр, зависящий от функций π и V , является плотностью переходной вероятности этого непрерывного процесса, который можно рассматривать как обобщенный диффузионный процесс с эластичным экраном в нуле (подробнее о таких процессах см. [2]).

Основной результат настоящей работы представляет собой принцип инвариантности для неоднородного случайного блуждания. Мы докажем, что траектории неоднородного случайного блуждания на решетке $\mathbb{Z}^1$ в гидродинамическом пределе сходятся к траекториям диффузионного процесса на прямой с переходными вероятностями, определяемыми формулой (6). При этом мы будем следовать идеям доказательства аналогичного результата для броуновского движения (см. [3]), а также развивать технику аппроксимации стохастической полугруппы, соответствующей диффузионному процессу, решетчатыми стохастическими операторами для случайного блуждания (1).

Перейдем к формулировке основного результата работы.

Пусть $n \in \mathbb{N}$ – фиксировано.

Пусть $\{l_k \in \mathbb{Z}, k = 1, \dots, n\}$ – набор n целых чисел. Рассмотрим ломаную η с вершинами $\{(k/n, l_k/n), k = 0, \dots, n, l_0 = 0\}$ как элемент пространства $C[0, 1]$ и припишем ей вероятность

$$\mathbf{P}_n(\eta) = \Pr(l_0 \rightarrow l_1) \cdot \Pr(l_1 \rightarrow l_2) \cdot \dots \cdot \Pr(l_{n-1} \rightarrow l_n).$$

Таким образом, для каждого $n \in \mathbb{Z}$ неоднородное случайное блуждание на решетке индуцирует вероятностную меру $\mathbf{P}_n$ на σ -алгебре борелевских подмножеств $C[0, 1]$, в действительности сосредоточенную в конечном числе элементов $C[0, 1]$, а именно, ломаных указанного вида (конечность – из свойства 1) нашего блуждания).

Будем обозначать конечномерные распределения мер $\mathbf{P}_n$ как $\mu_{n;t_1, \dots, t_k}$, $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq 1$:

$$\mu_{n;t_1, \dots, t_k}(B_1, \dots, B_k) = \mathbf{P}(f(t) \in C[0, 1] \mid f(t_i) \in B_i, i = 1, \dots, k).$$

Для конечномерных распределений $\mu_{t_1, \dots, t_k}^\gamma$ непрерывного процесса на прямой, начинающегося в нуле, имеем формулу:

$$\begin{aligned} \mu_{t_1, \dots, t_k}^\gamma(B_1, \dots, B_k) &= \int_{B_1} G_\gamma(t_1, 0, dx_1) \int_{B_2} G_\gamma(t_2 - t_1, x_1, dx_2) \times \dots \\ &\quad \dots \times \int_{B_k} G_\gamma(t_k - t_{k-1}, x_{k-1}, dx_k), \end{aligned}$$

где G_γ – функция, определенная формулой (6).

Тогда справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Существует такой положительный параметр γ и такая вероятностная мера $\mathbf{P}$ на $C[0, 1]$, что последовательность мер $\mathbf{P}_n$ слабо сходится к мере $\mathbf{P}$, и мера $\mathbf{P}$ имеет конечномерные распределения $\mu_{t_1, \dots, t_k}^\gamma$, определенные выше.*

2. Начало доказательства теоремы 1. Плотность семейства $\mathbf{P}_n$. Согласно следствию из теоремы Прохорова (см. [3]) для доказательства теоремы 1 достаточно установить, что:

- 1) семейство мер $\{\mathbf{P}_n\}$ – плотно,
- 2) существует такое $\gamma > 0$, что $\mu_{n; t_1, \dots, t_k} \Rightarrow \mu_{t_1, \dots, t_k}^\gamma$ в смысле слабой сходимости $\forall 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq 1$.

Докажем плотность семейства $\{\mathbf{P}_n\}$. Воспользуемся следующими двумя леммами (см. [3, с. 89, 102]).

ЛЕММА 1. *Предположим, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $\lambda > 1$ и N_0 , что для любых k и $N > N_0$*

$$\mathbf{P}\left(\max_{0 \leq i \leq N} |X_{k+i} - X_k| \geq \lambda\sqrt{N}\right) < \frac{\varepsilon}{\lambda^2}. \quad (7)$$

Тогда семейство $\{\mathbf{P}_n\}$ является плотным.

ЛЕММА 2. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ – независимые случайные величины, причем $E\xi_i = 0$, $D\xi_i = a$. Тогда, полагая $S_i = \sum_{k=1}^i \xi_k$, имеем для любого λ :*

$$\mathbf{P}\left(\max_{i \leq N} |S_i| \geq \lambda\sqrt{aN}\right) \geq 2\mathbf{P}(|S_N| \geq (\lambda - \sqrt{2})\sqrt{aN}).$$

Мы будем проверять условие леммы 1 при помощи леммы 2. При этом будем иметь в виду, что вне окрестности $\{k \mid |k| < \rho\}$ наше блуждание является однородным (и по пространству, и по времени), и в качестве величин ξ_i в лемме 2 будем брать величины $X_{i+1} - X_i$. Имеем для любого k :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\max_{0 \leq i \leq N} |X_{k+i} - X_k| \geq \lambda\sqrt{N}\right) &= P_- + P_+, \quad \text{где} \\ P_- &= \mathbf{P}\left(\left\{\max_{0 \leq i \leq N} |X_{k+i} - X_k| \geq \lambda\sqrt{N}\right\} \cap \{X_k \leq 0\}\right), \\ P_+ &= \mathbf{P}\left(\left\{\max_{0 \leq i \leq N} |X_{k+i} - X_k| \geq \lambda\sqrt{N}\right\} \cap \{X_k > 0\}\right). \end{aligned}$$

