Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Дроздовский, В. В. Филиппов, Селекционная теорема для нового класса многозначных отображений, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 4, 503–507

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1193>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 16:31:30

УДК 515.126.83

СЕЛЕКЦИОННАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ НОВОГО КЛАССА МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

С. А. Дроздовский, В. В. Филиппов

Введен новый класс многозначных отображений, содержащий все полунепрерывные сверху и полунепрерывные снизу многозначные отображения. Для него доказана селекционная теорема, имеющая приложения к теории дифференциальных включений. Библиография: 5 названий.

В данной работе вводится новый класс многозначных отображений, включающий все полунепрерывные снизу и полунепрерывные сверху многозначные отображения. Доказывается селекционная теорема для этого класса.

1. Основные определения и результаты. Рассматриваемый класс многозначных отображений $\varphi: X \rightarrow \text{exr } Y$ определяется условием

- (*) для любой точки $x \in X$ и для любых открытого подмножества U пространства Y , содержащего множество $\varphi(x)$, и открытого подмножества V пространства Y , пересекающего множество $\varphi(x)$, существует окрестность W точки x такая, что для каждой точки $z \in W$ верно хотя бы одно из двух условий:

- 1) $\varphi(z) \subset U$;
- 2) $\varphi(z) \cap V \neq \emptyset$.

В случае, когда отображение φ компактнозначно, а пространство Y метризуемо, условие (*) можно заменить на условие

- (**) для любой точки $x \in X$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существует окрестность W точки x такая, что для каждой точки $z \in W$ выполняется хотя бы одно из двух условий:

- 1) $\varphi(z) \subset O_\varepsilon(\varphi(x))$;
- 2) $\varphi(x) \subset O_\varepsilon(\varphi(z))$,

где $O_\varepsilon(F)$ обозначает открытую ε -окрестность компакта F .

Основным результатом этой статьи является

ТЕОРЕМА 1. Пусть X – наследственно нормальный паракомпакт, Y – полное метрическое пространство, многозначное отображение $\varphi: X \rightarrow \text{exr}_c Y$ удовлетворяет условию (*). Тогда существует полунепрерывная сверху селекция $\psi: X \rightarrow \text{exr}_c Y$ отображения φ .

Теорема 1 имеет приложения к теории дифференциальных включений, а именно, при рассмотрении дифференциального включения $y' \in \varphi(t, y)$, правая часть которого компактнозначна и удовлетворяет условию (*), мы можем перейти к полунепрерывной сверху селекции ψ отображения φ . Дифференциальное включение $y' \in \psi(t, y)$ удовлетворяет условиям Дэви, и для него существует хорошо разработанная теория задачи

Коши (см., например, [1]). В частности, мы имеем теорему существования решения задачи Коши для включения $y' \in \psi(t, y)$. Это сразу дает нам теорему существования решения задачи Коши для исходного включения $y' \in \varphi(t, y)$.

С другой стороны, в теории дифференциальных включений есть достаточно известные утверждения, где правая часть частично полунепрерывна сверху, частично полунепрерывна снизу (см. [2]–[4]). Вводимый класс многозначных отображений может оказаться удобным инструментом в исследовании таких ситуаций, являясь здесь максимально широким. Однако, в рамках настоящей статьи мы не ставим целью продвижение в этом направлении.

Необходимость требования наследственной нормальности пространства X в теореме 1 показывает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть X – T_1 -пространство, $Y = \{0, 1\}$ – дискретное двоеточие. Если любое многозначное отображение из X в $\text{exp}_c Y$ со свойством (*) имеет полунепрерывную сверху селекцию, то пространство X наследственно нормально.

2. Предварительные утверждения. Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся две леммы.

ЛЕММА 1. Пусть пространство Z экстремально несвязно, пространство X наследственно нормально, пространство Y метризуемо, однозначное отображение $f: Z \rightarrow X$ непрерывно, многозначное отображение $\varphi: X \rightarrow \text{exp}_c Y$ удовлетворяет условию (*). Тогда

