Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Лукашов, Неравенство типа Бернштейна для производных рациональных функций на двух отрезках, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 4, 508–514

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1194>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 13:47:30

УДК 517.518.86

НЕРАВЕНСТВО ТИПА БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ НА ДВУХ ОТРЕЗКАХ

А. Л. Лукашов

В работе получено неравенство для производных рациональных функций с фиксированным знаменателем, обобщающее неравенство В. С. Виденского на случай двух отрезков. Для доказательства его асимптотической точности используется одно новое представление дробей Ахизера–Золотарёва, наименее уклоняющихся от 0 на двух отрезках.

Библиография: 15 названий.

1. Введение. Пусть $A_n = \{a_1, \dots, a_n\}$ – строка обратных величин полюсов, $1/a_i \in \mathbb{C} \setminus E$, $i = 1, \dots, n$, $E = [-1, a] \cup [b, 1]$, $-1 < a < b < 1$, причем для $\text{Im } a_i > 0$ справедливо равенство $a_{i+1} = \bar{a}_i$. Через $\mathcal{R}(A_n)$ будем обозначать класс рациональных функций вида

$$\frac{x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n}{\prod_{i=1}^n (1 - a_i x)}, \quad b_i \in \mathbb{R}.$$

Основная цель данной работы – получить асимптотически точную оценку производных типа неравенства Бернштейна дроби $R_n(x)$, если известна норма $\|R_n\|_{C(E)}$. Для определенности будем считать, что $a_1 = \dots = a_\kappa = 0$ и $a_i \neq 0$ для $i = \kappa + 1, \dots, n$, $\kappa > 0$. Получен следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $R_n(x)$ – рациональная функция описанного выше вида, причем $A_n \subset \{z : |z| < 1\}$. Кроме того, предположим, что все действительные нули функции $R_n(x)$ удовлетворяют неравенству $|x| < \min_{\kappa \leq i \leq n} |1/a_i|$. Тогда для $x \in (-1, a)$

$$|R'_n(x)| \leq \frac{\|R_n\|_{C(E)}}{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{x-b}{x-a}} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\sqrt{1-a_j^2}}{1-a_j x} \sqrt{\frac{1-a_j a}{1-a_j b}} \right|, \quad (1)$$

а для $x \in (b, 1)$

$$|R'_n(x)| \leq \frac{\|R_n\|_{C(E)}}{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{x-a}{x-b}} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\sqrt{1-a_j^2}}{1-a_j x} \sqrt{\frac{1-a_j b}{1-a_j a}} \right|. \quad (2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-01120.

Отметим, что при $a_j = 0$, $j = 1, \dots, n$, утверждение теоремы совпадает с результатом П. Б. Борвейна [1] (см. также [2]), а при $a = b$ неравенства (1) и (2) перейдут в неравенство В. С. Виденского [3] (см. также [4], [5]). Для $E = \{z : |z| = 1\}$ и E , являющегося простой замкнутой спрямляемой кривой, ограничивающей односвязную область, аналогичные утверждения получены А. А. Пекарским [6] (см. также [7]). Весьма общее неравенство несколько иного типа для оценки производных рациональных функций получено В. И. Данченко [8]. Хорошим обзором результатов по этой тематике и связанным с ней задачам служат также [9, гл. 10] и [10]. Предварительный вариант данной статьи был изложен в [11].

2. Вспомогательные утверждения. В дальнейшем будем использовать следующие обозначения для эллиптических функций Якоби:

$$K = K(k) = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

— полный эллиптический интеграл первого рода, соответствующий модулю k , $0 < k < 1$; $K' = K(k')$, где $k' = \sqrt{1-k^2}$; $H(u)$, $\Theta(u)$, $H_1(u)$, $\Theta_1(u)$ — тэта-функции в обозначениях Якоби с параметром $h = \exp(-\pi K'/K)$; $\operatorname{sn} u = \operatorname{sn}(u; k)$, $\operatorname{cn} u = \operatorname{cn}(u; k)$, $\operatorname{dn} u = \operatorname{dn}(u; k)$ — функции Якоби с параметром k .

