Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Масленникова, Ю. С. Верещагина, Краевая задача для уравнения Пуассона для двух сред в L_p^2 -пространствах, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 4, 515–526

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1195>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 03:22:57

УДК 517.95

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА ДЛЯ ДВУХ СРЕД В L_p^2 -ПРОСТРАНСТВАХ

В. Н. Масленникова, Ю. С. Верещагина

В работе изучается краевая задача сопряжения для двух сред для уравнения Пуассона $\mu \Delta u = f(x)$ с решениями в классе $L_p^2(\mathbb{R}_\pm^3)$, $1 < p < \infty$, с соответствующей полунормой, где

$$\mathbb{R}_\pm^3 = \{x \mid x' = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_3 \gtrless 0\}, \quad \mu = \begin{cases} \mu_+, & x_3 > 0, \\ \mu_-, & x_3 < 0. \end{cases}$$

Доказано существование решения для всех $f(x) \in L_p$ и получены априорные оценки решения с помощью мультипликаторов в пространстве $L_p^2(\mathbb{R}_\pm^3)$. Найдено явное решение задачи для всех $f(x) \in \mathring{C}(\mathbb{R}^3)$. Построено (в явном виде) ядро оператора, порождаемого задачей, в виде полинома первой степени.

Библиография: 7 названий.

Планируя в будущем изучить задачу сопряжения для системы Стокса и Навье–Стокса, в том числе с неизвестной границей [1], [2], в данной работе мы изучаем задачу сопряжения для уравнения Пуассона для двух сред

$$\mu \Delta u = f, \quad x \in \mathbb{R}_+^3 \cup \mathbb{R}_-^3, \quad (1)$$

где

$$\mathbb{R}_\pm^3 = \{x \mid x' = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_3 \gtrless 0\}, \quad \mu = \begin{cases} \mu_+, & x_3 > 0, \\ \mu_-, & x_3 < 0, \end{cases}$$

μ_+, μ_- – положительные постоянные. Условия сопряжения на границе раздела двух сред, т.е. на гиперплоскости $x_3 = 0$, имеют вид

$$u|_{x_3=+0} = u|_{x_3=-0}, \quad (2)$$

$$\mu_+ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{x_3=+0} = \mu_- \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{x_3=-0}. \quad (3)$$

Задача (1)–(3) моделирует стационарное распределение температуры с разными коэффициентами теплопроводности для двух сред. Решение исследуется в пространстве $u(x) \in L_p^2(\mathbb{R}_+^3 \cup \mathbb{R}_-^3)$ (для краткости $L_p^2(\mathbb{R}_\pm^3)$) с полунормой

$$\|u\|_{L_p^2(\mathbb{R}_\pm^3)} = \sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha u\|_{L_p(\mathbb{R}_\pm)}, \quad 1 < p < \infty, \quad f(x) \in L_p(\mathbb{R}^3).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-01139.

Так как область, где рассматривается решение, неограничена, иногда будет использоваться условие на бесконечности:

$$\lim_{|x_3| \rightarrow \infty} u(x) = 0. \quad (4)$$

В работе построено в явном виде решение задачи (1)–(4) для $f \in \mathring{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$, получена оценка вторых производных решения в полунорме $L_p^2(\mathbb{R}_\pm^3)$:

$$\sum_{|\alpha|=2} \|D_x^\alpha u\|_{L_p(\mathbb{R}_+^3)} + \sum_{|\alpha|=2} \|D_x^\alpha u\|_{L_p(\mathbb{R}_-^3)} \leq M \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^3)}$$

с постоянной $M > 0$, не зависящей от $u(x)$, доказано существование решения задачи (1)–(3) для всех $f(x) \in L_p(\mathbb{R}^3)$. Доказано также, что размерность ядра оператора, порожденного задачей (1)–(3), с областью определения $L_p^2(\mathbb{R}_\pm^3)$ и областью значений $L_p(\mathbb{R}^3)$ равна 1. При доказательстве результатов используется теория мультипликаторов преобразований Фурье [3], неравенства Харди [4], [5] и теория обобщенных функций [6].

