Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Рудаков, Периодические решения нелинейного волнового уравнения с непостоянными коэффициентами, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 3, 427–438

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm119>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 18:17:32

УДК 517.946

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НЕПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

И. А. Рудаков

Доказано существование периодических по времени решений нелинейного уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны. Оператор Даламбера имеет непостоянные коэффициенты. Нелинейное слагаемое имеет степенной рост.

Библиография: 12 названий.

1. Постановка задачи. В работе исследуется задача о периодических по времени решениях уравнения колебаний ограниченной неоднородной струны с нелинейным слагаемым, имеющим степенной рост:

$$\rho(x)u_{tt} - (\rho(x)u_x)_x + |u|^{p-2}u = h(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

$$u(x, t + T) = u(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Функция $\rho(x)$ удовлетворяет следующим условиям (см. [1]): $\rho(x) \in H^2(0, \pi)$,

$$\beta_0 \geq \rho(x) \geq \alpha_0 > 0 \quad \forall x \in (0, \pi) \quad (4)$$

и

$$\operatorname{ess\,inf}_{[0, \pi]} \eta(x) > 0, \quad (5)$$

где

$$\eta(x) = \frac{1}{2} \frac{\rho''}{\rho} - \frac{1}{4} \left(\frac{\rho'}{\rho} \right)^2.$$

Константа p в показателе степени удовлетворяет условию

$$p > 2. \quad (6)$$

Правая часть уравнения представляет собой заданную T -периодическую по времени функцию h , которая непрерывна на $[0, \pi] \times \mathbb{R}$.

Задача о периодических решениях нелинейного волнового уравнения с постоянными коэффициентами ($\rho(x) \equiv 1$) изучалась в классических работах [2]–[6] (см. также [7]). В

работах [3], [6], [7] периодические решения получены с помощью теории степени отображения, как неподвижные точки соответствующих операторов. В статьях [2], [5] применяются аналоги леммы “горного перевала” Амбросетти–Рабиновича. В работе [4] используется метод расслоения С. И. Похожаева [8]. Статья [1] является одной из первых, в которой рассматривается волновое уравнение с непостоянными коэффициентами. В ней доказано существование по крайней мере одного решения для случая, когда нелинейное слагаемое имеет “сублинейный” рост и удовлетворяет “глобальному” условию Липшица. В работе [9] удалось освободиться от условия Липшица.

В данной работе будет установлено существование периодических по времени решений волнового уравнения (1) с нелинейным слагаемым, имеющим степенной рост. Период времени T соизмерим с π и имеет вид $T = 2\pi/a$, где $a \in \mathbb{N}$.

Обозначим $\Omega = [0, \pi] \times [0, T]$, $D = \{u(x, t) \in C^\infty(\Omega) \mid u(x, t) \text{ удовлетворяет (2), (3) и } u_t(x, 0) = u_t(x, T)\}$. Определим

$$\|u\|_{L_r(\Omega)} = \left\{ \int_{\Omega} \rho(x) |u(x, t)|^r dx dt \right\}^{1/r} \quad \forall u \in D,$$

где $r \geq 1$. Пространство $L_r(\Omega)$ является замыканием D по норме $\|\cdot\|_{L_r(\Omega)}$. Пусть константа q удовлетворяет условию $1/p + 1/q = 1$. Из (6) следует, что $1 < q < 2$. Для функций $u \in L_p(\Omega)$ и $v \in L_q(\Omega)$ определим

$$(u, v) = \int_{\Omega} \rho(x) u(x, t) v(x, t) dx dt. \quad (7)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $u \in L_p(\Omega)$ называется *обобщенным решением задачи (1)–(3)*, если

$$\int_{\Omega} u(\rho(x)\varphi_{tt} - (\rho(x)\varphi_x)_x) dx dt + \int_{\Omega} |u|^{p-2} u \varphi dx dt = \int_{\Omega} h \varphi dx dt \quad \forall \varphi \in D. \quad (8)$$

Целью настоящей работы является доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Для любых положительных чисел d_1, d_2 существует $a_0 = a_0(d_1, d_2) \in \mathbb{N}$ такое, что при любом $a \geq a_0$ и любой T -периодической по t и непрерывной на $[0, \pi] \times \mathbb{R}$ функции $h(x, t)$ с $\|h\|_C \leq d_1$ задача (1)–(3) имеет обобщенное решение $u \in L_p(\Omega)$ такое, что $\|u\|_p \geq d_2$.