Назовем строку A_n *регулярной* относительно E , если величина

$$\varphi(A_n, k, a) = \frac{1}{K} \int_0^{\sqrt{(1-a)/2}} \sum_{l=1}^n \frac{\sqrt{(1+a_l)(1-aa_l)} du}{\sqrt{(1-aa_l - (1+a_l)u^2)(1-aa_l - k^2(1+a_l)u^2)}}$$

принимает целое значение при $k^2 = 2(b-a)/((1-a)(1+b))$. Задачей Чебышева–Маркова для E называют проблему нахождения функции $R \in \mathcal{R}(A_n)$, доставляющей минимум в

$$\|R\|_{C(E)} \rightarrow \min_{R \in \mathcal{R}(A_n)}. \quad (3)$$

Для $E = [-1, 1]$ задача была решена П. Л. Чебышевым и, более полно, А. А. Марковым. Для $E = [-1, a] \cup [b, 1]$ Н. И. Ахиезер [12] решил ряд задач, тесно связанных с (3), но в явном виде (3) не рассматривал. Первое явное решение в одном частном случае в связи с задачами электротехники содержится в [13], где отмечалось, что оно фактически совпадает с дробями Е. И. Золотарёва, поэтому далее соответствующие функции будут называться *функциями Ахиезера–Золотарёва*.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\varphi(A_n, k, a) = m \in \mathbb{N}$. Тогда рациональная функция $R(A_n, E, x)$, решающая задачу (3), может быть представлена в виде

$$R(A_n, E, x) = M_n \left(\prod_{l=1}^n \frac{H(u - \rho_l)}{H(u + \rho_l)} + \prod_{l=1}^n \frac{H(u + \rho_l)}{H(u - \rho_l)} \right), \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} x &= \frac{\operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 \rho_0 + \operatorname{cn}^2 u \operatorname{sn}^2 \rho_0}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 \rho_0}; \\ \operatorname{sn}^2 \rho_l &= \frac{(1-a)(1+a_l)}{2(1-aa_l)}, \quad l = 0, 1, \dots, n; \quad -K' < \operatorname{Im} \rho_l < K', \quad l = 1, \dots, n; \\ -K < \operatorname{Re} \rho_l < 0, \quad l &= 0, 1, \dots, n; \quad \operatorname{Im} a_l > 0 \implies \rho_l = \bar{\rho}_{l+1}; \\ M_n &= \frac{\varepsilon}{\prod_{l=\kappa+1}^n a_l} \prod_{l=\kappa+1}^n \frac{H(\rho_0 + \rho_l)}{H(\rho_0 - \rho_l)} \left(\frac{\Theta^2(0)\Theta_1^2(0)}{2\Theta_1^2(\rho_0)\Theta^2(\rho_0)} \right)^\varkappa, \quad \varepsilon = \pm 1; \end{aligned} \quad (5)$$

либо в виде

$$R(A_n, E, x) = M_n(-1)^{n-n_3-n_2} \times \cos \int_{-1}^x \sum_{l=1}^n \frac{(x-c_l) \sqrt{(1-a_l^2)(1-a_l a)(1-a_l b)}}{(1-a_l x)(1-a_l c_l) \sqrt{(1-x^2)(x-a)(x-b)}} dx, \quad (6)$$

где M_n определяется из равенства (5), а

$$c_l = \frac{\sqrt{1-a_l a} \Theta'(\rho_l) \sqrt{(1-a)(1+b)} - a \Theta(\rho_l) \sqrt{(1-a_l^2)(1-a_l b)}}{a_l \sqrt{1-a_l a} \Theta'(\rho_l) \sqrt{(1-a)(1+b)} - \Theta(\rho_l) \sqrt{(1-a_l^2)(1-a_l b)}}, \quad l = 1, \dots, n; \quad (7)$$

причем $a < c_l < b$ для $\text{Im } a_l = 0$; c_l лежит на дуге окружности, проходящей через a, b и $1/a_l$, ограниченной точками a и b и не содержащей $1/a_l$, при $\text{Im } a_l > 0$, $l = 1, \dots, n$ (в этом случае $c_{l+1} = \bar{c}_l$).

