Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Б. Вакарчук, K -функционалы и точные значения n -поперечников некоторых классов из L_2 , *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 4, 494–499

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1192>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 02:20:41

УДК 517.5

K -ФУНКЦИОНАЛЫ И ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ n -ПОПЕРЕЧНИКОВ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ИЗ L_2

С. Б. Вакарчук

Получены точные значения различных n -поперечников классов 2π -периодических функций, K -функционалы r -х производных которых мажорируются функциями, удовлетворяющими определенным ограничениям. Приведены примеры мажорант, для которых все сформулированные в статье требования выполнены.

Библиография: 8 названий.

1. В настоящее время известен целый ряд содержательных результатов, связанных с вычислением точных значений n -поперечников функциональных классов, принадлежащих пространству измеримых 2π -периодических функций $L_2 = L_2(0, 2\pi)$ с нормой (см., например, [1]–[6])

$$\|f\| = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

В [3]–[5] были найдены точные значения колмогоровских n -поперечников классов функций, усредненные модули гладкости которых не превосходят заданных мажорант, удовлетворяющих некоторым ограничениям. В качестве конкретных примеров удалось построить только мажоранты следующих видов:

- 1) $x^{\alpha/2}$, где $\alpha = \alpha(m, \mu) = \mu\pi \sin^{2m}(\mu\pi/2) / \int_0^{\mu\pi} \sin^{2m}(t/2) dt$, $0 < \mu \leq 1$, $m \in \mathbb{N}$ [3];
- 2) x^γ , где $\gamma = \pi/(\pi - 2)$ [4];
- 3) x^β , где $1 + \pi^2/8 \leq \beta < 3$ [5].

Такой ограниченный выбор мажорирующих функций, по-видимому, связан со способами задания классов и вытекающими отсюда достаточно жесткими условиями для мажорант. Поэтому задачи построения функциональных классов на основе иных характеристик и вычисления для этих классов точных значений различных n -поперечников представляют определенный интерес.

2. В теории аппроксимации функций вещественного переменного часто используется идея замены произвольной функции f достаточно гладкой функцией g . Одна из наиболее эффективных ее реализаций основана на методе K -функционала Петре в теории интерполяционных пространств [7].

Пусть $W^j(L_2)$, $j \in \mathbb{N}$, – пространство Соболева, состоящее из функций $g(x) \in L_2$, у которых производная $(j-1)$ -го порядка $g^{(j-1)}(x)$ ($g^{(0)}(x) = g(x)$) абсолютно непрерывна, а $g^{(j)}(x) \in L_2$. Тогда K -функционал пары пространств $L_2, W^j(L_2)$ определяется следующим образом:

$$K_j(f, x) = K(f, x, L_2, W^j(L_2)) = \inf_{g(x) \in W^j(L_2)} \{\|f - g\| + x^j \|g^{(j)}\|\}, \quad x > 0,$$

и указывает, как хорошо функция $f(x) \in L_2$ может быть приближена функциями $g(x) \in W^j(L_2)$ с учетом величины $\|g^{(j)}\|$. Поскольку модуль гладкости j -го порядка функции $f(x) \in L_2$ и K -функционал связаны между собой двойным неравенством [8]

$$c_1 \omega_j(f, x) \leq K_j(f, x) \leq c_2 \omega_j(f, x),$$

где c_1 и c_2 – постоянные, зависящие только от j , это дает все основания использовать $K_j(f, x)$ наравне с $\omega_j(f, x)$ для определения различных классов функций.

Пусть $\mathbb{S}$ – единичный шар в L_2 ; $\mathfrak{M}$ – выпуклое центрально-симметричное подмножество из L_2 ; $\mathcal{L}_n \subset L_2$ – n -мерное подпространство; $\mathcal{L}^n \subset L_2$ – подпространство коразмерности n ; $\Lambda: L_2 \rightarrow \mathcal{L}_n$ – непрерывный линейный оператор, переводящий элементы пространства L_2 в $\mathcal{L}_n$; $\Lambda^\perp: L_2 \rightarrow \mathcal{L}_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования L_2 на подпространство $\mathcal{L}_n$. Величины

$$\begin{aligned} d_n(\mathfrak{M}, L_2) &= \inf_{\mathcal{L}_n \subset L_2} \sup_{f \in \mathfrak{M}} \inf_{\varphi \in \mathcal{L}_n} \|f - \varphi\|, \\ b_n(\mathfrak{M}, L_2) &= \sup_{\mathcal{L}_{n+1} \subset L_2} \sup_{\varepsilon > 0} \{\varepsilon \mathbb{S} \cap \mathcal{L}_{n+1} \subset \mathfrak{M}\}, \\ d^n(\mathfrak{M}, L_2) &= \inf_{\mathcal{L}^n \subset L_2} \sup_{f \in \mathfrak{M} \cap \mathcal{L}^n} \|f\|, \\ \delta_n(\mathfrak{M}, L_2) &= \inf_{\mathcal{L}_n \subset L_2} \inf_{\Lambda: L_2 \subset \mathcal{L}_n} \sup_{f \in \mathfrak{M}} \|f - \Lambda f\|, \\ \Pi_n(\mathfrak{M}, L_2) &= \inf_{\mathcal{L}_n \subset L_2} \inf_{\Lambda^\perp: L_2 \subset \mathcal{L}_n} \sup_{f \in \mathfrak{M}} \|f - \Lambda^\perp f\| \end{aligned}$$