1. Построение явного решения. Построим решение задачи (1)–(4) для $f(x) \in \mathring{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$. Имеет место

ТЕОРЕМА 1. Если $f(x) \in \mathring{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ и выполняется условие (4), то решение задачи (1)–(3) имеет вид $u(x', x_3) = F_{\xi' \rightarrow x'}^{-1}[\hat{u}(\xi', x_3)]$, где

$$\begin{aligned} \hat{u}(\xi', x_3) = & \frac{e^{-|\xi'|x_3}}{(\mu_- - \mu_+)|\xi'|} \int_0^{-\infty} \hat{f}(\xi', y_3) e^{|\xi'|y_3} dy_3 \\ & + \frac{e^{-|\xi'|x_3}(\mu_- + \mu_+)}{2\mu_+(\mu_- - \mu_+)|\xi'|} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\xi', y_3) e^{-|\xi'|y_3} dy_3 \\ & - \frac{e^{|\xi'|x_3}}{2\mu_+|\xi'|} \int_{x_3}^{+\infty} \hat{f}(\xi', y_3) e^{-|\xi'|y_3} dy_3 \\ & - \frac{e^{-|\xi'|x_3}}{2\mu_+|\xi'|} \int_0^{x_3} \hat{f}(\xi', y_3) e^{|\xi'|y_3} dy_3, \quad x_3 > 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \hat{u}(\xi', x_3) = & \frac{e^{|\xi'|x_3}(\mu_- + \mu_+)}{2\mu_-|\xi'|(\mu_- - \mu_+)} \int_0^{-\infty} \hat{f}(\xi', y_3) e^{|\xi'|y_3} dy_3 \\ & + \frac{e^{|\xi'|x_3}}{(\mu_- - \mu_+)|\xi'|} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\xi', y_3) e^{-|\xi'|y_3} dy_3 \\ & - \frac{e^{-|\xi'|x_3}}{2\mu_-|\xi'|} \int_{-\infty}^{x_3} \hat{f}(\xi', y_3) e^{|\xi'|y_3} dy_3 \\ & + \frac{e^{|\xi'|x_3}}{2\mu_-|\xi'|} \int_0^{x_3} \hat{f}(\xi', y_3) e^{-|\xi'|y_3} dy_3, \quad x_3 < 0. \end{aligned} \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя к (1) преобразование Фурье по $x' = (x_1, x_2)$, получаем

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x_3^2} - |\xi'|^2 \hat{u} = \frac{\hat{f}(\xi', x_3)}{\mu}. \quad (7)$$

Общее решение соответствующего (7) однородного уравнения имеет вид

$$\hat{u}_0(\xi', x_3) = a(\xi')e^{-|\xi'|x_3} + b(\xi')e^{|\xi'|x_3}.$$

Найдем частное решение уравнения (7). Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_3^2} - |\xi'|^2 \tilde{u} &= \frac{\hat{f}(\xi', x_3)}{\mu}, \\ \tilde{u}(\xi', 0) &= \tilde{u}'_{x_3}(\xi', 0) = 0. \end{aligned}$$

Ее решением является

$$\tilde{u}(\xi', x_3) = \int_0^{x_3} \varphi(\xi', x_3 - y_3) \frac{\hat{f}(\xi', y_3)}{\mu} dy_3,$$

где $\varphi(\xi', x_3)$ – решение задачи

$$\varphi''_{x_3} - |\xi'|^2 \varphi = 0, \quad \varphi(\xi', 0) = 0, \quad \varphi'_{x_3}(\xi', 0) = 1,$$

т.е. $\varphi(\xi', x_3) = c_1 \operatorname{ch}(|\xi'|x_3) + c_2 \operatorname{sh}(|\xi'|x_3)$. Постоянные c_1, c_2 определяем из начальных условий: $c_1 = 0, c_2 = 1/|\xi'|$; откуда

$$\varphi(\xi', x_3) = \frac{1}{|\xi'|} \operatorname{sh}(|\xi'|x_3).$$

Таким образом, частное решение уравнения (7) имеет вид

$$\tilde{u}(\xi', x_3) = \frac{1}{\mu|\xi'|} \int_0^{x_3} \hat{f}(\xi', y_3) \operatorname{sh}(|\xi'|(x_3 - y_3)) dy_3,$$

а общее решение уравнения (7) –

$$\begin{aligned} \hat{u}(\xi', x_3) &= a(\xi')e^{-|\xi'|x_3} + b(\xi')e^{|\xi'|x_3} \\ &+ \frac{e^{|\xi'|x_3}}{2\mu|\xi'|} \int_0^{x_3} \hat{f}(\xi, y_3) e^{-|\xi'|y_3} dy_3 - \frac{e^{-|\xi'|x_3}}{2\mu|\xi'|} \int_0^{x_3} \hat{f}(\xi', y_3) e^{|\xi'|y_3} dy_3, \end{aligned}$$