Подробное доказательство теоремы содержится в [11]. При этом формулы (4)–(7) доказываются вполне аналогично соответствующим утверждениям работы [12]. Ради полноты рассуждений приведем лишь доказательство геометрической характеристики числа c_l .

ЛЕММА 1. Для всех $\rho \in \mathbb{C}$ справедливо неравенство

$$\text{Re} \frac{k^2 \text{sn } \rho \text{ cn } \rho}{\text{dn } \rho} < \text{Re} \frac{\Theta'(\rho)}{\Theta(\rho)} < 0. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По формуле из [14, гл. 21, пример 15] имеем

$$\begin{aligned} \frac{\Theta'(\rho)}{\Theta(\rho)} + \frac{\Theta'(\bar{\rho})}{\Theta(\bar{\rho})} &= \frac{2\pi}{K} \sum_{n=1}^{\infty} h^{2n-1} \text{Re} \frac{\sin(\pi \rho / K)}{1 - 2h^{2n-1} \cos(\pi \rho / K) + h^{4n-2}}, \\ \frac{\Theta'_1(\rho)}{\Theta_1(\rho)} + \frac{\Theta'_1(\bar{\rho})}{\Theta_1(\bar{\rho})} &= -\frac{2\pi}{K} \sum_{n=1}^{\infty} h^{2n-1} \text{Re} \frac{\sin(\pi \rho / K)}{1 + 2h^{2n-1} \cos(\pi \rho / K) + h^{4n-2}}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} &\text{Re} \frac{\sin(\pi \rho / K)}{1 \pm 2h^{2n-1} \cos(\pi \rho / K) + h^{4n-2}} \\ &= \frac{\sin(\pi \text{Re } \rho / K) \text{ch}(\pi \text{Im } \rho / K)(1 + h^{4n-2}) \pm 4h^{2n-1} \sin(\pi \text{Re } \rho / K) \cos(\pi \text{Re } \rho / K)}{|1 \pm 2h^{2n-1} \cos(\pi \rho / K) + h^{4n-2}|^2} < 0 \end{aligned}$$

при $-K < \text{Re } \rho < 0$, справедливы неравенства

$$\text{Re} \frac{\Theta'(\rho)}{\Theta(\rho)} < 0, \quad \text{Re} \frac{\Theta'_1(\rho)}{\Theta_1(\rho)} > 0.$$

Учитывая представление $\Theta_1(\rho) = \text{dn } \rho \Theta(\rho) / \sqrt{k'}$, получаем утверждение леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для $-K < \rho < 0$ неравенство (8) было доказано в работе [12, с. 1184].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Из неравенства (8) получаем, что

$$0 > \operatorname{Re} \frac{\Theta'(\rho_l)}{\Theta(\rho_l)} > -\operatorname{Re} \frac{b-a}{\sqrt{(1-a)(1+b)}} \sqrt{\frac{1-a_l^2}{(1-a_la)(1-a_lb)}}, \quad l = 1, \dots, n.$$

Для $\operatorname{Im} a_l = 0$ из (8) по теореме Лагранжа получаем, что

$$\begin{aligned} & \frac{(x-a)\sqrt{(1-a_l^2)(1-a_lb)}}{(1-a_lx)\sqrt{1-a_la}} + \frac{\Theta'(\rho_l)}{\Theta(\rho_l)} \sqrt{(1-a)(1+b)} \\ &= \frac{(x-c_l)\sqrt{(1-a_l^2)(1-a_la)(1-a_lb)}}{(1-a_lx)(1-a_lc_l)}, \end{aligned}$$

где $a < c_l < b$. Если же $\operatorname{Im} a_l \neq 0$, то, записав (7) и используя (8), найдем, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{(x-a)\sqrt{(1-a_l^2)(1-a_lb)}}{(1-a_lx)\sqrt{1-a_la}} &> \operatorname{Re} \frac{(x-c_l)\sqrt{(1-a_la)(1-a_lb)(1-a_l^2)}}{(1-a_lx)(1-a_lc_l)} \\ &> \operatorname{Re} \frac{(x-b)\sqrt{(1-a_l^2)(1-a_la)(1-a_lb)}}{(1-a_lx)(1-a_lb)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Зафиксируем $x \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{l=\kappa+1}^n \{1/a_l\}$ и обозначим