называют соответственно *колмогоровским*, *бернштейновским*, *гельфандовским*, *линейным* и *проекционным n -поперечниками*. Поскольку пространство является гильбертовым, имеют место следующие соотношения (см., например, [2], [6]):

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) \leq d^n(\mathfrak{M}, L_2) \leq d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \delta_n(\mathfrak{M}, L_2) = \Pi_n(\mathfrak{M}, L_2). \quad (1)$$

Пусть $\Omega(x)$, $0 < x < \infty$, – положительная монотонно возрастающая функция такая, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Omega(x) = \Omega(0) = 0.$$

Через $W_{2,j}^r(\Omega)$ обозначим класс функций $f(x) \in W^r(L_2)$, r -е производные которых удовлетворяют условию $K_j(f^{(r)}, x) \leq \Omega(x)$ при любом $x > 0$.

Основным результатом данной работы является

ТЕОРЕМА. Если мажоранта $\Omega(x)$ для любых $0 < z \leq y < \infty$ удовлетворяет условию

$$\frac{\Omega(z)}{\Omega(y)} \geq \frac{z}{y}, \quad (2)$$

то для произвольного $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$p_{2n-1}(W_{2,j}^r(\Omega), L_2) = p_{2n}(W_{2,j}^r(\Omega), L_2) = n^{-r}\Omega(n^{-1}). \quad (3)$$

Здесь $p_n(\cdot)$ – любой из перечисленных выше n -поперечников.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись хорошо известным соотношением

$$\sup_{f(x) \in W^r(L_2)} \frac{E_n(f, L_2)}{E_n(f^{(r)}, L_2)} = n^{-r},$$

где $E_n(f, L_2) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{ \|f - T_{n-1}\| : T_{n-1}(x) \} = \|f - S_{n-1}(f)\|$ – наилучшее приближение $f(x) \in L_2$ тригонометрическими полиномами $T_{n-1}(x)$ порядка не выше $n - 1$, $S_{n-1}(f, x)$ – частичная сумма порядка $n - 1$ ряда Фурье функции $f(x)$, для произвольных $f(x) \in W_{2,j}^r(\Omega)$ и $g(x) \in W^j(L_2)$ запишем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} E_n(f, L_2) &\leq n^{-r} \|f^{(r)} - S_{n-1}(g)\| \leq n^{-r} (\|f^{(r)} - g\| + \|g - S_{n-1}(g)\|) \\ &\leq n^{-r} (\|f^{(r)} - g\| + n^{-j} \|g^{(j)}\|). \end{aligned} \quad (4)$$

Используя определение K -функционала и класса $W_{2,j}^r(\Omega)$, продолжим неравенство (4):

$$E_n(f, L_2) \leq n^{-r} K_j(f^{(r)}, n^{-1}) \leq n^{-r} \Omega(n^{-1}). \quad (5)$$

Из (1) и (4), (5) следует оценка сверху

$$\begin{aligned} p_{2n}(W_{2,j}^r(\Omega), L_2) &\leq p_{2n-1}(W_{2,j}^r(\Omega), L_2) \leq d_{2n-1}(W_{2,j}^r(\Omega), L_2) \\ &\leq \sup_{f(x) \in W_{2,j}^r(\Omega)} E_n(f, L_2) \leq n^{-r} \Omega(n^{-1}). \end{aligned} \quad (6)$$

Для получения оценки снизу рассмотрим бернштейновский n -поперечник

$$b_{2n}(W_{2,j}^r(\Omega), L_2).$$

Обозначая через $\mathcal{T}_{2n+1}$ пространство тригонометрических полиномов n -го порядка, полагаем $\tilde{\mathbb{S}}_{2n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mathbb{S}} \cap \mathcal{T}_{2n+1} = \{T_n(x) \in \mathcal{T}_{2n+1} : \|T_n\| \leq \tilde{\varepsilon}\}$, где $\tilde{\varepsilon} \stackrel{\text{def}}{=} n^{-r}\Omega(n^{-1})$, и покажем включение $\tilde{\mathbb{S}}_{2n+1} \subset W_{2,j}^r(\Omega)$.

