Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Я. Данченко, Об интерполяции в классах E^p , *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 3, 477–480

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1190>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 12:23:59

1. Скажем, что односвязная жорданова область G на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ принадлежит классу **A** (Альфorsa), если ее граница $\gamma = \partial G$ локально спрямляема и $\sup\{\text{mes}_1(\gamma \cap d)/\text{diam}(d)\} < \infty$, где $\sup$ берется по всем открытым кругам $d \subset \mathbb{C}$ (см., например, [1], [2]). Пусть $\lambda = \{z_j\}_{j=1}^\infty$ – некоторая последовательность точек области G . Эта последовательность называется *интерполяционной (по Карлесону)*, если для любого набора комплексных чисел $\{a_j\}_{j=1}^\infty \in l^\infty$ с $\|a_j\|_1^\infty = \sup\{|a_j| : j \in \mathbb{N}\} \leq 1$ интерполяционная задача $f(z_j) = a_j$ ($\forall j \in \mathbb{N}$) имеет решения f в классе Смирнова $E^\infty(G)$ (см. [3]–[5]). Через $w = \varphi_j(z)$ обозначим конформные однолистные отображения G на круг $\{w : |w| < 1\}$ с условиями $\varphi_j(z_j) = 0$ и $\varphi_j(v) \geq 0$ в какой-либо фиксированной точке $v \in G$. Далее, пусть в G сходится произведение $\mathbf{B}_\lambda(z) := \prod_{j=1}^\infty \varphi_j(z)$. При $j \in \mathbb{N}$ положим $\mathbf{B}_{\lambda,j}(z) := \mathbf{B}_\lambda(z)/\varphi_j(z)$. Известно (теорема Карлесона), что свойство $|\mathbf{B}_{\lambda,j}(z_j)| > \delta$ ($\forall j \in \mathbb{N}$) при некотором фиксированном $\delta = \delta(\lambda) > 0$ является характеристическим для интерполяционности λ [3], [4].

Шапиро и Шилдсу принадлежит следующий результат (см. [3]). Если последовательность λ является интерполяционной в круге (или в верхней полуплоскости) G , то для любой последовательности $\{a_j\}_{j=1}^\infty$ с $\|a_j\|_1^p = 1$ ($0 < p < \infty$) существует решение f из класса Харди $\mathbf{H}^p$ интерполяционной задачи:

$$\rho_j^{1/p} f(z_j) = a_j \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

с оценкой $\|f\|_p := \|f\|_{\mathbf{H}^p} \leq A(p)\delta^{-1}$ ($p > 1$), где $A(p)$ не зависит от f и $\delta = \delta(\lambda)$, а $\rho_j = \rho(z_j, \partial G)$ – евклидовы расстояния.

Фиксируем $\alpha \in (0, 1)$. Конечное или счетное множество $\lambda = \{z_j\}$ в G будем называть α -отделимым (относительно гиперболической метрики), если $|\varphi_j(z_s)| \geq \alpha$ при $j \neq s$. Очевидно, из интерполяционности следует α -отделимость λ . В данной заметке рассматривается задача (1), в которой условие интерполяционности последовательности λ заменяется более слабыми условиями, в частности, условием α -отделимости. Отметим [1], [2], что условия типа α -отделимости для λ естественно возникают в сходных задачах построения рациональных мажорант для функций класса $E^p(G)$ по их значениям на $\lambda \subset G$.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ. Пусть G – ограниченная область на $\mathbb{C}$ (ограниченность предполагается лишь для простоты выкладок). Пусть $\rho > 0$ и задана некоторая последовательность точек $\lambda = \{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ области G . Положим $\rho_j = \rho(z_j, \partial G)$ и $\lambda_k = \lambda_k(\rho) := \{z_j \in \lambda : \rho_j/\rho \in [2^{k-1}, 2^k]\}$ ($\forall k \in \mathbb{Z}$). Скажем, что последовательность λ принадлежит классу $\Lambda(G)$, если

$$S(\rho, \lambda) := \sup \left\{ \sum_j^{(k)} \rho_j^2 |z - z_j|^{-2} : z \in \partial G, k \in \mathbb{Z} \right\} < \infty,$$

где $\sum_j^{(k)}$ – сумма по тем j , для которых $z_j \in \lambda_k$ (если $\lambda_k = \emptyset$, то полагаем $\sum_j^{(k)} = 0$). Очевидно, определение $\Lambda(G)$ не зависит от выбора ρ . Отметим, что в случае $G \in \mathbf{A}$ из α -отделимости λ следует, что $\lambda \in \Lambda(G)$ [2].