Заменим, как в [5], задачу (1)–(3) на эквивалентную 2π -периодическую задачу. Для этого обозначим через L_r , $\|\cdot\|$ соответственно $L_r(\Omega)$, $\|\cdot\|_{L_2(\Omega)}$ при $a = 1$. Введем новую неизвестную функцию

$$v(x, t) = u\left(x, \frac{t}{a}\right).$$

Функция $u(x, t)$ является решением задачи (1)–(3) тогда и только тогда, когда $v(x, t)$ является решением задачи

$$a^2 \rho(x) v_{tt} - (\rho(x) v_x)_x + |v|^{p-2} v = f(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1')$$

$$v(0, t) = v(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2')$$

$$v(x, t + 2\pi) = v(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3')$$

Здесь $f(x, t) = h(x, t/a)$.

2. Свойства линейной части уравнения. Обозначим λ_n и $\varphi_n = \varphi_n(x)$ соответственно собственные значения и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля

$$-(\rho\varphi'_n)_x = \rho\lambda_n^2\varphi_n, \quad \varphi_n(0) = \varphi_n(\pi) = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Здесь $\varphi' = \varphi_x = d\varphi/dx$. Систему функций $\varphi_n(x)$ можно считать ортонормированной в $L_2(0, \pi)$ со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi) = \int_{[0, \pi]} \rho(x)\varphi(x)\psi(x) dx, \quad \varphi, \psi \in L_2(0, \pi).$$

В работе [1] доказано, что если выполнены условия (4), (5), то существуют константы $b_0, b_1 > 0$ такие, что

$$\lambda_n = n + \theta_n, \quad (10)$$

где

$$0 < b_0 \frac{1}{n} \leq \theta_n \leq b_1 \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (11)$$

Рассмотрим полную, ортонормированную в $L_2(\Omega)$ систему функций

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varphi_n(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \varphi_n(x) \cos(mt), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \varphi_n(x) \sin(mt) \right\}_{m, n \in \mathbb{N}}. \quad (12)$$

Определим оператор $A_0: L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ так, что

$$D(A_0) = \left\{ u \in C^2(\overline{\Omega}) \mid u = \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^M \varphi_n(x) \cdot (a_{nm} \cos(mt) + b_{nm} \sin(mt)), \quad M, N \in \mathbb{N} \right\}$$

и $A_0\varphi = a^2\rho\varphi_{tt} - (\rho\varphi_x)_x \quad \forall \varphi \in D(A_0)$. Обозначим

$$\overline{A}_0\varphi = \frac{1}{\rho} A_0\varphi \quad \forall \varphi \in D(A_0).$$

Функции (12) являются собственными функциями оператора $\overline{A}_0$ с собственными значениями

$$\mu_{nm} = \lambda_n^2 - (am)^2 = (n + \theta_n)^2 - (am)^2, \quad (13)$$

где $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Пусть A есть оператор в $L_2(\Omega)$, являющийся замыканием по графику оператора $\overline{A}_0$. Выделим среди множества собственных функций оператора A два подмножества:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \varphi_n(x) \cos\left(\frac{n}{a}t\right), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \varphi_n(x) \sin\left(\frac{n}{a}t\right) \mid \frac{n}{a} \in \mathbb{N} \right\}, \\ \Lambda_2 &= \left\{ \varphi_n(x) \cos(mt), \varphi_n(x) \sin(mt) \mid (n, m) \in M \right\}, \end{aligned}$$

где $M = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}_+ \mid \lambda_n \neq am, n \neq am\}$.

Представим $L_2(\Omega)$ в виде прямой суммы подпространств

$$L_2(\Omega) = N_1 \oplus N_2 \oplus N_3,$$

где $N_1 = N(A)$ есть ядро A , $N_2 = \overline{L(\Lambda_1)}$ (замыкание в $L_2(\Omega)$ линейной оболочки Λ_1), $N_3 = \overline{L(\Lambda_2)}$.

Заметим, что на пространстве N_2 собственные значения оператора A равны

$$2n \cdot \theta_n + \theta_n^2 > 2b_0 > 0. \quad (14)$$

Перечислим свойства оператора A , установленные в работе [1]:

а) A – самосопряженный оператор, образ $R(A)$ замкнут в $L_2(\Omega)$ и

$$A^{-1} \in L(R(A), R(A));$$

б) ядро $N(A)$ конечномерно, а если

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \eta(x) dx < 3,$$

то $N(A) = \{0\}$;

в) $R(A) = N(A)^\perp$, $L_2(\Omega) = N(A) \oplus R(A)$.