Оценим вероятность P_- (P_+ оценивается аналогично).

$$P_- = P_1 + P_2 + P_3,$$

где

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \mathbf{P} \left(\left\{ \max_{0 \leq i \leq N} |X_{k+i} - X_k| \geq \lambda \sqrt{N} \right\} \cap \left\{ X_k < -\frac{\lambda \sqrt{N}}{3} \right\} \right), \\
 P_2 &= \mathbf{P} \left(\left\{ \max_{0 \leq i \leq N} |X_{k+i} - X_k| \geq \lambda \sqrt{N} \right\} \cap \left\{ -\frac{\lambda \sqrt{N}}{3} \leq X_k \leq 0 \right\} \right. \\
 &\quad \left. \cap \left\{ \max_{0 \leq i \leq N} X_{k+i} \geq \frac{2\lambda \sqrt{N}}{3} \right\} \right), \\
 P_3 &= \mathbf{P} \left(\left\{ \max_{0 \leq i \leq N} |X_{k+i} - X_k| \geq \lambda \sqrt{N} \right\} \cap \left\{ -\frac{\lambda \sqrt{N}}{3} \leq X_k \leq 0 \right\} \right. \\
 &\quad \left. \cap \left\{ \min_{0 \leq i \leq N} X_{k+i} \leq -\lambda \sqrt{N} \right\} \right).
 \end{aligned}$$

Далее, пользуясь свойством 1 нашего блуждания и считая, что ξ_i , $i = 1, \dots, N$, — независимые случайные величины с распределением $\mathbf{P}(\xi_i = k) = \pi(k)$ и $S_i = \sum_{k=1}^i \xi_k$, получаем:

$$\begin{aligned}
 P_1 &\leq \mathbf{P} \left(\left\{ \max_{0 \leq i \leq N} |(X_{k+1} - X_k) + (X_{k+2} - X_{k+1}) + \dots + (X_{k+i} - X_{k+i-1})| \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \geq \frac{\lambda \sqrt{N}}{3} - \rho \right\} \cap \left\{ X_k < -\frac{\lambda \sqrt{N}}{3} \right\} \right) = \mathbf{P} \left(\max_{0 \leq i \leq N} |S_i| \geq \frac{\lambda \sqrt{N}}{3} - \rho \right).
 \end{aligned}$$

Аналогично для P_2 и P_3 имеем:

$$\begin{aligned}
 P_2 &\leq \mathbf{P} \left(\bigcup_{m=0}^N \left(\left\{ X_{k+m} \geq \frac{\lambda \sqrt{N}}{3}, \forall l = k, \dots, k+m-1 \quad X_l < \frac{\lambda \sqrt{N}}{3} \right\} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \cap \left\{ \max_{0 \leq i \leq N} |X_{k+m+i} - X_{k+m}| \geq \frac{\lambda \sqrt{N}}{3} - \rho \right\} \right) \right) \\
 &\leq \sum_{m=0}^N \mathbf{P} \left(X_{k+m} \geq \frac{\lambda \sqrt{N}}{3}, \forall l = k, \dots, k+m-1 \quad X_l < \frac{\lambda \sqrt{N}}{3} \right) \\
 &\quad \times \mathbf{P} \left(\max_{0 \leq i \leq N} |S_i| \geq \frac{\lambda \sqrt{N}}{3} - \rho \right) \leq \mathbf{P} \left(\max_{0 \leq i \leq N} |S_i| \geq \frac{\lambda \sqrt{N}}{3} - \rho \right), \\
 P_3 &\leq \mathbf{P} \left(\bigcup_{m=0}^N \left(\left\{ X_{k+m} \leq \frac{\lambda \sqrt{N}}{2}, \forall l = k, \dots, k+m-1 \quad X_l > -\frac{\lambda \sqrt{N}}{2} \right\} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \cap \left\{ \max_{0 \leq i \leq N} |X_{k+m+i} - X_{k+m}| \geq \frac{\lambda \sqrt{N}}{2} - \rho \right\} \right) \right) \\
 &\leq \sum_{m=0}^N \mathbf{P} \left(X_{k+m} \leq -\frac{\lambda \sqrt{N}}{2}, \forall l = k, \dots, k+m-1 \quad X_l > -\frac{\lambda \sqrt{N}}{2} \right) \\
 &\quad \times \mathbf{P} \left(\max_{0 \leq i \leq N} |S_i| \geq \frac{\lambda \sqrt{N}}{2} - \rho \right) \leq \mathbf{P} \left(\max_{0 \leq i \leq N} |S_i| \geq \frac{\lambda \sqrt{N}}{2} - \rho \right).
 \end{aligned}$$

Далее, применяя лемму 2 и полагая $\lambda/10 > 2\sqrt{2a}$, $\sqrt{N} > 10\rho$, получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\max_{0 \leq i \leq N} |X_{k+i} - X_k| \geq \lambda\sqrt{N}\right) &\leq 6\mathbf{P}\left(\max_{0 \leq i \leq N} |S_i| \geq \frac{\lambda\sqrt{N}}{10}\right) \\ &\leq 12\mathbf{P}\left(|S_N| \geq \left(\frac{\lambda}{10} - \sqrt{2a}\right)\sqrt{N}\right) \leq 12\mathbf{P}\left(|S_N| \geq \frac{\lambda}{20}\sqrt{N}\right) \\ &= 12\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_N}{\sqrt{N}}\right| \geq \frac{\lambda}{20}\right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{24}{\sqrt{2\pi a}} \int_{\lambda/20}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2a}} ds \leq \frac{24 \cdot 20^3 \cdot c}{\lambda^3}. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали центральную предельную теорему и неравенство Чебышева; c – третий абсолютный момент распределенной по нормальному закону со средним 0 и дисперсией a случайной величины. Таким образом, выбирая λ достаточно большим, так что $24 \cdot 20^3 \cdot c/\lambda < \varepsilon/2$, мы получаем, что неравенство (7) выполняется для любого k и любого $N > N_0$. Плотность семейства $\{\mathbf{P}_n\}$ доказана.