- i) в каждой точке $x \in Z$ $\theta(x) = \lim_{y \rightarrow x} \varphi f(y)$ непусто;
- ii) отображение $\theta: Z \rightarrow \text{exp}_c Y$ полунепрерывно снизу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. i) Покажем, что

$$\lim_{y \rightarrow x} \varphi f(y) \neq \emptyset$$

для любой точки $x \in Z$. Допустим противное:

$$\lim_{y \rightarrow x} \varphi f(y) = \emptyset$$

в некоторой точке $x \in Z$. Это значит, что каждая точка $y \in \varphi f(x)$ содержится в открытом множестве V'_y таком, что в любой окрестности $U \ni x$ найдется точка z , для которой $\varphi f(z) \cap V'_y = \emptyset$. Для каждого $y \in \varphi f(x)$ обозначим через V_y открытый шар с центром в y радиуса $\rho(y, Y \setminus V'_y)/2$, где ρ – метрика в пространстве Y . Из покрытия $\{V_y : y \in \varphi f(x)\}$ компакта $\varphi f(x)$ выберем конечное подпокрытие $\{V_i : i = 1, \dots, n\}$. В силу условия (*) найдется окрестность W точки x такая, что если $z \in W$, то $\varphi f(z) \subset \bigcup \{V_i : i \leq n\}$ или $\varphi f(z) \cap V_i \neq \emptyset$ для каждого $i \leq n$.

Для каждого $i \leq n$ обозначим через A_i множество $\{z \in W : \varphi f(z) \cap V'_i = \emptyset\}$. Семейство $\mathcal{A} = \{A_i : i \leq n\}$, очевидно, обладает следующими свойствами:

- а) для любого $A \in \mathcal{A}$: $x \notin A$, $x \in [A]$, $\bigcup \varphi f(A) \subset \bigcup \{V_i : i \leq n\}$;
- б) для каждого $i \leq n$ найдется элемент A семейства $\mathcal{A}$ такой, что $\rho(\bigcup \varphi f(A), V_i) > 0$.

Если при этом $n = 1$, то налицо противоречие. Таким образом, семейство $\mathcal{A}$ содержит более одного элемента: $n \geq 2$.

Если хотя бы для одной пары A, B различных элементов семейства $\mathcal{A}$ найдется окрестность U точки x , для которой $f(A \cap U) \cap [f(B \cap U)] = \emptyset = [f(A \cap U)] \cap f(B \cap U)$, то наследственная нормальность пространства X влечет существование непересекающихся открытых множеств U_A и U_B , содержащих $f(A \cap U)$ и $f(B \cap U)$ соответственно. Отсюда множества $f^{-1}(U_A) \supset A \cap U$ и $f^{-1}(U_B) \supset B \cap U$ открыты и дизъюнкты. Так как пространство Z экстремально несвязно, множества $[f^{-1}(U_A)]$ и $[f^{-1}(U_B)]$ тоже дизъюнкты, что противоречит свойству $[A \cap U] \cap [B \cap U] \ni \{x\}$. Поэтому для любой окрестности $U \ni x$ и любых $A, B \in \mathcal{A}$ множество $(f(A \cap U) \cap [f(B \cap U)]) \cup ([f(A \cap U)] \cap f(B \cap U))$ непусто. В силу (**) это означает, что при произвольно взятом $\varepsilon > 0$ существуют точки $y \in A \cap U$, $z \in B \cap U$, для которых выполняется хотя бы одно из двух условий:

- 1) $\varphi f(y) \subset O_\varepsilon(\varphi f(z))$;
- 2) $\varphi f(z) \subset O_\varepsilon(\varphi f(y))$.

Пусть $A, B \in \mathcal{A}$, $A \neq B$. Положим

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min \{ \rho(\cup \varphi f(A), V_i), \rho(\cup \varphi f(B), V_i) : \\ \rho(\cup \varphi f(A), V_i) > 0, \rho(\cup \varphi f(B), V_i) > 0, i = 1, \dots, n \}.$$

Обозначим множество пар (y, z) , $y \in A$, $z \in B$, для которых выполняется условие 1), через P_1 , а множество пар, для которых выполняется условие 2), через P_2 . Из сказанного выше следует, что $[P_1]_{Z \times Z} \cup [P_2]_{Z \times Z} \ni (x, x)$.

Пусть для определенности $[P_1]_{Z \times Z} \ni (x, x)$. Определим множество $\tilde{A}$ как проекцию множества P_1 в произведении $Z \times Z$ на первый сомножитель. Заменяем в семействе $\mathcal{A}$ элемент A на $\tilde{A}$. Очевидно, что при этом свойство а) останется в силе. Кроме того, если $\rho(\cup \varphi f(B), V_i) > 0$ при некотором $i \leq n$, то $\rho(\cup \varphi f(\tilde{A}), V_i) > 0$ – так было выбрано число ε . Поэтому мы можем удалить из системы $\mathcal{A}$ элемент B , сохранив выполнение свойств а), б). Продолжая далее точно так же изменять систему $\mathcal{A}$, мы получим через конечное число шагов семейство, состоящее из одного элемента, обладающее свойствами а), б). Как было отмечено в начале рассуждения, такое невозможно. Полученное противоречие доказывает утверждение i) леммы.