$$z_{l,x} = \frac{\sqrt{(1-a_la)(1-a_lb)(1-a_l^2)}}{1-a_lx}.$$

Тогда неравенство (9) означает, что точка $(x-c_l)z_{l,x}/(1-a_lc_l)$ лежит в вертикальной полосе, ограниченной прямыми, проходящими через точки $(x-a)z_{l,x}/(1-a_la)$ и $(x-b)z_{l,x}/(1-a_lb)$. Применяя далее дробно-линейное отображение

$$w(z) = \frac{z_{l,x}x - z}{z_{l,x} - a_lz},$$

получим, что точка c_l лежит между окружностями, касающимися друг друга в точке $1/a_l$ и проходящими через точки a и b соответственно ортогонально окружности, проходящей через точки

$$\frac{z_{l,x}x - a}{z_{l,x} - a_la}, \quad \frac{1}{a_l}, \quad \frac{z_{l,x}x - b}{z_{l,x} - a_lb}.$$

Так как c_l от x не зависит, а x произвольно, то c_l должно принадлежать геометрическому месту точек, находящихся между любыми двумя касающимися друг друга в точке $1/a_l$ окружностями, проходящими через точки a и b соответственно. Применяя отображение

$$w_1 = \frac{w(1-a_lb - a_la) - a_lab}{1-a_lw},$$

получим, что точка $w_1(c_l)$ должна принадлежать геометрическому месту точек, находящихся между любыми двумя параллельными прямыми, проходящими через a и b , т.е. интервалу (a, b) . После применения обратного отображения

$$w = \frac{w_1 - a_lab}{w_1a_l + 1 - a_la - a_lb}$$

получим требуемое.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Другая форма представления (4) приведена в [15].

ЛЕММА 2. Пусть $E \subset K$ – произвольное бесконечное компактное множество и $\zeta \in \mathbb{R}$. Предположим, что функция $R_n \in \mathcal{R}(A_n)$ такая, что

$$\frac{|R'_n(\zeta)|}{\|R_n\|_{C(E)}} = \max_{q_n \in \mathcal{R}(A_n)} \frac{|q'_n(\zeta)|}{\|q_n\|_{C(E)}}.$$

Тогда существуют α и β такие, что

$$R_n(x) = \frac{\alpha x^n + \beta x^{n-1} + s_{n-2}(x)}{\prod_{l=1}^n (1 - a_l x)},$$

где $s_{n-2}(x)/\prod_{l=1}^n (1 - a_l x)$ есть наилучшая чебышевская аппроксимация функции $(\alpha x^n + \beta x^{n-1})/\prod_{l=1}^n (1 - a_l x)$ на E .

Доказательство леммы дословно повторяет рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 3 из [1] (для случая $A_n = \{0, 0, \dots, 0\}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Сначала предположим, что $R_n \in \mathcal{R}_{2,n}$ (т.е. $a_i \neq a_j$, $i \neq j$) и все нули R_n удовлетворяют неравенству

$$x < \min_{1 \leq l \leq n} \operatorname{Re} \frac{1}{a_l}.$$

Пусть $E = [-1, a] \cup [b, 1]$ и $\tau \in E$. Пусть $R_n \in \mathcal{R}_{2,n}$ удовлетворяет равенству

$$|R'_n(\tau)| = \max_{\substack{q_n \in \mathcal{R}_{2,n} \\ q_n \neq 0}} \frac{|q'_n(\tau)|}{\|q_n\|_{C(E)}}$$