Докажем еще некоторые свойства оператора A .

ЛЕММА 1. *Существует $a_1 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех натуральных $a \geq a_1$ имеет место оценка*

$$\|A^{-1}v\|_\infty \leq C_0 \|v\|_\alpha \quad \forall v \in N_3, \quad (15)$$

где $\alpha > 1$ и $C_0 = C_0(a_1)$ – константа, не зависящая от v и a .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вначале случай $\alpha \in (1, 2]$. Пусть $\|\varphi_n(x)\|_\infty \leq C_1 \forall n$ и $1/\alpha' + 1/\alpha = 1$. Пусть $\bar{v}_{nm}, \bar{\bar{v}}_{nm}$ есть коэффициенты Фурье функции v по системе Λ_2 . Используя неравенство Гёльдера и Хаусдорфа–Юнга, выведем

$$\begin{aligned} \|A^{-1}v\|_\infty &\leq C_2 \sum_{(n,m) \in M} \frac{|\bar{v}_{nm}| + |\bar{\bar{v}}_{nm}|}{|\lambda_n^2 - (am)^2|} \\ &\leq C_2 \left(\sum_{(n,m) \in M} (|\bar{v}_{nm}|^{\alpha'} + |\bar{\bar{v}}_{nm}|^{\alpha'}) \right)^{1/\alpha'} \cdot \left[\sum_{(n,m) \in M} |\lambda_n^2 - (am)^2|^{-\alpha} \right]^{1/\alpha} \\ &\leq C_3 \|v\|_\alpha \cdot \left[\sum_{(n,m) \in M} |\lambda_n^2 - (am)^2|^{-\alpha} \right]^{1/\alpha}. \end{aligned} \quad (16)$$

Рассмотрим числовой ряд

$$\begin{aligned} I &= \sum_{(n,m) \in M} |\lambda_n^2 - (am)^2|^{-\alpha} \\ &= \sum_{\substack{(n,m) \in M \\ m \neq 0}} |n^2 - (am)^2 + 2n\theta_n + \theta_n^2|^{-\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n + \theta_n)^{2\alpha}} \\ &< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}} + \sum_{\substack{(n,m) \in M \\ m \neq 0}} |n^2 - (am)^2|^{-\alpha} \left| 1 + \frac{2n\theta_n + \theta_n^2}{n^2 - (am)^2} \right|^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Обозначим через $C_4 = 2b_1 + \max \theta_n^2$. Тогда

$$\left| \frac{2n\theta_n + \theta_n^2}{n^2 - (am)^2} \right| \leq \frac{C_4}{n + am}, \quad (17)$$

так как $(n, m) \in M$. Следовательно, множество

$$S = \left\{ (n, m) \in M \mid \left| \frac{2n\theta_n + \theta_n^2}{n^2 - (am)^2} \right| > \frac{1}{2} \right\}$$

конечное и существует

$$\delta(a) = \min_{\substack{(n, m) \in M \\ m \neq 0}} \left| 1 + \frac{2n\theta_n + \theta_n^2}{n^2 - (am)^2} \right|.$$

Отметим, что $\delta(a) \neq 0$, поскольку $(n, m) \in M$. Из (17) следует, что найдется $a_1 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех натуральных $a \geq a_1$ при $m \neq 0$ имеет место оценка

$$\left| \frac{2n\theta_n + \theta_n^2}{n^2 - (am)^2} \right| < \frac{1}{2}.$$

Поэтому $\delta(a) > 1/2$ при $a \geq a_1$ и

$$\begin{aligned} I &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2\alpha} + 2^\alpha \sum_{(n, m) \in M} (n^2 - (am)^2)^{-\alpha} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2\alpha} + 2^\alpha \sum_{n \neq m} (n^2 - m^2)^{-\alpha} \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2\alpha} + 2^{\alpha+1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} \right)^2. \end{aligned}$$

Отсюда и из (16) следует (15). Лемма доказана.

Из леммы 1 вытекает равномерная сходимость соответствующего ряда и то, что $A^{-1}v \in C(\Omega) \quad \forall v \in N_3$.