ii) Докажем, что отображение θ полунепрерывно снизу в произвольно взятой точке $x \in Z$. Пусть $y \in \theta(x)$ и $V \ni y$ – открытое множество. Нам необходимо доказать существование окрестности U точки x такой, что $\theta(z) \cap V \neq \emptyset$ для любой точки $z \in U$. Пользуясь регулярностью Y , положим $y \in W \subset [W] \subset V$, где W – некоторое открытое множество. Так как $y \in \varprojlim_{z \rightarrow x} \varphi(z)$, существует открытое множество $U \ni x$ такое, что $\varphi(z) \cap W \neq \emptyset$ для каждой точки $z \in U$. Покажем, что U является искомой окрестностью.

Сначала докажем, что отображение $\psi: U \rightarrow \exp[W]$, определяемое формулой $\psi(z) = \varphi(z) \cap [W]$, удовлетворяет условию (*). Пусть $z_0 \in U$, H и G – открытые в $[W]$ подмножества и $H \supset \psi(z_0)$, $G \cap \psi(z_0) \neq \emptyset$. Поскольку φ удовлетворяет условию (*), существует окрестность S точки z_0 , для каждой точки z которой имеет место соотношение $\varphi(z) \subset H \cup (Y \setminus [W])$ или $\varphi(z) \cap (G \cap W) \neq \emptyset$. Значит, $\psi(z) \subset H$ или $\psi(z) \cap G \neq \emptyset$ для каждой точки $z \in S \cap U$.

Мы выяснили, что отображение ψ удовлетворяет условию (*). Согласно i)

$$\varprojlim_{z \rightarrow z_0} \psi(z) \neq \emptyset$$

для $z_0 \in U$. При этом

$$\varliminf_{z \rightarrow z_0} \psi(z) \subset V, \quad \varliminf_{z \rightarrow z_0} \psi(z) \subset \varliminf_{z \rightarrow z_0} \varphi(z).$$

Следовательно,

$$\theta(z_0) \cap V \supseteq \varliminf_{z \rightarrow z_0} \psi(z) \neq \emptyset.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть Z – паракомпакт, X – топологическое пространство, Y – полное метрическое пространство, однозначное отображение $f: Z \rightarrow X$ совершенно, $\varphi: X \rightarrow \operatorname{exr} Y$ – многозначное отображение, $\theta: Z \rightarrow \operatorname{exr} Y$ – полунепрерывная снизу селекция отображения φf . Тогда существует полунепрерывная сверху селекция $\psi: X \rightarrow \operatorname{exr}_c Y$ отображения φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно компактнозначной теореме Майкла о селекциях [5] существует полунепрерывная сверху компактнозначная селекция η отображения θ . Докажем, что отображение $\psi = \eta f^{-1}$ компактнозначно и является полунепрерывной сверху селекцией для φ .

Поскольку η есть селекция отображения θ , а θ есть селекция для φf , то $\eta f^{-1} \subset \theta f^{-1} \subset \varphi f f^{-1} = \varphi$, т.е. ψ является селекцией отображения φ .

Так как f совершенно, для каждой точки $x \in X$ $f^{-1}(x)$ – компакт; а вследствие того, что η компактнозначно и полунепрерывно сверху, $\eta f^{-1}(x)$ тоже компактно.

Из замкнутости отображения f следует полунепрерывность сверху многозначного отображения f^{-1} . Отображения η и f^{-1} полунепрерывны сверху; следовательно, отображение ηf^{-1} тоже полунепрерывно сверху. Доказательство леммы завершено.

3. Доказательство теорем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Тихоновское пространство X имеет абсолют $A(X)$, который экстремально несвязен. Соответствующее отображение $\pi_X: A(X) \rightarrow X$ совершенно. Так как X – паракомпакт, $A(X)$ также является паракомпактом.