где

$$a(\xi') = \begin{cases} a_+(\xi'), & x_3 > 0, \\ a_-(\xi'), & x_3 < 0, \end{cases} \quad b(\xi') = \begin{cases} b_+(\xi'), & x_3 > 0, \\ b_-(\xi'), & x_3 < 0, \end{cases} \quad \mu = \begin{cases} \mu_+, & x_3 > 0, \\ \mu_-, & x_3 < 0. \end{cases}$$

Из условия на бесконечности (4) имеем

$$\begin{aligned} b_+(\xi') &= -\frac{1}{2\mu_+|\xi'|} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\xi', y_3) e^{-|\xi'|y_3} dy_3, \\ a_-(\xi') &= \frac{1}{2\mu_-|\xi'|} \int_0^{-\infty} \hat{f}(\xi', y_3) e^{|\xi'|y_3} dy_3. \end{aligned}$$

Из условий сопряжения (2), (3) находим $a_+(\xi')$ и $b_-(\xi')$:

$$a_+ + b_+ = a_- + b_-, \quad \mu_+ |\xi'| (-a_+ + b_+) = \mu_- |\xi'| (a_- - b_-);$$

откуда

$$a_+ = b_- + a_- - b_+, \quad \mu_+ (-a_+ + b_+) = \mu_- (a_- - b_-), \quad \mu_+ (2b_+ - a_- - b_-) = \mu_- (a_- - b_-),$$

или

$$b_-(\mu_- - \mu_+) = -2\mu_+ b_+ + (\mu_- + \mu_+) a_-.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} b_-(\xi') &= \frac{1}{(\mu_- - \mu_+) |\xi'|} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\xi', y_3) e^{-|\xi'| y_3} dy_3 \\ &\quad + \frac{\mu_- + \mu_+}{2\mu_- (\mu_- - \mu_+) |\xi'|} \int_0^{-\infty} \hat{f}(\xi', y_3) e^{|\xi'| y_3} dy_3, \\ a_+(\xi') &= \frac{1}{(\mu_- - \mu_+) |\xi'|} \int_0^{-\infty} \hat{f}(\xi', y_3) e^{|\xi'| y_3} dy_3 \\ &\quad + \frac{\mu_- + \mu_+}{2\mu_+ (\mu_- - \mu_+) |\xi'|} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\xi', y_3) e^{-|\xi'| y_3} dy_3. \end{aligned}$$

Итак, при $x_3 > 0$ решение задачи (1)–(4) в преобразованиях Фурье по x' имеет вид (5), а при $x_3 < 0$ соответствующее решение имеет вид (6). Теорема 1 доказана.

2. Оценки решений в полунормах L_p^2 . Имеет место

ТЕОРЕМА 2. Если $f(x) \in \dot{C}(\mathbb{R}^3)$, $1 < p < \infty$, то полученное в теореме 1 решение задачи (1)–(4) удовлетворяет оценке

$$\sum_{|\alpha|=2} \|D_x^\alpha u\|_{L_p(\mathbb{R}_+^3)} + \sum_{|\alpha|=2} \|D_x^\alpha u\|_{L_p(\mathbb{R}_-^3)} \leq M \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^3)}. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Получим оценки в L_p для норм вторых производных решения задачи (1)–(4) при $x_3 > 0$. Сделав в интеграле

$$\int_0^{-\infty} \hat{f}(\xi', y_3) e^{|\xi'| y_3} dy_3$$

из формулы (5) замену $y_3 = -y'_3$, получим при $x_3 > 0$ решение в виде

$$\begin{aligned} \hat{u}(\xi', x_3) &= -\frac{e^{-|\xi'| x_3}}{(\mu_- - \mu_+) |\xi'|} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\xi', -y_3) e^{-|\xi'| y_3} dy_3 \\ &\quad + \frac{(\mu_- + \mu_+) e^{-|\xi'| x_3}}{2\mu_+ |\xi'| (\mu_- - \mu_+)} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\xi', y_3) e^{-|\xi'| y_3} dy_3 \\ &\quad - \frac{e^{|\xi'| x_3}}{2\mu_+ |\xi'|} \int_{x_3}^{+\infty} \hat{f}(\xi', y_3) e^{-|\xi'| y_3} dy_3 - \frac{e^{-|\xi'| x_3}}{2\mu_+ |\xi'|} \int_0^{x_3} \hat{f}(\xi', y_3) e^{|\xi'| y_3} dy_3. \end{aligned}$$