ЛЕММА 2. *Оператор $A^{-1}: N_3 \rightarrow N_3$ вполне непрерывен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При доказательстве леммы 1 была установлена сходимость ряда

$$I = \sum_{(n, m) \in M} |\lambda_n^2 - (am)^2|^{-\alpha}.$$

Положив $\alpha = 2$, получим утверждение леммы. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. *Собственные значения $A|_{N_3}$ имеют конечную кратность.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим уравнение

$$(n + \theta_n)^2 - (am)^2 = \lambda.$$

Оно равносильно равенству

$$(n - am)(n + am) = \lambda - 2n\theta_n - \theta_n^2.$$

Из (11) следует, что правая часть в этом равенстве ограничена и может принимать лишь конечное число целых значений. Теперь заметим, что при $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ уравнение

$$(an - bm)(an + bm) = k \quad (18)$$

имеет не более конечного числа решений $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}_+$, которые получаются перебором всех целых делителей k .

На подпространстве N_3 множитель $an - bm \neq 0$. Поэтому при $k = 0$ уравнение (18) решений не имеет. Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 1. Рассмотрим конечномерное пространство $E_n = N(A) \oplus N_{2n} \oplus N_{3n}$, где N_{2n} и N_{3n} есть линейные оболочки множеств

$$\{\varphi_{ka}(x) \cos(kt), \varphi_{ka}(x) \sin(kt) \mid k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n\}$$

и

$$\{\varphi_k(x) \cos(\ell t), \varphi_k(x) \sin(\ell t) \mid (k, \ell) \in M, k, \ell \leq n\}$$

соответственно.

Рассмотрим на E_n функционал энергии

$$F(v) = \frac{1}{2}(Av, v) + \frac{1}{p} \int_{\Omega} |v|^p dx dt - \int_{\Omega} f v dx dt, \quad v \in E_n.$$

Легко видеть, что

$$\lim_{\|v\| \rightarrow \infty} F(v) = +\infty. \quad (19)$$

Доказательство теоремы будет состоять из двух этапов:

- I) доказательство существования критической точки F на E_n ;
- II) предельный переход.

Этап I. Доказательство существования критической точки функционала F на E_n проведем, опираясь на следующую лемму из работы [10].

ЛЕММА 4. Пусть конечномерное пространство E представлено в виде прямой суммы попарно ортогональных подпространств: $E = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$. Пусть S есть сфера в E с центром в нуле. Пусть функционал $F: E \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $F \in C^1(E, \mathbb{R})$;
- 2) $\lim_{\|v\|_E \rightarrow \infty} F(v) = \infty$;
- 3) $F(v) \leq d \quad \forall v \in S \cap (V_1 \oplus V_2)$;
- 4) $F(v) > d \quad \forall v \in V_3$;
- 5) $F(v) > c \quad \forall v \in V_2 \oplus V_3$.

Следовательно, существует критическая точка $v_0 \in E$ функционала F такая, что $F(v_0) \in [c, d]$.

Для любого $c \in \mathbb{R}$ обозначим G_c и L_c подпространства E_n , являющиеся линейной оболочкой тех собственных функций (12) оператора A , собственные значения которых не меньше и меньше соответственно числа c .

Для любого $c \in \mathbb{R}$ и любого $v \in G_c$

$$F(v) \geq \frac{1}{2}c\|v\|^2 + \frac{1}{\beta_0 p}\|v\|_p^p - \frac{1}{\alpha_0}\|f\| \cdot \|v\| \geq C_5 \cdot \|v\|^p - \frac{1}{2}|c| \cdot \|v\|^2 - C'_5 d_1 \|v\|.$$

Здесь константы C_5, C'_5 не зависят от n, c и a . Обозначим

$$m(c, d_1) = \min_{[0, +\infty)} h(\tau) - 1,$$

где

$$h(\tau) = C_5 \tau^p - \frac{1}{2}|c| \cdot \tau^2 - C'_5 d_1 \cdot \tau.$$

Тогда

$$F(v) > m(c, d_1) \quad \forall v \in G_c. \quad (20)$$

Число $m(c, d_1)$ не зависит от n и a .

Возьмем $v \in N_{3n}$. Пусть a_{kl}, b_{kl}, c_k есть коэффициенты Фурье v по системе (12):

$$\begin{aligned} a_{kl} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\Omega} \rho(x) \varphi_k(x) \cos(\ell t) v(x, t) dx dt, \\ b_{kl} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\Omega} \rho(x) \varphi_k(x) \sin(\ell t) v(x, t) dx dt, \\ c_k &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Omega} \rho(x) \varphi_k(x) v(x, t) dx dt. \end{aligned} \quad (21)$$

Обозначим

$$\|v\|_s = \left[\sum_{k=1}^n \lambda_k^{2s} c_k^2 + \sum_{k,l=1}^n |\lambda_k^2 - (a\ell)^2|^s (a_{kl}^2 + b_{kl}^2) \right]^{1/2}.$$

Из оценки (15) и интерполяционного неравенства при $a \geq a_1$ следует оценка (см. [5])

$$\|v\|_p \leq C_6 \|v\|_{\beta} \quad \forall v \in N_{3n}, \quad (22)$$

где $\beta = s(p-2)/p$. Если $s \in (1, p/(p-2))$, то

$$\beta \in (0, 1). \quad (23)$$

Константа C_6 не зависит от n, v и a .