Всюду в дальнейшем будем считать, что точкам $z_j \in \lambda$ приписаны некоторые веса $\delta_j = \delta(z_j) \geq 0$, причем $\Delta_k := \sum_j^{(k)} \delta_j < \infty$. Пусть $D_k := \sup\{\delta_j : \rho_j/\rho < 2^k\}$ ($\forall k \in \mathbb{Z}$) и $B_l := \sum_{k=l}^{\infty} 2^{-k/p} D_k$, где $1 < p < \infty$, $l \in \mathbb{Z}$. Определим (конечные или бесконечные) величины:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\rho; p, G, \lambda) &:= \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k 2^{k/q} \sum_{l=k}^{\infty} B_l^{p-1} (l+1-k)^2 \quad \left(p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right); \\ r_j(z) &:= \delta_j \rho_j^2 |z - z_j|^{-3}, \quad R(\rho; z) = R(\rho, q, G, \lambda; z) := \sum_{\rho_j \geq \rho} \rho_j^{1/q} r_j(z); \\ \mathbf{K}(p, G, \lambda) &:= \sup_{\rho > 0} \mathbf{K}(\rho; p, G, \lambda); \quad R(q, G, \lambda; z) := \lim_{\rho \rightarrow 0} R(\rho; z). \end{aligned} \quad (2)$$

ЛЕММА 1 [2]. Пусть $G \in \mathbf{A}$, $\varepsilon > 0$, $\lambda = \{z_j\} \in \Lambda(G)$, причем $\sup\{\rho_j : z_j \in \lambda\} / \inf\{\rho_j : z_j \in \lambda\} \leq 2$, $\Delta = \sum_j \delta(z_j) < \infty$. Тогда существует измеримое по Лебегу множество $\gamma_\varepsilon \subset \gamma = \partial G$ со свойствами:

- (i) $\text{mes}_1 \gamma_\varepsilon \leq \varepsilon$;
- (ii) $\forall z \in \gamma \setminus \gamma_\varepsilon \sum_j r_j(z) < A_1 \Delta \varepsilon^{-1}$.

В лемме 1 и ниже вспомогательные конечные положительные величины A, A_j зависят лишь от $G, S(\rho, \lambda), p$ и от указываемых аргументов.

ЛЕММА 2. Пусть $\rho > 0$, $p > 1$, $G \in \mathbf{A}$, $\lambda \in \Lambda(G)$. Тогда имеем следующую оценку нормы функции R в $\mathbf{L}^p(\gamma)$ ($\gamma = \partial G$):

$$\|R(\rho, q, G, \lambda; \cdot)\|_{p, \gamma} \leq A \mathbf{K}^{1/p}(\rho; p, G, \lambda) \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right). \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $l \in \mathbb{N}$ и $B_l \neq 0$. При $k \in \mathbb{N}$ положим $R_k(z) := \sum_j^{(k)} \rho_j^{1/q} r_j(z)$ (суммирование распространяется на точки $z_j \in \lambda_k(\rho)$). Пусть, далее, $\mathbf{M}_l(z) = \sum_{k=1}^l R_k(z)$, $\mathbf{N}_l(z) = R(\rho; z) - \mathbf{M}_l(z)$.

При каждом $k = 1, \dots, l$ оценим на границе области G отличные от 0 суммы R_k . Для этого во всех слагаемых, входящих в R_k , множители $\rho_j^{1/q}$ оценим сверху величиной $\rho^{1/q} 2^{k/q}$, а к сумме $\sum_j^{(k)} r_j(z)$ применим лемму 1 при $\varepsilon = \varepsilon_k^{(l)} := \rho \alpha_l (l+1-k)^{-2}$, где $\alpha_l = B_l^{-1} \sum_{k=1}^l 2^{k/q} \times (l+1-k)^2 \Delta_k$. Тогда вне соответствующего исключенного множества $\gamma_\varepsilon = \gamma_k^{(l)}$ будем иметь неравенство (ii): $R_k \leq A_1 \rho^{1/q} 2^{k/q} \Delta_k \rho^{-1} \alpha_l^{-1} (l+1-k)^2$. Просуммировав эти неравенства по всем $k = 1, \dots, l$, вне объединения $\gamma^{(l)} = \bigcup_{k=1}^l \gamma_k^{(l)}$ получим

$$\mathbf{M}_l(z) \leq A_1 \rho^{-1/p} \alpha_l^{-1} \sum_{k=1}^l 2^{k/q} (l+1-k)^2 \Delta_k = A_2 \rho^{-1/p} B_l.$$