и $\|R_n\|_{C(E)} = 1$. Тогда нетрудно показать, как это было сделано в доказательстве теоремы 3 из [1], что все нули R_n лежат на E , быть может за исключением $\lambda_1 \in (a, b)$ и $\lambda_2 > 1$ или $\lambda_2 < -1$. Предположим, что $\lambda_2 > 1$. Кроме того, без ограничения общности можно считать, что для $y \in \{-1, a, b, 1\}$ $|R_n(y)| = 1$, $|R'_n(y)| \neq 0$ и для $y \in (a, b)$ $|R_n(y)| > 1$. Будем считать также, что все a_l различны. Таким образом, можно найти точки $a < \varepsilon_1 < \delta_1 < \lambda_1 < \delta_2 < \varepsilon_2 < b$ и $1 < \varepsilon_3 < \delta_3 < \lambda_2 < \delta_4$, $\lambda_2 < \min_{1 \leq l \leq n} \operatorname{Re}(1/a_l)$ такие, что $R'_n(\varepsilon_i) = 0$, $i = 1, 2, 3$, и $|R_n(\delta_i)| = 1$, $i = 1, 2, 3, 4$. Используя неравенства

$$\begin{aligned} \left| \frac{(x - \varepsilon_3)^2}{(x - \delta_3)(x - \delta_4)} \right| &< 1 \quad \text{при } x \leq 1, \\ \left| \frac{(x - \varepsilon_1)^2}{(x - \delta_1)(x - \delta_2)} \right| &< 1 \quad \text{при } x \in (-1, a), \\ \left| \frac{1}{a_l} - \varepsilon_2 \right| &> \left| \frac{1}{a_l} - b \right|, \quad l = 1, \dots, n, \\ |x - \varepsilon_2| &< |x - b|, \quad x \in (-1, a), \end{aligned}$$

получим оценку (1).

По непрерывности требование отличия полюсов $1/a_l$ друг от друга и от бесконечности можно снять. Тем самым, неравенство (1) из теоремы 1 будет доказано для $A_n \subset \{z : |z - 1/2| < 1/2\}$ и рациональных функций с нулями на $\mathbb{C} \setminus [\min_l \operatorname{Re}(1/a_l), +\infty)$.

Перейдем к общему случаю. Очевидно, что множество $\{1/a_l, l = \varkappa, \dots, n\}$ можно считать расположенным вне некоторой окружности с центром на действительной оси, проходящей через точку $x = 1$ и содержащей внутри себя полуинтервал $[-1, 1)$. Эта окружность пересекает действительную ось, помимо точки $x = 1$, в точке $x = -\alpha$, $\alpha = \min_{\varkappa \leq l \leq n} |a_l|^{-1}$. Применение отображения

$$w = \frac{z(1 - a'a) + a' - a}{z(a' - a) + 1 - a'a},$$

где $a' = (1 + \alpha a)/(\alpha + a)$, сводит доказательство (1) к рассмотренному случаю. Поскольку при этом преобразовании внешность круга $|z| = \alpha$ перейдет в $\{w : \operatorname{Re} w > (1 + \alpha^2)/(2\alpha)\}$, неравенство (1) полностью доказано. Неравенство (2) доказывается аналогично.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Теорема 1 асимптотически точна на рассматриваемом классе строк обратных величин полюсов.

Действительно, если все a_l равны между собой, $a_l = \alpha_n, l = 1, \dots, n$, то условие регулярности строки A_n превратится в условие $\rho_l = -pK/n, l = 1, \dots, n$, где

$$\operatorname{sn}^2 \rho_l = \frac{(1 - a)(1 + \alpha_n)}{2(1 - a\alpha_n)}.$$

Полагая теперь $p = n - 1$, определим α_n из равенства

$$\frac{(1 - a)(1 + \alpha_n)}{2(1 - a\alpha_n)} = \operatorname{sn}^2 \frac{(n - 1)K}{n}.$$

Так как правая часть этого равенства при $n \rightarrow \infty$ стремится к 1, то и левая часть стремится к 1, т.е. $\alpha_n \rightarrow 1$. Тогда производная дроби Чебышева–Маркова, построенной по соответствующей строке A_n , будет равна (по теореме 2) величине

$$\frac{n\sqrt{M_n^2 - R_n^2(A_n, E, x)}}{\sqrt{(1 - x^2)(x - a)(x - b)}} \frac{\sqrt{(1 - \alpha_n^2)(1 - \alpha_n a)(1 - \alpha_n b)}}{1 - \alpha_n x} \frac{x - c_n}{1 - \alpha_n c_n},$$