Представим $\hat{u}(\xi', x_3)$ в виде $\hat{u}(\xi', x_3) = \hat{u}_1(\xi', x_3) + \hat{u}_2(\xi', x_3)$, где

$$\begin{aligned} \hat{u}_1(\xi', x_3) = & -\frac{e^{-|\xi'|x_3}}{(\mu_- - \mu_+)|\xi'|} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\xi', -y_3) e^{-|\xi'|y_3} dy_3 \\ & + \frac{e^{-|\xi'|x_3}(\mu_- + \mu_+)}{2\mu_+|\xi'|(\mu_- - \mu_+)} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\xi', y_3) e^{-|\xi'|y_3} dy_3, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\hat{u}_2(\xi', x_3) = -\frac{1}{2\mu_+|\xi'|} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\xi', y_3) e^{-|\xi'| \cdot |x_3 - y_3|} dy_3. \quad (10)$$

Получим оценки для вторых производных от $u_1(\xi', x_3)$. Умножим $\hat{u}_1(\xi', x_3)$ из (10) на $(i\xi_k)(i\xi_j)$, где $k = 1, 2, j = 1, 2$. Тогда

$$\begin{aligned} (i\xi_k)(i\xi_j)\hat{u}_1(\xi', x_3) = & -\frac{(i\xi_k)(i\xi_j)e^{-|\xi'|x_3}}{(\mu_- - \mu_+)|\xi'|} \int_0^{x_3} \hat{f}(\xi', -y_3) e^{-|\xi'|y_3} dy_3 \\ & - \frac{(i\xi_k)(i\xi_j)e^{-|\xi'|x_3}}{(\mu_- - \mu_+)|\xi'|} \int_{x_3}^{+\infty} \hat{f}(\xi', -y_3) e^{-|\xi'|y_3} dy_3 \\ & + \frac{(i\xi_k)(i\xi_j)e^{-|\xi'|x_3}(\mu_- + \mu_+)}{2\mu_+|\xi'|(\mu_- - \mu_+)} \int_0^{x_3} \hat{f}(\xi', y_3) e^{-|\xi'|y_3} dy_3 \\ & + \frac{(i\xi_k)(i\xi_j)e^{-|\xi'|x_3}(\mu_- + \mu_+)}{2\mu_+|\xi'|(\mu_- - \mu_+)} \int_{x_3}^{+\infty} \hat{f}(\xi', y_3) e^{-|\xi'|y_3} dy_3. \end{aligned}$$

Введем следующие функции:

$$\begin{aligned} m_1^{kj}(\xi', x_3, y_3) &= -\frac{(i\xi_k)(i\xi_j)x_3 e^{-|\xi'|(x_3+y_3)}}{(\mu_- - \mu_+)|\xi'|}, & x_3 > y_3 > 0, \\ m_2^{kj}(\xi', x_3, y_3) &= -\frac{(i\xi_k)(i\xi_j)y_3 e^{-|\xi'|(x_3+y_3)}}{(\mu_- - \mu_+)|\xi'|}, & y_3 > x_3 > 0, \\ m_3^{kj}(\xi', x_3, y_3) &= \frac{(i\xi_k)(i\xi_j)x_3(\mu_- + \mu_+)e^{-|\xi'|(x_3+y_3)}}{2\mu_+(\mu_- - \mu_+)|\xi'|}, & x_3 > y_3 > 0, \\ m_4^{kj}(\xi', x_3, y_3) &= \frac{(i\xi_k)(i\xi_j)(\mu_- + \mu_+)y_3 e^{-|\xi'|(x_3+y_3)}}{2\mu_+(\mu_- - \mu_+)|\xi'|}, & y_3 > x_3 > 0. \end{aligned}$$

Все постоянные, не зависящие от ξ', x_3, y_3 , в дальнейшем будем обозначать через M .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Функции $m_i^{kj}(\xi', x_3, y_3)$, $i = 1, 2, 3, 4$, $k, j = 1, 2$, являются мультипликаторами из $L_p(\mathbb{R}^2)$ в $L_p(\mathbb{R}^2)$, $1 < p < \infty$, но $\xi' = (\xi_1, \xi_2)$, причем константы, которыми они ограничены, не зависят от x_3, y_3 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на теореме Лизоркина [3] (см. также [7]): пусть функция $m(\xi)$ непрерывна и ограничена на множестве $\{\xi \in \mathbb{R}^n, \xi_j \neq 0, j = 1, \dots, n\}$ вместе со всеми произведениями $\xi^\beta D_\xi^\beta m(\xi)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, где $\beta_j \in \{0, 1\}$; тогда $m(\xi)$ есть мультипликатор на $L_p(\mathbb{R}^n)$, т.е. $m(\xi) \in M_p$, $1 < p < \infty$, при этом норма оператора $T_m: L_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_p(\mathbb{R}^n)$, $T_m u(x) = F^{-1}[m\hat{u}](x)$ не превосходит $c_p \nu$, где

$$\nu = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi^\beta D_\xi^\beta m(\xi)|,$$

а c_p – постоянная, не зависящая от ν .