3. Доказательство сходимости конечномерных распределений. Перейдем ко второй части нашего доказательства.

Пусть $L = C_{\text{равн}}(\mathbb{R})$ – банахово пространство ограниченных и равномерно непрерывных функций на $\mathbb{R}$ с нормой $\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. Рассмотрим на нем полугруппу стохастических операторов T_γ^t :

$$\begin{aligned} (T_\gamma^t f)(y) &= \int_{\mathbb{R}} G_\gamma(t, y, x) f(x) dx, \quad t > 0, \\ T_\gamma^{t+s} &= T_\gamma^t \circ T_\gamma^s, \quad T_\gamma^0 = E. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $\gamma > 0$ – положительный параметр, общий для всех операторов полугруппы, G_γ – функция, определенная формулой (6). Нетрудно проверить, что полугруппа T_γ^t корректно определена для любого $\gamma > 0$, т.е. при $f \in L$ $T_\gamma^t f \in L$. Кроме того, полугруппа T_γ^t являетс:

- 1) сжимающей, т.е. для любого t $\|T_\gamma^t\| \leq 1$, и
- 2) сильно непрерывной, т.е. для любого $f \in L$ $T_\gamma^t f \rightarrow f$ при $t \rightarrow 0$.

Последнее свойство легко вытекает из равномерной непрерывности функций из L .

Далее, при любом фиксированном $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим банахово пространство последовательностей $L_n = \{f = f(k/\sqrt{n}), k \in \mathbb{Z}\}$ также с равномерной нормой

$$\|f\|_n = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |f(k/\sqrt{n})|. \tag{9}$$

Определим операторы ограничения

$$\pi_n: L \rightarrow L_n, \quad (\pi_n f)\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right) = f\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right). \tag{10}$$

Очевидно, что $\|\pi_n\| = 1$. Введем в пространствах L_n стохастические операторы $T_n: L_n \rightarrow L_n$:

$$(T_n f)\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \Pr(k \rightarrow l) f\left(\frac{l}{\sqrt{n}}\right). \tag{11}$$

ТЕОРЕМА 2. Для любого случайного блуждания на решетке с переходными вероятностями (1), удовлетворяющими условиям 1)–5), существует $\gamma \in (0, +\infty)$ такое, что для всех $f \in L$, и при любом $t > 0$

$$\|T_n^{[tn]}\pi_n f - \pi_n T_\gamma^t f\|_n \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

(здесь символ $[x]$ обозначает целую часть числа x).

Теорема 2 будет доказана позже, а сейчас покажем, как из нее вытекает требуемая слабая сходимость конечномерных распределений.

ЛЕММА 3. Пусть справедлива теорема 2. Тогда $\mu_{n;t_1, \dots, t_k} \Rightarrow \mu_{t_1, \dots, t_k}^\gamma$ слабо для любых $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности рассуждений рассмотрим случай $k = 2$. Очевидно, что достаточно доказать следующее: пусть $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ – непрерывные финитные функции на $\mathbb{R}$; тогда

$$\begin{aligned} \Delta(n) &\equiv \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) \mu_{n;[t_1 n]/n, [t_2 n]/n}(dx_1, dx_2) \\ &\quad - \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) \mu_{t_1, t_2}^\gamma(dx_1, dx_2) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

В силу (7), (8) имеем $\Delta(n) = \Delta_1(n) + \Delta_2(n)$, где

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= ((\pi_n T_\gamma^{t_1} - T_n^{[t_1 n]}\pi_n)(\varphi_1 \cdot T_\gamma^{t_2 - t_1}(\varphi_2)))(0), \\ \Delta_2 &= (T_n^{[t_1 n]}((\pi_n \varphi_1) \cdot (\pi_n T_\gamma^{t_2 - t_1} - T_n^{[t_2 n] - [t_1 n]}\pi_n)(\varphi_2)))(0). \end{aligned}$$

Полагая $f = \varphi_1 \cdot T_\gamma^{t_2 - t_1}(\varphi_2)$, в силу теоремы 2 имеем $|\Delta_1(n)| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Учитывая, что $\|T_n\| = \|\pi_n\| = 1$, $|(t_2 - t_1)n - ([t_2 n] - [t_1 n])| \leq 1$, легко видеть, что $\|(T_n^{[(t_2 - t_1)n]} - T_n^{[t_2 n] - [t_1 n]})\pi_n \varphi_2\|_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, и снова по теореме 2 $|\Delta_2(n)| \rightarrow 0$. Лемма, а с ней и теорема 1, доказаны.

4. Доказательство теоремы 2. Введем обозначения: пусть $C_{\text{равн}}(B)$ – пространство равномерно непрерывных и ограниченных на B функций; $C_{\text{равн}}^2(B)$ – пространство функций, равномерно непрерывных и ограниченных на B вместе со второй производной; $B \subset \mathbb{R}$ – некоторое подмножество $\mathbb{R}$.