Кроме того, для указанного объединения $\gamma^{(l)}$ получаем по свойству (i) леммы 1: $\text{mes}_1 \gamma^{(l)} \leq \sum_{k=1}^l \varepsilon_k^{(l)} < 2\rho\alpha_l$. Далее, непосредственно из определений величин $\mathbf{S}(\rho, \lambda)$, D_s получаем

$$\|\mathbb{N}_l\|_{\infty, \gamma} \leq \mathbf{S}(\rho, \lambda) \rho^{-1/p} \sum_{s=l}^{\infty} 2^{-(s-1)/p} D_s = 2^{1/p} \mathbf{S}(\rho, \lambda) \rho^{-1/p} B_l$$

и $\|R(\rho; \cdot)\|_{\infty, \gamma} \leq 2^{1/p} \mathbf{S}(\rho, \lambda) \rho^{-1/p} B_l$. Итак, опираясь на полученные оценки величин $\mathbf{M}_l$, $\mathbb{N}_l$, находим

$$\begin{aligned} \|R(\rho; \cdot)\|_{\infty, \gamma \setminus \gamma^{(l)}} &\leq A_3 \rho^{-1/p} B_l; \quad \|R(\rho; \cdot)\|_{p, \gamma}^p \leq \|R(\rho; \cdot)\|_{\infty, \gamma}^p \text{mes}_1 \gamma^{(1)} \\ &+ \sum_{l=1}^{\infty} \|R(\rho; \cdot)\|_{\infty, \gamma \setminus \gamma^{(l)}}^p \text{mes}_1 \gamma^{(l+1)} \leq A_4 \sum_{l=1}^{\infty} B_l^{p-1} \sum_{k=1}^l 2^{k/q} (l+1-k)^2 \Delta_k. \end{aligned}$$

Наконец, изменив в последнем выражении порядок суммирования, получим (3). Лемма 2 доказана.

Пусть $a > 0$. Последовательность чисел $d_s > 0$, $s \in \mathbb{Z}$, будем называть *a-регулярной*, если при всех целых l имеем $b_{l+1} := \sum_{s=l+1}^{\infty} d_s \leq \text{ad}_l$. Заметим, что из *a-регулярности* следуют неравенства:

$$\sum_{s=l}^{\infty} d_s^{\sigma} \leq A_1(a, \sigma) d_l^{\sigma}; \quad \sum_{s=l}^{\infty} (s+1-l)^2 d_s^{\sigma} \leq A_2(a, \sigma) d_l^{\sigma} \quad (\forall \sigma > 0). \quad (*)$$

Действительно, по определению *a-регулярности* находим $(1+1/a)^{s-1} b_{l+s} \leq \text{ad}_l$ ($\forall s \in \mathbb{N}$) и, значит, при некотором фиксированном натуральном $m = m(a)$ имеем $d_{l+mj} \leq b_{l+mj} \leq 2^{-j} d_l$ ($\forall j \in \mathbb{N}$). Пусть $n = l + jm$ и $n + m < k \leq n + 2m$. Тогда с учетом того, что $(n-l)/(k-l) \geq j/(j+2) \geq 1/3$ будем иметь $d_k \leq d_n \leq 2^{-(n+l)/m} d_l \leq q^{k-l} d_l$, где $k > l + 2m$ и $q = 2^{-1/(3m)} < 1$. Используя это при $k > l + 2m$, а при $k = l, \dots, l + 2m$ используя очевидные неравенства $d_k \leq \text{ad}_l$, получаем первое неравенство в (*). Из него после двукратного преобразования Абеля получается второе неравенство в (*).

ЛЕММА 3. Пусть выполнены условия леммы 2 и последовательность $2^{-s/p} D_s$ *a-регулярна* (при некотором $a > 0$). Тогда

$$\|R(q, G, \lambda; \cdot)\|_{p, \gamma}^p \leq A(a) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta_k D_k^{p-1}. \quad (4)$$

Если, кроме того, $\delta = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j < \infty$, то $\|R(q, G, \lambda; \cdot)\|_{p, \gamma} \leq A(a) \delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из замечаний перед леммой 3 (см. (*)) и из леммы 2 находим:

$$\|R(\rho, q, G, \lambda; \cdot)\|_{p, \gamma}^p \leq A \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k D_k^{p-1}.$$

Заменив здесь ρ на $\rho 2^{-N}$ и устремив N к ∞ , получим (4). Второе утверждение леммы очевидным образом получается из (4).