ЛЕММА 5. Для любого $e \in \mathbb{R}$ существует $a_0 = a_0(e, d_1) \in \mathbb{N}$ такое, что если $a \geq a_0$ и $a \in \mathbb{N}$, то для любого $v \in \{u \in L_0 \mid \|v\|_{\beta} = 1\}$ выполняется неравенство

$$F(v) \leq e. \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v \in L_0$ такое, что $\|v\|_{\beta} = 1$, и пусть a_{kl}, b_{kl}, c_k есть коэффициенты Фурье функции v , вычисленные по формулам (21). Тогда

$$\begin{aligned} F(v) &\leq -\frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n |\lambda_k^2 - (a\ell)^2| \cdot (a_{kl}^2 + b_{kl}^2) + \frac{1}{\alpha_0 p} \|v\|_p^p + C_7 d_1 \|v\| \\ &\leq -\frac{1}{2} |\lambda|^{1-\beta} \sum_{k,l=1}^n |\lambda_k^2 - (a\ell)^2|^{\beta} (a_{kl}^2 + b_{kl}^2) + \frac{C_6^p}{\alpha_0 p} + C_8 d_1 \\ &= -\frac{1}{2} |\lambda|^{1-\beta} + \frac{C_6^p}{\alpha p} + C_8 d_1, \end{aligned} \quad (25)$$

где λ есть наибольшее отрицательное собственное значение оператора A . Из (13) следует, что

$$\lambda = (n - am)(n + am) + 2n\theta_n + \theta_n^2 \leq -a + 2n\theta_n + \theta_n^2.$$

Отсюда и из (11) выведем, что

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \lambda = -\infty.$$

Из этого равенства и (25), учитывая (23), нетрудно получить утверждение леммы. Лемма доказана.

Проверим выполнение условий леммы 4. Обозначим $E = E_n$, $V_1 = L_\lambda$, $V_3 = G_0$. Пусть V_2 есть линейная оболочка собственных векторов оператора A с собственным значением λ . Из леммы 3 следует, что $\dim V_2 < \infty$. Обозначим $S = \{v \in V_1 + V_2 \mid \|v\|_\beta = 1\}$.

Возьмем произвольное $c < m(0, d_1)$. Обозначим $\gamma(c, d_1) = \min(c, m(\lambda, d_1)) - 1$. Из (20) следует, что

$$F(v) > m(0, d_1) > c \quad \forall v \in V_3.$$

Из леммы 5 следует, что существует $a_0 = a_0(c, d_1)$ такое, что если $a \geq a_0$ и $a \in \mathbb{N}$, то

$$F(v) \leq c \quad \forall v \in S.$$

Из неравенства (20) выведем также, что

$$F(v) > m(\lambda, d_1) > \gamma(c, d_1) \quad \forall v \in V_2 \oplus V_3.$$

Условие 1) леммы 4 очевидно выполнено. Условие 2) следует из (19). Таким образом, все условия леммы 4 выполнены. Из нее следует, что существует критическая точка $v_n \in E_n$ функционала F на E_n такая, что $F(v_n) \in [\gamma(c, d_1), c]$. Следовательно,

$$(Av_n, \omega) + \int_{\Omega} |v_n|^{p-2} v_n \omega \, dx \, dt - \int_{\Omega} f \omega \, dx \, dt = 0 \quad \forall \omega \in E_n, \quad (26)$$

$$\gamma(c, d_1) \leq \frac{1}{2}(Av_n, v_n) + \frac{1}{p} \int_{\Omega} |v_n|^p \, dx \, dt - \int_{\Omega} f v_n \, dx \, dt \leq c. \quad (27)$$

Этап II. Если (26) умножить на $1/2$, положить в нем $\omega = v_n$ и полученное равенство вычесть из (27), то получим

$$-\gamma(c, d_1) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \int_{\Omega} |v_n|^p \, dx \, dt - \frac{1}{2} \int_{\Omega} f v_n \, dx \, dt \geq -c.$$

Следовательно,

$$\|v_n\|_p \leq C_9 \quad (28)$$

и

$$\|v_n\|_p^p + C_{10} \|v_n\|_p \geq |c| \cdot C_{11}, \quad (29)$$

где положительные константы C_9, C_{10}, C_{11} не зависят от n .