ЛЕММА 4. Пусть A_γ – генератор полугруппы T_γ^t , $A_\gamma f = \lim_{t \rightarrow 0} (T_\gamma^t - E)f/t$. Тогда область определения $D(A_\gamma) = \{f \in C_{\text{равн}}(\mathbb{R}) \mid f \in C_{\text{равн}}^2((-\infty, 0) \cup (0, +\infty)), \gamma f'(+0) = f'(-0), f''(+0) = f''(-0)\}$ и $A_\gamma = \frac{\gamma}{2} d^2/dx^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что $D(A_\gamma) \supset \{f \in C_{\text{равн}}(\mathbb{R}) \mid f \in C_{\text{равн}}^2((-\infty, 0) \cup (0, +\infty)), \gamma f'(+0) = f'(-0), f''(+0) = f''(-0)\}$. Положим $(\gamma - 1)/(\gamma + 1) = \kappa$. Тогда $\gamma = (1 + \kappa)/(1 - \kappa)$. Обозначим

$$\hat{f}_+(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0, \\ f(x) + \kappa(f(-x) - f(x)), & x \leq 0; \end{cases} \quad (12)$$

$$\hat{f}_-(x) = \begin{cases} f(x), & x \leq 0, \\ f(x) + \kappa(f(x) - f(-x)), & x \geq 0. \end{cases} \quad (13)$$

Тогда, если $f \in C_{\text{равн}}(\mathbb{R})$, то $\hat{f}_+, \hat{f}_- \in C_{\text{равн}}(\mathbb{R})$; далее, если $f \in C_{\text{равн}}^2((-\infty, 0) \cup (0, +\infty))$, то и $\hat{f}_+, \hat{f}_- \in C_{\text{равн}}^2((-\infty, 0) \cup (0, +\infty))$. Если $\gamma f'(+0) = f'(-0)$, то $\hat{f}'_+(-0) = \hat{f}'_+(+0)$, $\hat{f}'_-(-0) = \hat{f}'_-(+0)$. Наконец, если $f''(-0) = f''(+0)$, то $\hat{f}''_+(-0) = \hat{f}''_+(+0)$, $\hat{f}''_-(-0) = \hat{f}''_-(+0)$. Итак, $\hat{f}_+, \hat{f}_- \in C_{\text{равн}}^2(\mathbb{R})$. Заметим, что

$$(T_\gamma^t f)(x) = \begin{cases} (T_1^t \hat{f}_+)(x), & x \geq 0, \\ (T_1^t \hat{f}_-)(x), & x \leq 0, \end{cases} \quad \text{где} \quad (14)$$

$$(T_1^t)(x) = \int_{\mathbb{R}} p_{at,x}(y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi at}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2at}} f(y) dy,$$

где $p_{at,x}(y)$ — гауссовская плотность, отвечающая среднему x и дисперсии at . Заметим, что

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi at}} e^{-\frac{y^2}{2at}} y^2 dy = at.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ так, что $|\hat{f}''_+(x_1) - \hat{f}''_+(x_2)| < \varepsilon$ при $|x_1 - x_2| < \delta$. Затем выберем $t_0(\delta) > 0$ такое, что при $t < t_0$

$$\frac{1}{t} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} \frac{1}{\sqrt{2\pi at}} e^{-\frac{y^2}{2at}} y^2 dy < \varepsilon.$$

Далее, существует такая константа M , что $|\hat{f}''_+(x)| \leq M$ для любого x . Тогда для любого $x \geq 0$ при помощи формулы Тейлора получаем:

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{1}{t} (T_\gamma^t f - f) - \frac{a}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} \right)(x) \right| &= \left| \frac{1}{t} \left(\int_{\mathbb{R}} p_{at,x}(y) \hat{f}_+(y) dy - \hat{f}_+(x) \right) - \frac{a}{2} \hat{f}''_+(x) \right| \\ &= \frac{1}{t} \left| \int_{x-\delta}^{x+\delta} p_{at,x}(y) (y-x)^2 \cdot \frac{1}{2} (\hat{f}''_+(u(y)) - \hat{f}''_+(x)) dy \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R} \setminus [x-\delta, x+\delta]} p_{at,x}(y) (y-x)^2 \cdot \frac{1}{2} (\hat{f}''_+(u(y)) - \hat{f}''_+(x)) dy \right| \\ &\leq \frac{1}{2} a \varepsilon + M \varepsilon. \end{aligned}$$

Здесь $u(y) \in [x, y]$. Таким образом, при $x \geq 0$

$$\frac{1}{t} (T_\gamma^t f - f)(x) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{a}{2} f''(x) \quad \text{равномерно по } x.$$

Доказывая аналогичное утверждение для $x \leq 0$, окончательно находим, что

$$\frac{1}{t} (T_\gamma^t f - f) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{a}{2} \frac{d^2 f}{dx^2}.$$

Теперь докажем обратное включение. Пусть $g \in D(A_\gamma)$. Тогда существует функция $f \in L = C_{\text{равн}}(\mathbb{R})$ такая, что

$$g = (E - A_\gamma)^{-1} f = \int_0^\infty e^{-t} T_\gamma^t f dt.$$

Мы воспользуемся тем, что (см. [4])

$$\int_0^\infty e^{-t} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}|y-x|}. \quad (15)$$

При $x \geq 0$ в силу (14), (15) имеем:

$$g(x) = \left(\int_0^\infty e^{-t} T_1^t \hat{f}_+ dt \right)(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\sqrt{2/a}|y-x|} \hat{f}_+(y) dy,$$

поэтому при $x > 0$ существуют первая и вторая производные функции $g(x)$:

$$g'(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\text{sign}(x-y)}{a} e^{-\sqrt{2/a}|y-x|} \hat{f}_+(y) dy, \quad \text{а также}$$

$$g''(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt{2}}{a\sqrt{a}} e^{-\sqrt{2/a}|y-x|} \hat{f}_+(y) dy + \frac{2}{a} \hat{f}_+(x),$$

т.е. $g \in C_{\text{равн}}^2[0, +\infty)$. Аналогично при $x < 0$

$$g'(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\text{sign}(x-y)}{a} e^{-\sqrt{2/a}|y-x|} \hat{f}_-(y) dy,$$

$$g''(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt{2}}{a\sqrt{a}} e^{-\sqrt{2/a}|y-x|} \hat{f}_-(y) dy + \frac{2}{a} \hat{f}_-(x),$$

т.е. $g \in C_{\text{равн}}^2(-\infty, 0]$. Значит, $g \in C_{\text{равн}}^2((-\infty, 0) \cup (0, +\infty))$. Далее, из полученных выражений для g' , g'' при помощи формул (12), (13) находим, что $g'(-0) = \gamma g'(+0)$, $g''(-0) = g''(+0)$. Лемма доказана.