ЛЕММА 4 [2]. Пусть выполнены условия леммы 2 и $f \in \mathbf{E}^p$. Тогда

$$\sum \delta_j \rho_j^{1/p} |f(z_j)| \leq A \|f\|_p \|R(p, G, \lambda; \cdot)\|_{q, \gamma}. \quad (5)$$

2. ТЕОРЕМА. Пусть $G \in \mathbf{A}$, последовательность $\lambda = \{z_j\}_{j=1}^\infty \in \Lambda(G)$ состоит из попарно различных точек и заданы комплексные числа $\{a_j\}_{j=1}^\infty$. Тогда при $\delta_j = |a_j| \times |\mathbf{B}_{\lambda,j}(z_j)|^{-1}$ найдется функция $f \in \mathbf{E}^p$, $1 < p < \infty$, решающая задачу (1) и удовлетворяющая нормировке

$$\|f\|_p \leq A_1 \|R(q, G, \lambda; \cdot)\|_{p,\gamma} \leq A_2 \mathbf{K}^{1/p}(p, G, \lambda) \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right). \quad (6)$$

Далее, если последовательность $2^{-k/p} D_k$ a -регулярна (при некоторых $\rho > 0$, $a = a(\rho)$), то $\|f\|_p^p \leq A_3(a) \sum_{k=-\infty}^\infty \Delta_k D_k^{p-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно найти удовлетворяющее неравенству (6) решение для любого конечного числа n узлов интерполяции. В общем случае решение можно получить как предел некоторой последовательности из нормального семейства таких решений. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $f_0(z) := \mathbf{B}_\lambda(z) \sum_{j=1}^n a_j \rho_j^{-1/p} (\mathbf{B}_{\lambda,j}(z_j) \varphi'_j(z_j) (z - z_j))^{-1}$. Очевидно, f_0 решает конечную задачу (1). Далее нам понадобится оценка $|\varphi'_j(z_j)| \geq 1/(4\rho_j)$ (см., например, [6]). По принципу двойственности (см., например, [4], [5]), находим

$$\begin{aligned} V := \inf_{\varphi \in \mathbf{E}^p} \|f_0 - \mathbf{B}_\lambda \varphi\|_p &= \sup_{\theta \in \mathbf{E}^q, \|\theta\|_q \leq 1} \left| \int_\gamma f_0(\zeta) \mathbf{B}_\lambda^{-1}(\zeta) \theta(\zeta) d\zeta \right| \\ &\leq 8\pi \sup \left\{ \sum_{j=1}^n |\delta_j| \rho_j^{1/q} |\theta(z_j)| : \theta \in \mathbf{E}^q, \|\theta\|_q \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда, из леммы 4 и леммы 2 следует (6). Из (6) и из леммы 3 получается второе утверждение теоремы.

Сделаем некоторые замечания о точности теоремы. Если

$$\|R(q, G, \lambda; \cdot)\|_{p,\gamma} \cdot \|R(p, G, \lambda; \cdot)\|_{q,\gamma} \leq b \sum_j |a_j| \delta_j$$

при некотором $b > 0$, то $\|f\|_p \geq A_4(b) \|R(q, G, \lambda; \cdot)\|_{p,\gamma}$. Это непосредственно следует из сравнения (5) и (6). В простейшем случае $p = 2$ и a -регулярности последовательности $2^{-k/p} D_k$ для выполнения последнего неравенства достаточно потребовать, чтобы $\sum_k \Delta_k D_k \leq b \sum_j |a_j| \delta_j$ (см. (4)).

Далее, при $n \geq 4$ в единичном круге U для множества $\lambda = \{z_j\}_{j=1}^n = \{(1 - 1/n)e^{i2\pi(j-1)/n}\}_{j=1}^n$ минимальное решение задачи (1) при $|a_j| = 1$ удовлетворяет неравенству $\|f\|_p \geq A_5 \mathbf{K}^{1/p}(p, U, \lambda)$. Действительно, легко проверить, что $|\mathbf{B}_{\lambda,j}(z_j)| > 4/5$ и, значит, $\mathbf{K}(p, U, \lambda) < A_6 n$ ($A_6 = \text{const}$). Поэтому из (5), (4) для любой функции $f \in \mathbf{H}_p$ при $|f(z_j)| = n^{1/p}$ находим $\mathbf{K}(p, U, \lambda) < A_6 \sum \rho_j^{1/p} |f(z_j)| \leq A_7 \|f\|_p \mathbf{K}^{1/q}(p, U, \lambda)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pekarskii A. A. // Trudy Mat. Ins. Steklov. 1989. V. 190. P. 231–243.
2. Данченко В. И. // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 10. С. 33–52.
3. Shapiro H. S., Shields A. L. // Amer. J. Math. 1961. V. 83. P. 513–532.
4. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.
5. Кусис П. Введение в теорию пространств H^p . М.: Мир, 1984.
6. Данченко В. И. // Матем. сб. 1984. Т. 125(167). С. 181–198.