Отсюда вытекает, что найдется подпоследовательность, которую также обозначим v_n , такая, что $v_n \rightarrow v$ слабо в $L_p(\Omega)$ и $|v_n|^{p-2} v_n \rightarrow h$ слабо в $L_q(\Omega)$.

Докажем, что v есть обобщенное решение задачи (1')–(3'). Для этого представим $v_n = v_{1n} + v_{2n} + v_{3n}$, $v = v_1 + v_2 + v_3$, где $v_1, v_{1n} \in N_1$, $v_2, v_{2n} \in N_2$ и $v_3, v_{3n} \in N_3$.

Легко видеть, что $v_{kn} \rightarrow v_k$ слабо в $L_2(\Omega)$. Не трудно показать, что $v_2 \in D(A)$ и $Av_{2n} \rightarrow Av_2$ слабо в $L_2(\Omega)$.

Пусть $a_{kl}^n, b_{kl}^n, c_k^n$ и $a_{kl}^0, b_{kl}^0, c_k^0$ есть коэффициенты Фурье функций v_n и v соответственно. Подставим, как в [5], в равенство (26)

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{|\mu_{km}| \geq R} \operatorname{sgn}(\mu_{km}) \varphi_k(x) (a_{kl}^n \cos(lt) + b_{kl}^n \sin(lt)) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \geq \sqrt{R}} c_k^n \varphi_k(x),$$

где $R > 2b_1 + b_1^2$. Используя оценки (22), (28) и неравенство Гёльдера, получим

$$J_R \leq C_{12} \|\omega\|_{\beta} \leq \frac{C_{13}}{R^{(1-\beta)/2}} \sqrt{J_R},$$

где

$$J_R = \sum_{|\mu_{km}| \geq R} |\mu_{km}| ((a_{kl}^n)^2 + (b_{kl}^n)^2) + \sum_{k \geq \sqrt{R}} \lambda_k^2 (c_k^n)^2.$$

Таким образом,

$$J_R \leq \frac{C_{13}^2}{R^{1-\beta}}, \quad (30)$$

где константа C_{13} не зависит от n . Из последнего неравенства следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} & \left(\sum_{\substack{ak \neq bm \\ m \geq 1}} \mu_{km} ((a_{km}^n)^2 + (b_{km}^n)^2) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 (c_k^n)^2 \right) \\ &= \sum_{\substack{ak \neq bm \\ m \geq 1}} \mu_{km} ((a_{km}^0)^2 + (b_{km}^0)^2) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 (c_k^0)^2. \end{aligned} \quad (31)$$

Перейдем в равенстве (26) к пределу при $n \rightarrow \infty$ с фиксированным $\omega \in E_{n_0}$:

$$(Av_2, \omega) + (v_3, A\omega) + \int_{\Omega} h\omega \, dx \, dt - \int_{\Omega} f\omega = 0. \quad (32)$$

Отсюда следует, что существует $Au_3 \in L_q(\Omega)$. Докажем, что $h = |u|^{p-2}u$, воспользовавшись методом монотонности (см. [11]).

Для любого $u \in L_p(\Omega) \cap D(A)$ из (14) следует неравенство

$$(Au_2 - Av_{2n}, u_2 - v_{2n}) + \int_{\Omega} (|u|^{p-2}u - |v_n|^{p-2}v_n)(u - v_n) \, dx \, dt \geq 0. \quad (33)$$

Положим в (26) $w = v_n$ и, воспользовавшись (31), перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(Av_{2n}, v_{2n}) + \int_{\Omega} |v_n|^p \, dx \, dt \right] \\ &= \int_{\Omega} f v \, dx \, dt - \left(\sum_{\substack{ak \neq bm \\ m \geq 1}} \mu_{km} ((a_{km}^0)^2 + (b_{km}^0)^2) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 (c_k^0)^2 \right). \end{aligned} \quad (34)$$

Подставим в (32) $\omega = v_n$ и устремим $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} & (Av_2, v_2) + \int_{\Omega} hv \, dx \, dt \\ &= \int_{\Omega} f v \, dx \, dt - \left(\sum_{\substack{ak \neq bm \\ m \geq 1}} \mu_{km} ((a_{km}^0)^2 + (b_{km}^0)^2) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 (c_k^0)^2 \right). \end{aligned}$$