Далее нам понадобится

ТЕОРЕМА 3 (Троттер–Курц, [5]). *В обозначениях (8)–(11), введенных выше, пусть для всякой $f \in D(A_\gamma)$ существует последовательность $f_n \in L_n$ такая, что:*

$$\|\pi_n f - f_n\|_n \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (16)$$

$$\|\pi_n A_\gamma f - n(T_n - E)f_n\|_n \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Тогда $\|T_n^{[tn]} \pi_n f - \pi_n T_\gamma^t f\|_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для всех $f \in L$.

Из теоремы 3 сразу следует, что для доказательства теоремы 2 нам будет достаточно, во-первых, найти параметр $\gamma \in (0, +\infty)$ такой, что для любой $f \in D(A_\gamma)$ найдется последовательность f_n , удовлетворяющая свойствам (16), (17), а во-вторых, построить эту последовательность. Ниже мы сначала сформулируем некоторые достаточные условия на функции f_n , гарантирующие выполнение требований (16), (17), а затем докажем существование функций, удовлетворяющих этим достаточным условиям.

Пусть $f \in C_{\text{равн}}^2((-\infty, 0) \cup (0, +\infty))$, $f''(-0) = f''(+0)$. Введем функции $F, R: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$F(m) = \begin{cases} f'(-0)m, & m \leq 0, \\ f'(+0)m, & m \geq 0; \end{cases} \quad (18)$$

$$R(m) = \frac{f''(0)}{2} \cdot \left(m^2 + a - \sum_{l=-p}^p \text{Pr}(m \rightarrow m+l)(m+l)^2 \right) \quad (19)$$

(заметим, что в силу (4), (5) имеем $R(m) = 0$ при $|m| > \rho$). Будем искать последовательность f_n в следующем виде:

$$f_n\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right) = f\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right) + \frac{C(k)}{\sqrt{n}} + \frac{D_n(k)}{n}, \quad (20)$$

где C, D_n – некоторые функции на $\mathbb{Z}$, $n = 1, 2, \dots$.

ЛЕММА 5. Пусть функции $C, D_n: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\sup_{m \in \mathbb{Z}} |C(m)| < \infty, \quad (21)$$

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \Pr(k \rightarrow l) (F(l) + C(l)) - (F(k) + C(k)) = 0 \quad \text{для любого } k \in \mathbb{Z}, \quad (22)$$

$$\sup_k |D_n(k)| = o(n) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (23)$$

$$\sup_k |(T - E)D_n(k) - R(k)| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (21), (23) легко следует (16). Докажем, что выполнено условие (17). Из (22), (24) соответственно вытекает, что при $|k| > \rho$:

$$(T - E)C(k) = -(T - E)F(k) = 0, \quad (25)$$

$$\sup_{|k| > \rho} |(T - E)D_n(k)| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (26)$$

Пусть сначала $\tilde{f}_n(k/\sqrt{n}) = f(k/\sqrt{n}) + C(k)/\sqrt{n}$, $k \in \mathbb{Z}$. Пусть $m > \rho$, $m \in \mathbb{Z}$. Тогда, учитывая (25), имеем (здесь $u(l) \in [m/\sqrt{n}, (m+1)/\sqrt{n}]$)

$$\begin{aligned} & (n(T_n - E)\tilde{f}_n - \pi_n A_\gamma f)\left(\frac{m}{\sqrt{n}}\right) \\ &= n\left(\sum_{l=-\rho}^{\rho} \pi(l)\left(f\left(\frac{m+l}{\sqrt{n}}\right) + \frac{C(m+l)}{\sqrt{n}}\right) - \left(f\left(\frac{m}{\sqrt{n}}\right) + \frac{C(m)}{\sqrt{n}}\right)\right) \\ &\quad - \frac{a}{2}f''\left(\frac{m}{\sqrt{n}}\right) = n\left(\sum_{l=-\rho}^{\rho} \pi(l)\left(f\left(\frac{m}{\sqrt{n}}\right) + \frac{l}{\sqrt{n}}f'\left(\frac{m}{\sqrt{n}}\right) + \frac{l^2}{2n}f''(u(l))\right) \right. \\ &\quad \left. - f\left(\frac{m}{\sqrt{n}}\right) + \sum_{l=-\rho}^{\rho} \pi(l)\frac{C(m+l)}{\sqrt{n}} - \frac{C(m)}{\sqrt{n}}\right) - \frac{a}{2}f''\left(\frac{m}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \sum_{l=-\rho}^{\rho} \frac{l^2}{2}\pi(l)f''(u(l)) - \frac{a}{2}f''\left(\frac{m}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \sum_{l=-\rho}^{\rho} \frac{l^2}{2}\pi(l)\left(f''(u(l)) - f''\left(\frac{m}{\sqrt{n}}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{равномерно при } m > \rho. \end{aligned}$$

Для $m < -\rho$ верен аналогичный факт. Отсюда, а также из (26) следует, что

$$(n(T_n - E)f_n - \pi_n A_\gamma f)\left(\frac{m}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{равномерно при } |m| > \rho.$$