Из определения K -функционала очевидно, что для любого полинома $T_n(x)$ справедливы неравенства

$$K_j(T_n, x) \leq \|T_n\|, \quad K_j(T_n, x) \leq x^j \|T_n^{(j)}\|. \quad (7)$$

Пусть вначале $n^{-1} \leq x < \infty$. Используя (7) и неравенство Бернштейна для тригонометрических полиномов $\|T_n^{(\nu)}\| \leq n^\nu \|T_n\|$, $\nu \in \mathbb{N}$, для всякого $T_n(x) \in \tilde{S}_{2n+1}$ получим

$$K_j(T_n^{(r)}, x) \leq \|T_n^{(r)}\| \leq n^r \|T_n\| \leq \Omega(n^{-1}) \leq \Omega(x).$$

В случае $0 < x \leq n^{-1}$ на основании аналогичных соображений и неравенства (2) для произвольного полинома $T_n(x) \in \tilde{S}_{2n+1}$ имеем

$$K_j(T_n^{(r)}, x) \leq x^j \|T_n^{(r+j)}\| \leq n^r (nx)^j \|T_n\| \leq nx \Omega(n^{-1}) \leq \Omega(x).$$

Таким образом, включение $\tilde{S}_{2n+1} \subset W_{2,j}^r(\Omega)$ доказано и, следовательно,

$$p_{2n}(W_{2,j}^r(\Omega), L_2) \geq b_{2n}(W_{2,j}^r(\Omega), L_2) \geq n^{-r} \Omega(n^{-1}). \quad (8)$$

Сравнивая соотношения (6) и (8), получим равенства (3), что и завершает доказательство теоремы.

В качестве следствия приведем одно экстремальное равенство, связанное с оценкой наилучших приближений функций.

Следствие 1. Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$\sup_{f(x) \in W^r(L_2)} \frac{E_n(f, L_2)}{K_j(f^{(r)}, n^{-1})} = n^{-r}. \quad (9)$$

Доказательство. Действительно, для произвольной $f(x) \in W^r(L_2)$ из (4), (5) имеем

$$\frac{E_n(f, L_2)}{K_j(f^{(r)}, n^{-1})} \leq n^{-r}. \quad (10)$$

Рассмотрим в $W^r(L_2)$ функцию $f_0(x) = \alpha_1 \cos nx + \beta_1 \sin nx$. Учитывая $E_n(f_0, L_2) = \|f_0\|$ и $K_j(f_0^{(r)}, n^{-1}) \leq \|f_0^{(r)}\| \leq n^r \|f_0\|$, можем записать

$$\frac{E_n(f_0, L_2)}{K_j(f_0^{(r)}, n^{-1})} \geq n^{-r}.$$

Отсюда на основании (10) получаем соотношение (9).

3. Рассмотрим далее вопрос, связанный с существованием мажорирующих функций, удовлетворяющих всем требованиям, сформулированным в п. 2.

Пример 1. Запишем функцию

$$\Omega_*(x) = x^\alpha \left(c_0 + \sum_{i=1}^m c_i x^{-\nu_i} \right)^\beta, \quad 0 < x < \beta,$$

где $0 \leq \beta < \alpha < 1$, $0 \leq c_i < \infty$, $0 \leq \nu_i \leq 1$ ($i = 1, \dots, m$), $0 < c_0 < \infty$, которая является положительной монотонно возрастающей и

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Omega_*(x) = 0.$$

Нетрудно убедиться в справедливости условия (2) для любых $0 < z \leq y < \infty$, поскольку

$$\frac{\Omega_*(z)}{\Omega_*(y)} = \left(\frac{z}{y} \right)^\alpha \left(\frac{c_0 + \sum_{i=1}^m c_i z^{-\nu_i}}{c_0 + \sum_{i=1}^m c_i y^{-\nu_i}} \right)^\beta \geq \left(\frac{z}{y} \right)^\alpha = \frac{z}{y}.$$

ПРИМЕР 2. Рассмотрим функцию

$$\Omega^*(x) = x^\alpha \ln(e^\gamma + ax^{-\beta}), \quad 0 < x < \infty,$$

где $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$, $\alpha^{-1} \leq \gamma < \infty$, $0 \leq a < \infty$. Очевидно, что $\Omega^*(x)$ – положительная монотонно возрастающая функция, для которой

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Omega^*(x) = 0$$

и выполнено ограничение (2).

Пусть $\varphi(x)$ – произвольная неотрицательная кусочно-непрерывная функция, определенная на полусегменте $[0, \infty)$ и имеющая конечное число точек разрыва первого рода.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим функцию

$$\Omega(\varphi, x) = x^{-\mu} \int_0^x \varphi(t) dt, \quad 0 < x < \infty,$$

где $0 < \mu < 1$. Свойства

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Omega(\varphi, x) = 0$$

и $\Omega(\varphi, x) > 0$ для всех $x > 0$ выполняются автоматически, но для удовлетворения условий $\Omega^{(1)}(\varphi, x) > 0$ для всех $x > 0$ и (2) необходимо на функцию $\varphi(x)$ наложить ряд ограничений. Рассмотрим два возможных варианта таких ограничений.