где

$$c_n = \frac{(1 - \alpha_n a)\Theta'(\rho_{n-1})\sqrt{(1 - a)(1 + b)} - a\Theta(\rho_{n-1})\sqrt{(1 - \alpha_n^2)(1 - \alpha_n a)(1 - \alpha_n b)}}{\alpha_n(1 - \alpha_n a)\Theta'(\rho_{n-1})\sqrt{(1 - a)(1 + b)} - \Theta(\rho_{n-1})\sqrt{(1 - \alpha_n^2)(1 - \alpha_n a)(1 - \alpha_n b)}}.$$

Поскольку

$$\frac{\Theta'(K)}{\Theta(K)} \sqrt{(1 - a)(1 + b)} = 0$$

и $\rho_{n-1} \rightarrow K$ при $n \rightarrow \infty$, для выбранной A_n имеем

$$\begin{aligned} R'_n(A_n, E, x) &= \frac{n\sqrt{M_n^2 - R_n^2(A_n, E, x)}}{\sqrt{(1 - x^2)(x - a)(x - b)}} \\ &\times \left(\frac{(x - a)\sqrt{(1 - \alpha_n^2)(1 - \alpha_n b)(1 - \alpha_n a)}}{(1 - \alpha_n x)(1 - \alpha_n a)} + o(1) \right). \end{aligned}$$

Именно в этом смысле и подразумевается асимптотическая точность неравенства (1). Асимптотическая точность неравенства (2) проверяется аналогично.

Автор благодарен А. И. Аптекареву за обсуждение результатов работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Borwein P. B. Markov's and Bernstein's inequalities on disjoint intervals // *Canad. J. Math.* 1981. V. 33. № 1. P. 201–209.
- [2] Ахиезер Н. И., Левин Б. Я. Обобщение неравенства С. Н. Бернштейна для производных от целых функций // *Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного* / ред. А. И. Маркушевич. М.: Физматгиз, 1960. С. 111–165.
- [3] Виденский В. С. Некоторые оценки производных от рациональных дробей // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1962. Т. 26. № 3. С. 415–426.
- [4] Borwein P. B., Erdelyi T., Zhang J. Chebyshev polynomials and Markov–Bernstein type inequalities for rational spaces // *J. London Math. Soc.* (2). 1994. V. 50. P. 501–519.
- [5] Русак В. Н. Рациональные функции как аппарат приближения. Минск: Изд. БГУ, 1979.
- [6] Пекарский А. А. Оценки производной интеграла типа Коши с мероморфной плотностью и их приложения // *Матем. заметки.* 1982. Т. 31. № 3. С. 389–402.
- [7] Li X., Mohapatra R. N., Rodriguez R. S. Bernstein-type inequalities for rational functions with prescribed poles // *J. London Math. Soc.* (2). 1995. V. 51. P. 523–531.
- [8] Данченко В. И. О разделении особенностей мероморфных функций // *Матем. сб.* 1984. Т. 125. № 2. С. 181–198.
- [9] Lorentz G. G., Golitschek M. V., Makovoz Y. *Constructive Approximation. Advanced Problems.* Berlin–Heidelberg: Springer, 1996.
- [10] Rahman Q. I., Schmeisser G. *Les inégalités de Markoff et de Bernstein.* Montréal: Presses Univ. Montréal, 1983.
- [11] Лукашов А. Л. О задаче Чебышева–Маркова на двух отрезках // *Деп. ВИНТИ* № 6615-89. М.: ВИНТИ, 1989.
- [12] Achyzer N. I. Über einige Funktionen, welche in zwei gegebenen Intervallen am wenigsten von Null abweichen. I // *Изв. АН СССР. Отд. матем. и естеств. наук.* 1932. Т. 9. С. 1163–1202.
- [13] Levy R. Generalized rational function in finite intervals using Zolotarev functions // *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* 1970. V. 18. № 12. P. 1052–1064.
- [14] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. *Курс современного анализа. Трансцендентные функции.* Т. 2. М.: Физматлит, 1963.
- [15] Peherstorfer F. Elliptic orthogonal and extremal polynomials // *Proc. London Math. Soc.* (3). 1995. V. 70. P. 605–624.

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: lukashov@scnit.saratov.su

Поступило
30.07.97