Допустим теперь, что $m \in [0, \rho]$. Тогда (здесь $u(l) \in [0, (m+l)/\sqrt{n}]$, $v \in [0, m/\sqrt{n}]$):

$$\begin{aligned}
 & (n(T_n - E)\tilde{f}_n - \pi_n A_\gamma f) \left(\frac{m}{\sqrt{n}} \right) \\
 &= n \left(\sum_{l=-\rho}^{\rho} \Pr(m \rightarrow m+l) \left(f \left(\frac{m+l}{\sqrt{n}} \right) + \frac{C(m+l)}{\sqrt{n}} \right) - \left(f \left(\frac{m}{\sqrt{n}} \right) + \frac{C(m)}{\sqrt{n}} \right) \right) \\
 &\quad - \frac{a}{2} f'' \left(\frac{m}{\sqrt{n}} \right) = n \left[\sum_{l=-\rho}^{\rho} \Pr(m \rightarrow m+l) \left(f(0) + f'(\pm 0) \frac{m+l}{\sqrt{n}} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{(m+l)^2}{2n} f''(u(l)) + \frac{C(m+l)}{\sqrt{n}} \right) - \left(f(0) + f'(+0) \frac{m}{\sqrt{n}} + \frac{m^2}{2n} f''(v) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{C(m)}{\sqrt{n}} \right) \right] - \frac{a}{2} f'' \left(\frac{m}{\sqrt{n}} \right) = \sum_{l=-\rho}^{\rho} \Pr(m \rightarrow m+l) \frac{(m+l)^2}{2} f''(u(l)) - \frac{m^2}{2} f''(v) \\
 &\quad + \sum_{l=-\rho}^{\rho} \Pr(m \rightarrow m+l) \frac{C(m+l) + F(m+l)}{\sqrt{n}} - \frac{C(m) + F(m)}{\sqrt{n}} \\
 &\quad - \frac{a}{2} f'' \left(\frac{m}{\sqrt{n}} \right) = \sum_{l=-\rho}^{\rho} \Pr(m \rightarrow m+l) \frac{(m+l)^2}{2} f''(u(l)) - \frac{m^2}{2} f''(v) \\
 &\quad - \frac{a}{2} f'' \left(\frac{m}{\sqrt{n}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -R(m).
 \end{aligned}$$

Аналогично рассматривается случай $m \in [-\rho, 0]$.

Значит, если $f_n(k/\sqrt{n}) = \tilde{f}_n(k/\sqrt{n}) + D_n(k)/n$, то в силу (24) получаем (17). Лемма 5 доказана.

Перейдем к непосредственному построению последовательности f_n . Одновременно будет найден и параметр γ .

Начнем с построения функции $C(m)$. Обозначим через $\mathbf{B} = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ – пространство вещественнозначных функций на решетке $\mathbb{Z}$. Пусть $A_0 = T_0 - E: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$ – оператор, отвечающий невозмущенному блужданию на решетке:

$$(A_0 H)(k) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \pi(l-k) H(l) - H(k), \quad H = \{H(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}. \quad (27)$$

Рассмотрим $\ker A_0 \stackrel{\text{def}}{=} W_0 \subset \mathbf{B}$ (пока мы не накладываем никаких ограничений на рост функций из W_0 , т.е. в W_0 входят все функции $H \in \mathbf{B}$, удовлетворяющие бесконечной системе линейных уравнений (27), независимо от того, ограничены они или нет). Пусть $d_- = \min\{l \in \mathbb{Z} \mid \pi(l) > 0\} < 0$, $d_+ = \max\{l \in \mathbb{Z} \mid \pi(l) > 0\} > 0$, $d = d_+ + |d_-|$. Рассмотрим характеристический многочлен

$$\chi(z) = \pi(d_-) + \pi(d_- + 1)z + \pi(d_- + 2)z^2 + \cdots + \pi(d_+)z^d - z^{|d_-|}.$$

Хорошо известно (см., например, [6]), что $\dim W_0 = d$, причем базисными векторами в W_0 являются функции $G \in \mathbf{B}$ вида $G(k) = k^{q-1} b^k$, $k \in \mathbb{Z}$, где b – корень $\chi(z)$, $q = 1, 2, \dots, q_{\max}$; здесь $q_{\max}$ – кратность корня b (при наличии комплексных корней

$b \neq \bar{b}$ берутся $\operatorname{Re} G$ и $\operatorname{Im} G$). Из условий (4), (5) следует, что $z = 1$ – корень $\chi(z)$ кратности строго 2, а из неприводимости невозмущенного блуждания – что других корней на единичной окружности у многочлена $\chi(z)$ нет. Следовательно, W_0 представляется в виде прямой суммы $W_0 = W_0^1 \oplus W_0^2 \oplus W_0^3 \oplus W_0^4$, где

W_0^1 – пространство, натянутое на вектор $G_1(k) \equiv 1$, $\dim W_0^1 = 1$;
 W_0^2 – пространство, натянутое на вектор $G_2(k) = k$, $\dim W_0^2 = 1$;
 W_0^3 – пространство, натянутое на базисные векторы, отвечающие корням b таким, что $|b| > 1$;
 W_0^4 – пространство, натянутое на базисные векторы, отвечающие корням b таким, что $|b| < 1$.

Далее рассмотрим пространство $W = \ker(T - E) \subset \mathbf{B}$, т.е. множество функций $H \in \mathbf{B}$ таких, что

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \operatorname{Pr}(k \rightarrow l) H(l) - H(k) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (28)$$

ЛЕММА 6. *Имеем $\dim W \geq d$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся тем, что $\operatorname{Pr}(k \rightarrow l) = \pi(l-k) + V(l-k, k)$, причем $V(l-k, k) = 0$ при $\max(|l-k|, |k|) > \rho$. Разобьем бесконечную систему линейных уравнений (28) на три подсистемы: 1) отвечающих $k < -2\rho$; 2) отвечающих $-2\rho \leq k \leq 2\rho$; 3) отвечающих $k > 2\rho$. Как легко видеть, в системе 2) $4\rho + 1$ уравнении и $4\rho + 1 + d$ неизвестных. Следовательно, однородная система 2) имеет не менее чем d -мерное пространство решений. Пусть $H(-2\rho + d_-)$, $H(-2\rho + d_- + 1)$, $\dots$, $H(2\rho + d_+)$ – решение системы 2). Тогда функция $H(l)$ может быть однозначно доопределена при $l < -2\rho + d_-$ и $l > 2\rho + d_+$ до элемента W с помощью уравнений из систем 1) и 3). Лемма 6 доказана.