Из последних двух равенств следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[(Av_{2n}, v_{2n}) + \int_{\Omega} |v_n|^p \, dx \, dt \right] = (Av_2, v_2) + \int_{\Omega} hv \, dx \, dt. \quad (35)$$

Теперь в неравенстве (33) можно перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$:

$$(A(u_2 - v_2), u_2 - v_2) + \int_{\Omega} (|u|^{p-2}u - h)(u - v) \, dx \, dt \geq 0.$$

Взяв $u = v + \lambda\phi$ и устремив λ к нулю, после стандартных рассуждений получим $h = |v|^{p-2}v$. Из (32) следует, что v есть обобщенное решение задачи (1')–(3'). Неравенство $\|v\|_p \geq d_2$ вытекает из (29) и (35) при достаточно большом $|c|$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. При доказательстве теоремы мы не использовали однородность нелинейного слагаемого. Рассмотрим уравнение

$$\rho(x)u_{tt} - (\rho(x)u_x)_x + g(x, t, u) = 0. \quad (1'')$$

Пусть выполнены следующие условия (см. [5]):

$$g(x, t, u) \text{ не убывает по } u \text{ и } T\text{-периодична по } t, \text{ где } T = 2\pi/a, a \in \mathbb{N}; \quad (36)$$

$$g(x, t, u) \text{ непрерывна при } (x, t, u) \in [0, \pi] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \quad (37)$$

Существуют положительные константы $A_1, A_2, A_3, A_4, \delta$ такие, что при всех $(x, t, u) \in [0, \pi] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$A_1|u|^{p-1} + A_2 \geq |g(x, t, u)| \geq A_3|u|^{p-1} - A_4 \quad \text{и} \quad \frac{A_3}{2} \geq \frac{A_1}{p} + \delta. \quad (38)$$

ТЕОРЕМА 2. *Предположим выполнены условия (36)–(38), функция $\rho(x)$ удовлетворяет условиям (4), (5). Тогда для любого $d > 0$ существует $a_0 = a_0(d, A_1, A_2, A_3, A_4, \delta) \in \mathbb{N}$ такое, что при любом $a \geq a_0$ и $a \in \mathbb{N}$ задача (1''), (2), (3) имеет обобщенное решение $u \in L_p(\Omega)$ такое, что $\|u\|_p \geq d$.*

Нетрудно проверить, что доказательство теоремы 2 полностью повторяет доказательство теоремы 1 с небольшими видоизменениями.

4. Волновое уравнение с постоянными коэффициентами и с однородными граничными условиями. Рассмотрим задачу

$$u_{tt} - u_{xx} + g(x, t, u) = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (39)$$

$$u(0, t) - h_1 u'_x(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) + h_2 u'_x(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (40)$$

$$u(x, t + T) = u(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (41)$$

Здесь $h_1 > 0$, $h_2 > 0$ и $1/(h_1 \cdot h_2) + 1/2 \notin \mathbb{N}$, $T = 2\pi/a$, где $a \in \mathbb{N}$.

Результаты, полученные для задачи (1''), (2), (3), будут справедливы и для задачи (39)–(41). Это связано с тем, что линейные части этих задач имеют похожий спектр. Обозначим через A замыкание по графику в $L_2(\Omega)$ оператора Даламбера $\partial_{tt} - \partial_{xx}$, определенного на функциях из $C^\infty(\Omega)$, удовлетворяющих условиям (40), (41).

В этом пункте мы будем иметь дело с обычным пространством $L_p(\Omega)$ (вес $\rho(x) \equiv 1$).

Решениями соответствующей задачи Штурма–Лиувилля

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} + \lambda^2 \varphi &= 0, \\ \varphi(0) - h_1 \varphi'(0) &= 0, \quad \varphi(\pi) + h_2 \varphi'(\pi) = 0, \end{aligned}$$

является полная ортонормированная в $L_2([0, \pi])$ система функций

$$\varphi_n(x) = C_n(\sin \lambda_n x + \lambda_n h_1 \cos \lambda_n x),$$

где $\lambda_n = (n - 1) + \theta_n$, $C_n = C/\lambda_n + O(1)$, $C > 0$. Таким образом, $\varphi_n(x)$ равномерно ограничены в $L_\infty(\Omega)$. В [12] доказано, что существуют положительные константы b_0 и b_1 такие, что выполнено условие (11).