а) Пусть $\varphi(x)$ есть неубывающая функция, для значений которой на полусегменте $0 \leq x < \infty$ выполнено неравенство $Ax^\nu \leq \varphi(x) \leq Bx^\nu$, $0 < \nu \leq \mu$, где константы A и B удовлетворяют условию

$$\frac{B}{A} \leq \frac{1 + \mu}{1 + \nu}. \quad (11)$$

Тогда

$$\Omega^{(1)}(\varphi, x) = x^{-\mu} \left(\varphi(x) - \mu x^{-1} \int_0^x \varphi(t) dt \right) \geq x^{-\mu} (1 - \mu) \varphi(x) > 0.$$

Полагая

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^{-1} \Omega(\varphi, x) = x^{-(1+\mu)} \int_0^x \varphi(t) dt, \quad 0 < x < \infty,$$

оценим сверху производную $F^{(1)}(x)$ с учетом (11):

$$F^{(1)}(x) = x^{-(1+\mu)} \left(\varphi(x) - \frac{1 + \mu}{x} \int_0^x \varphi(t) dt \right) \leq x^{-\mu + \nu - 1} \left(B - A \frac{1 + \mu}{1 + \nu} \right) \leq 0.$$

Следовательно, $F(x)$ есть невозрастающая функция; и для любых чисел $0 < z \leq y < \infty$ имеем $F(z)/F(y) \geq 1$ или, что то же самое, $\Omega(\varphi, z)/\Omega(\varphi, y) \geq z/y$.

б) Пусть $q \leq \varphi(x) \leq Q$, $0 \leq x < \infty$, где константы q и Q удовлетворяют неравенству $\max\{\mu, 1/(1 + \mu)\} < q/Q \leq 1$. Тогда очевидно, что $\Omega^{(1)}(\varphi, x) \geq x^{-\mu} (q - \mu Q) > 0$ и $F^{(1)}(x) \leq x^{-(1+\mu)} (Q - (1 + \mu)q) < 0$, т.е. монотонно возрастающая функция $\Omega(\varphi, x)$ удовлетворяет условию (2).

Используя доказанную теорему и перечисленные здесь мажоранты, получим

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$, $0 \leq c_i < \infty$, $0 \leq \nu_i \leq 1$ ($i = 1, \dots, m$), $0 < c_0 < \infty$, $1/\alpha \leq \gamma < \infty$, $0 \leq a < \infty$, $0 < \mu < 1$ и функция $\varphi(x)$, обладающая указанными выше свойствами, удовлетворяет одному из ограничений а) или б). Тогда для любых натуральных чисел n и r справедливы равенства

$$\begin{aligned} p_{2n-1}(W_{2,j}^r(\Omega_*), L_2) &= p_{2n}(W_{2,j}^r(\Omega_*), L_2) = n^{-(r+\alpha)} \left(c_0 + \sum_{i=1}^m c_i n^{\nu_i} \right)^\beta, \\ p_{2n-1}(W_{2,j}^r(\Omega^*), L_2) &= p_{2n}(W_{2,j}^r(\Omega^*), L_2) = n^{-(r+\alpha)} \ln(e^\gamma + a n^\beta), \\ p_{2n-1}(W_{2,j}^r(\Omega(\varphi)), L_2) &= p_{2n}(W_{2,j}^r(\Omega(\varphi)), L_2) = n^{-r+\mu} \int_0^{n^{-1}} \varphi(t) dt, \end{aligned}$$

где $p_n(\cdot)$ – любой из n -поперечников, рассмотренных в п. 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Kolmogorov A. N. Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionsklassen // Ann. of Math. 1936. V. 37. P. 107–111.
- [2] Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. М.: МГУ, 1976.
- [3] Тайков Л. В. Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 // Матем. заметки. 1979. Т. 25. № 2. С. 217–223.
- [4] Тайков Л. В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Матем. заметки. 1976. Т. 20. № 3. С. 433–438.
- [5] Айнуллоев Н. Наилучшее приближение некоторых классов дифференцируемых функций в L_2 // Применение функционального анализа в теории приближений. Калинин, 1986. С. 3–10.
- [6] Pinkus A. n -Widths in Approximation Theory. Berlin: Springer, 1985.
- [7] Берг Й., Лёфстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
- [8] Schumaker L. L. Spline Functions. Basic Theory. New York: Wiley, 1981.

Институт геотехнической механики НАН Украины

Поступило
03.09.98