Заметим, что в силу финитности $V(k-l, k)$ любая функция $H \in W$ имеет как бы левую и правую “регулярные части” в следующем смысле: $\exists G_{\text{лев}}, G_{\text{прав}} \in W_0$, так что при $k < -\rho$ $H(k) = G_{\text{лев}}(k)$, а при $k > \rho$ $H(k) = G_{\text{прав}}(k)$. Вообще говоря, $G_{\text{лев}} \neq G_{\text{прав}}$.

ЛЕММА 7. *Пусть функция $H \in W$ и предположим, что она достигает максимума. Тогда $H \equiv \text{const}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H(k) = \max_{l \in \mathbb{Z}} H(l)$. В силу того, что $H \in W$, имеем $H(k) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \operatorname{Pr}(k \rightarrow l) H(l)$. Так как $\operatorname{Pr}(k \rightarrow l) \geq 0$, $\sum_{l \in \mathbb{Z}} \operatorname{Pr}(k \rightarrow l) = 1$, то $H(k) = H(l)$ для всех l таких, что $\operatorname{Pr}(k \rightarrow l) > 0$. Отсюда, а также из неприводимости и свойства 5) нашего блуждания получаем, что $H(k) = H(l)$ для всех l , кроме, может быть, конечного числа. Обозначая $H(m) = \min_{l \in \mathbb{Z}} H(l)$, аналогично находим, что $H(m) = H(l)$ для всех l , кроме конечного числа. Следовательно, $H(l) \equiv \text{const}$.

ЛЕММА 8. *Пусть $H \in W$, H ограничена сверху. Тогда она достигает максимума.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: без ограничения общности считаем, что $\forall k \in \mathbb{Z}$ $H(k) < M$ и $M = \lim_{i \rightarrow \infty} H(k_i)$, где $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$ – последовательность натуральных чисел. Рассмотрим многочлен $\chi_1(z) = \chi(z)/(z-1)^2$. Пусть $\chi_1(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{d-2} z^{d-2}$. Заметим, что $\forall i = 1, \dots, d-2$ $a_i > 0$. Действительно,

это следует из того, что

$$\begin{aligned} 0 < \pi(d_-) = a_0, & \quad 0 \leq \pi(d_- + 1) = a_1 - 2a_0, \\ 0 < \pi(d_+) = a_{d-2}, & \quad 0 \leq \pi(d_+ - 1) = -2a_{d-2} + a_{d-1}, \end{aligned}$$

а при $i = 2, 3, \dots, -d_- - 1$ и при $i = -d_- + 1, -d_- + 2, \dots, d - 2$ имеем

$$0 \leq \pi(d_- + i) = a_i - 2a_{i-1} + a_{i-2}.$$

Далее рассмотрим функцию $\varphi(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, $k > \rho$:

$$\varphi(k) = \sum_{l=0}^{d-2} a_l H(k+l).$$

Многочлен $\chi_1(z)$ имеет те же корни, что и $\chi(z)$, кроме $z = 1$. Поэтому функция $\varphi(k)$ — линейна: $\varphi(k) = c_1 + c_2 k$. С другой стороны, нетрудно видеть, что

$$\varphi(k_i) \rightarrow \sum_{l=0}^{d-2} a_l M \quad \text{при } i \rightarrow \infty.$$

Следовательно, $\varphi(k) \equiv \sum_{l=0}^{d-2} a_l M$. Однако, из положительности коэффициентов a_l и сделанного в начале предположения вытекает, что $\varphi(k) < \sum_{l=0}^{d-2} a_l M$. Противоречие. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Из лемм 7, 8 вытекает, что если функция $H \in W$ ограничена сверху (или снизу), то она является постоянной.

Рассмотрим линейный оператор $\psi: W \rightarrow W_0^4 \oplus W_0^3$, который строится так: пусть $H \in W$, пусть $G_{\text{лев}}, G_{\text{прав}} \in W_0$ — его левая и правая “регулярные части”. Пусть $G_{\text{лев}}^4$ — проекция $G_{\text{лев}}$ на W_0^4 , $G_{\text{прав}}^3$ — проекция $G_{\text{прав}}$ на W_0^3 . Тогда $\psi(H) = (G_{\text{лев}}^4, G_{\text{прав}}^3)$.

ЛЕММА 9. Имеем: а) $\dim \ker \psi = 2$, б) $\dim W = d$, в) $\dim \text{Im } \psi = d - 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что $\dim \ker W \leq 0$. Действительно, пусть $H_1, H_2 \in \ker \psi$. Тогда

$$\begin{aligned} H_1(k) &= b_{11}k + O(1) & \text{при } k \rightarrow -\infty, \\ H_1(k) &= b_{12}k + O(1) & \text{при } k \rightarrow +\infty, \\ H_2(k) &= b_{21}k + O(1) & \text{при } k \rightarrow -\infty, \\ H_2(k) &= b_{22}k + O(1) & \text{при } k \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Будем считать, что $b_{11} = b_{21}$ (если это не так, умножим H_2 на b_{11}/b_{21}). Тогда

$$\begin{aligned} (H_1 - H_2)(k) &= O(1) & \text{при } k \rightarrow -\infty, \\ (H_1 - H_2)(k) &= (b_{12} - b_{22})k + O(1) & \text{при } k \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

отсюда по следствию из лемм 7, 8 получаем $(H_1 - H_2)(k) \equiv \text{const}$. Таким образом, $\dim \ker \psi \leq 2$. Ранее было доказано, что $\dim W \geq d$. По построению $\dim(W_0^4 \oplus W_0^3) = \dim W_0^4 + \dim W_0^3 = d - 2$. Отсюда, используя равенство

$$\dim \ker \psi + \dim \text{Im } \psi = \dim W,$$

получаем все три утверждения леммы.