Собственные функции оператора A составляют следующую полную ортонормированную в $L_2(\Omega)$ систему функций:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} \varphi_n(x), \sqrt{\frac{2}{T}} \varphi_n(x) \cos(amt), \sqrt{\frac{2}{T}} \varphi_n(x) \sin(amt) \right\}_{m, n \in \mathbb{N}}.$$

Собственные значения A имеют вид

$$\mu_{nm} = \lambda_n^2 - (am)^2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} M &= \{(n, m) \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}_+, \lambda_n \neq am, (n - 1) \neq am\}, \\ \Lambda_1 &= \left\{ \varphi_n(x) \cos((n - 1)t), \varphi_n(x) \sin((n - 1)t) \mid \frac{n - 1}{a} \in \mathbb{Z}_+ \right\}, \\ \Lambda_2 &= \{ \varphi_n(x) \cos(amt), \varphi_n(x) \sin(amt) \mid (n, m) \in M \}. \end{aligned}$$

Пусть $N_1 = N(A)$ (ядро A), $N_2 = \overline{L(\Lambda_1)}$, $N_3 = \overline{L(\Lambda_2)}$. Справедливы следующие свойства A (см. [12]):

- A самосопряжен в $L_2(\Omega)$, $R(A)$ замкнут в $L_2(\Omega)$;
- $R(A) = N(A)^\perp$, $L_2(\Omega) = N(A) \oplus R(A)$;
- на N_2 собственные значения A равны $2(n - 1)\theta_n + \theta_n^2 > c_0 > 0$, где $c_0 = \min(b_0, \theta_1^2)$;
- $\dim N(A) < \infty$;
- собственные значения A на N_3 имеют конечную кратность.

Обозначим $D_0 = \{u(x, t) \in C^\infty(\Omega) \mid u(x, t) \text{ удовлетворяет (40), (41) и } u_t(x, 0) = u_t(x, T)\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $u \in L_p$ называется *обобщенным решением задачи (39)–(41)*, если

$$\int_{\Omega} u(\varphi_{tt} - \varphi_{xx}) dx dt + \int_{\Omega} g(x, t, u) \varphi dx dt = 0 \quad \forall \varphi \in D_0.$$

ТЕОРЕМА 3. *Предположим выполнены условия (36)–(38). Тогда для любого $d > 0$ существует $a_0 = a_0(d) \in \mathbb{N}$ такое, что при любом $a \geq a_0$ и $a \in \mathbb{N}$ задача (39)–(41) имеет обобщенное решение $u \in L_p(\Omega)$ такое, что $\|u\|_p \geq d$.*

Нетрудно убедиться, что благодаря перечисленным выше свойствам A , доказательство теоремы 3 полностью повторяет доказательство теоремы 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Barbu V., Pavel N. H. Periodic solutions to nonlinear one-dimensional wave equation with x -dependent coefficients // Trans. Amer. Math. Soc. 1997. V. 349. № 5. P. 2035–2048.
- [2] Rabinowitz P. Free vibration for a semilinear wave equation // Comm. Pure Appl. Math. 1980. V. 33. № 3. P. 667–689.
- [3] Bahri A., Brézis H. Periodic solution of a nonlinear wave equation // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 1980. V. 85. № 3–4. P. 313–320.
- [4] Плотников П. И. Существование счетного множества периодических решений задачи о вынужденных колебаниях для слабо нелинейного волнового уравнения // Матем. сб. 1988. Т. 136(178). № 4(8). С. 546–560.
- [5] Feireisl E. On the existence of periodic solutions of a semilinear wave equation with a superlinear forcing term // Czechoslovak Math. J. 1988. V. 38(113). № 1. P. 78–87.
- [6] Brézis H., Nirenberg L. Forced vibrations for a nonlinear wave equation // Comm. Pure Appl. Math. 1978. V. 31. № 1. P. 1–30.
- [7] Рудаков И. А. Нелинейные колебания струны // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1984. № 2. С. 9–13.
- [8] Похожаев С. И. О методе расслоения решения нелинейных краевых задач // Тр. МИАН. 1990. Т. 192. С. 146–163.
- [9] Рудаков И. А. Периодическое по времени решение нелинейного волнового уравнения с непостоянными коэффициентами // Фундамент. и прикладная матем. 2002. № 3. С. 42–49.
- [10] Feireisl E. Time periodic solutions to a semilinear wave equation // Nonlinear Anal. 1988. V. 12. P. 279–290.
- [11] Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Едиториал УРСС, 2002.
- [12] Рудаков И. А. Периодическое по времени решение уравнения вынужденных колебаний струны с однородными граничными условиями // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 12. С. 1–6.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило

17.01.2003

Исправленный вариант

30.01.2004