Пространства $A(X)$, X , Y и отображения π_X , φ удовлетворяют условиям леммы 1. Следовательно, существует полунепрерывная снизу селекция $\theta: A(X) \rightarrow \operatorname{exr}_c Y$ отображения $\varphi \pi_X$. Поэтому для пространств $A(X)$, X , Y и отображений π_X , φ , θ выполняются условия леммы 2, из которой следует существование полунепрерывной сверху компактнозначной селекции ψ отображения φ , в чем и состоит утверждение теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть подмножества A и B пространства X отделены, т.е. $([A] \cap B) \cup (A \cap [B]) = \emptyset$. Зададим многозначное отображение $\varphi: X \rightarrow \operatorname{exr}_c Y$ следующим образом: $\varphi(A) = \{0\}$, $\varphi(B) = \{1\}$, $\varphi(X \setminus (A \cup B)) = \{0, 1\}$. Нетрудно проверить, что отображение φ удовлетворяет условию (*). Следовательно, φ обладает полунепрерывной сверху селекцией ψ , $\psi(A) = \{0\}$, $\psi(B) = \{1\}$. В силу полунепрерывности сверху $\{x \in X : \psi(x) \subset \{0\}\}$ и $\{x \in X : \psi(x) \subset \{1\}\}$ являются дизъюнктивными открытыми множествами, содержащими A и B соответственно. Это доказывает наследственную нормальность X .

4. Следствия из теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть X – наследственно нормальный паракомпакт, X_0 – его замкнутое подмножество, Y – полное метрическое пространство, многозначное отображение $\varphi: X \rightarrow \operatorname{exr}_c Y$ полунепрерывно снизу. Тогда всякая полунепрерывная сверху селекция $\psi: X_0 \rightarrow \operatorname{exr}_c Y$ отображения $\varphi|_{X_0}$ продолжается на все X до полунепрерывной сверху компактнозначной селекции отображения φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение $\lambda: X \rightarrow \exp_e Y$ такое, что $\lambda|_{X_0} \equiv \psi$, $\lambda|_{X \setminus X_0} \equiv \varphi$. Отображение λ очевидным образом удовлетворяет условию (*). Согласно теореме 1 у этого отображения существует полунепрерывная сверху компактнозначная селекция θ . Нетрудно проверить, что отображение $\bar{\psi}: X \rightarrow \exp_e Y$, определяемое соотношениями $\bar{\psi}|_{X_0} \equiv \psi$, $\bar{\psi}|_{X \setminus X_0} \equiv \theta$, полунепрерывно сверху и потому является искомым продолжением.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если в условиях следствия 1 отказаться от замкнутости множества X_0 , но предположить дополнительно локальную компактность пространства Y и непрерывность отображения φ , то утверждение следствия 1 останется в силе.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in [X_0]$. Так как Y локально компактно, существует открытое множество $V \supset \varphi(x)$, замыкание которого компактно. Для некоторой окрестности U точки x $\varphi(U) \subset V$.

Рассматривая ограничение отображений φ и ψ на множество U , нетрудно заметить, что множество $\overline{\lim}_{y \rightarrow x} \psi(y)$ непусто и компактно и

$$\overline{\lim}_{y \rightarrow x} \left(\overline{\lim}_{z \rightarrow y} \psi(z) \right) = \overline{\lim}_{y \rightarrow x} \psi(y).$$

Кроме того, очевидно, что

$$\overline{\lim}_{y \rightarrow x} \psi(y) \subset \overline{\lim}_{y \rightarrow x} \varphi(y) = \varphi(x),$$

а для $x \in X_0$ справедливо

$$\overline{\lim}_{y \rightarrow x} \psi(y) = \psi(x).$$

Таким образом, отображение $\tilde{\psi}: [X_0] \rightarrow \exp_e Y$, которое задается формулой

$$\tilde{\psi}(x) = \overline{\lim}_{y \rightarrow x} \psi(y),$$

является полунепрерывной сверху селекцией отображения $\varphi|_{[X_0]}$, продолжающей селекцию ψ . Следовательно, мы можем применить следствие 1 к X , $[X_0]$, Y , φ и $\tilde{\psi}$. В результате мы получим продолжение $\bar{\psi}$ селекции $\tilde{\psi}$ на все X , которое будет искомым продолжением для ψ .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Филиппов В. В. Пространства решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд. МГУ, 1993.
- [2] Aversa D., Marano S. A. Existence of solutions for operator inclusions: A unified approach // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. (to appear).
- [3] Bressan A. Upper and lower semicontinuous differential inclusions: A unified approach // Nonlinear Controllability and Optimal Control / ed. H. J. Sussman. Pure Appl. Math. V. 133. New York: Dekker, 1990. P. 21–31.
- [4] Łojasiewicz S. Some theorems of Scorza Dragoni type for multifunctions with application to the problem of existence of solutions for differential multivalued equations // Mathematical Control Theory / ed. C. Olech, B. Jakubczyk, J. Zabczyk. Banach Center Publ. V. 14. Warsaw.: PWN, 1985. P. 625–643.
- [5] Michael E. A theorem on semi-continuous set-valued functions // Duke Math. J. 1959. V. 26. № 4. P. 647–652.