Из пункта а) леммы 9 следует, что найдется функция $H \in \ker \psi \subset W$ такая, что

$$\begin{aligned} H(k) &= b_1 k + O(1) & (k \rightarrow -\infty), \\ H(k) &= b_2 k + O(1) & (k \rightarrow +\infty), \end{aligned}$$

причем $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$. Тогда искомая величина γ равна отношению b_1/b_2 . Докажем это. Пусть $f \in D(A_\gamma)$ и H нормирована так, что

$$\begin{aligned} H(k) &= f'(-0)k + O(1) & (k \rightarrow -\infty), \\ H(k) &= f'(0)k + O(1) & (k \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

Определяя функцию F по формуле (18) и полагая $C(k) = H(k) - F(k)$, видим, что функция C удовлетворяет условиям (21), (22).

Остается построить последовательность D_n , для которой выполнены свойства (23), (24). Пусть функция $R(k)$ определена по формуле (18).

ЛЕММА 10. *Существует $D(k) \in W$ такая, что $(T - E)D = R$ и существуют $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ такие, что*

$$\begin{aligned} D(k) &= c_1 k + O(1) & (k \rightarrow -\infty), \\ D(k) &= c_2 k + O(1) & (k \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие $(T - E)\tilde{D} = R$ представляет собой бесконечную систему линейных уравнений

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \Pr(k \rightarrow l) \tilde{D}(l) - \tilde{D}(k) = R(k), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (29)$$

Так же, как и при доказательстве леммы 6, выделим сначала из этой системы конечную подсистему, отвечающую $-2\rho \leq k \leq 2\rho$:

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \Pr(k \rightarrow l) \tilde{D}(l) - \tilde{D}(k) = R(k), \quad -2\rho \leq k \leq 2\rho. \quad (30)$$

Эта конечная система содержит уравнений на d меньше, чем неизвестных. С другой стороны, отвечающая ей однородная система

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \Pr(k \rightarrow l) \tilde{D}(l) - \tilde{D}(k) = 0, \quad -2\rho \leq k \leq 2\rho$$

имеет согласно пункту б) леммы 9 d -мерное пространство решений. Следовательно, система (30) имеет решение при любой правой части. Далее, так же, как и в лемме 6, определяем функцию $\tilde{D}(k)$ при $k < -2\rho$, $k > 2\rho$ так, чтобы

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \Pr(k \rightarrow l) \tilde{D}(l) - \tilde{D}(k) = R(k) = 0.$$

Полученную таким образом функцию $\tilde{D}(k)$ в соответствии с пунктом в) леммы 9 можно изменить на некоторую функцию $H(k) \in W$ так, что новая функция $D(k) = \tilde{D}(k) - H(k)$ помимо равенства $(T - E)D = R$ будет удовлетворять и второму условию:

$$\begin{aligned} D(k) &= c_1 k + O(1) & (k \rightarrow -\infty), \\ D(k) &= c_2 k + O(1) & (k \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Рассмотрим какую-либо функцию $\varphi \in C^2[0, +\infty)$ со следующими свойствами: $\varphi(x) = x$ при $x \in [0, 1]$, $\varphi(x) \equiv 0$ при $x \geq 2$, $\sup_x |\varphi(x)| = M_1$, $\sup_x |\varphi''(x)| = M_2$. Положим

$$D_n(k) = \begin{cases} D(k) - c_1 k + c_1 \sqrt{n} \varphi(-k/\sqrt{n}), & k \leq 0, \\ D(k) - c_2 k + c_2 \sqrt{n} \varphi(k/\sqrt{n}), & k \geq 0. \end{cases}$$

Тогда, как легко видеть, при достаточно больших n

$$\begin{aligned} \sup_{k \in \mathbb{Z}} |D_n(k)| &\leq \max(|c_1|, |c_2|) M_1 \sqrt{n} + O(1) = O(\sqrt{n}), \\ \sup_{k \in \mathbb{Z}} |(T - E)D_n - R|(k) &\leq \max(|c_1|, |c_2|) \frac{aM_2}{2\sqrt{n}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \end{aligned}$$

и тем самым выполнены условия (23), (24).

Последовательность f_n построена. Теорема 2 доказана полностью. Заметим, что приведенная конструкция функции $C(m)$ позволяет получить явный вид зависимости $\gamma = \gamma(\pi, V)$ как некоторую рациональную функцию от значений $\pi(k)$, $V(k, l)$ и корней многочлена $\chi(z)$.

Я хотел бы выразить благодарность Р. А. Минлосу и Е. А. Жижиной за постановку задачи, обсуждение связанных с ней вопросов и помощь в подготовке статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Минлос Р. А., Жижина Е. А. Предельный диффузионный процесс для неоднородного случайного блуждания на одномерной решетке // УМН. 1997. Т. 52. № 2(314).
- [2] Портенко Н. И. Обобщенные диффузионные процессы. Киев: Наукова думка, 1982.
- [3] Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.
- [4] Вентцель А. Д. Курс теории случайных процессов. М.: Наука, 1996.
- [5] Ethier S. N., Kurtz T. G. Markov processes. Characterization and convergence. New York: John Wiley & Sons, 1986.
- [6] Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: Наука, 1987.