Докажем предложение для $m_1^{kj}(\xi', x_3, y_3)$. Очевидно, что функция

$$m_1^{kj}(\xi', x_3, y_3) = -\frac{(i\xi_k)(i\xi_j)x_3e^{-|\xi'|x_3+y_3}}{(\mu_- - \mu_+)|\xi'|},$$

где $x_3 > y_3 > 0$, $|\xi'| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$, непрерывна и ограничена при $\xi' = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$, $|\xi'| \neq 0$, т.е.

$$|m_1^{kj}(\xi', x_3, y_3)| = \left| \frac{\xi_k}{|\xi'|} \frac{\xi_j}{|\xi'|} \frac{|\xi'|x_3e^{-|\xi'|x_3}e^{-|\xi'|y_3}}{\mu_+ + \mu_-} \right| \leq M.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \left| \xi_1 \frac{\partial m_1^{12}(\xi', x_3, y_3)}{\partial \xi_1} \right| &\leq \frac{1}{\mu_- - \mu_+} \left| \frac{x_3 \xi_1 \xi_2 e^{-|\xi'|x_3+y_3}}{|\xi'|} \right| \\ &+ \frac{1}{\mu_- - \mu_+} \left| \frac{\xi_1^2}{|\xi'|^2} \frac{\xi_1}{|\xi'|} \frac{\xi_2}{|\xi'|} |\xi'|^2 (x_3^2 e^{-|\xi'|x_3+y_3} + x_3 y_3 e^{-|\xi'|x_3+y_3}) \right| \\ &+ \frac{1}{\mu_- - \mu_+} \left| \frac{\xi_1^2}{|\xi'|^2} \frac{\xi_1}{|\xi'|} \frac{\xi_2}{|\xi'|} (|\xi'|x_3 e^{-|\xi'|x_3}) e^{-|\xi'|y_3} \right| \leq M. \end{aligned}$$

Аналогичным образом доказываем, что

$$\left| \xi_1^{s_1} \xi_2^{s_2} \frac{\partial^{s_1+s_2} m_1^{kj}}{\partial \xi_1^{s_1} \partial \xi_2^{s_2}} \right| \leq M,$$

где $s_l, l = 1, 2$, принимают значения 0 или 1, причем производные

$$\frac{\partial^{s_1+s_2} m_1^{kj}}{\partial \xi_1^{s_1} \partial \xi_2^{s_2}}$$

непрерывны при $\xi' \in \mathbb{R}^2$, $|\xi'| \neq 0$. Тогда по теореме о мультипликаторах $m_1^{kj}(\xi', x_3, y_3)$ является мультипликатором из L_p в L_p по ξ' с константой, не зависящей от x_3, y_3 . Аналогично доказывается, что $m_r^{kj}(\xi', x_3, y_3)$, $r = 2, 3, 4$, $k, j = 1, 2$, являются мультипликаторами из L_p в L_p по ξ' с константами, не зависящими от x_3, y_3 . Предложение доказано.

Положим

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_1^{kj}(\xi', x_3) &= \frac{1}{x_3} \int_0^{x_3} \widehat{f}(\xi', -y_3) m_1^{kj}(\xi', x_3, y_3) dy_3, \\ \widehat{\varphi}_2^{kj}(\xi', x_3) &= \int_{x_3}^{+\infty} \widehat{f}(\xi', -y_3) m_2^{kj}(\xi', x_3, y_3) \frac{1}{y_3} dy_3, \\ \widehat{\varphi}_3^{kj}(\xi', x_3) &= \frac{1}{x_3} \int_0^{x_3} \widehat{f}(\xi', y_3) m_3^{kj}(\xi', x_3, y_3) dy_3, \\ \widehat{\varphi}_4^{kj}(\xi', x_3) &= \int_{x_3}^{+\infty} \widehat{f}(\xi', y_3) m_4^{kj}(\xi', x_3, y_3) \frac{1}{y_3} dy_3. \end{aligned} \tag{11}$$

Известно, что если

$$(T_m \widehat{g})(x', x_3, y_3) = F_{\xi' \rightarrow x'}^{-1} [m(\xi', x_3, y_3) \widehat{g}(\xi', y_3)],$$

то

$$\|(T_m \hat{g})(x', x_3, y_3)\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} \leq M \|g(x', y_3)\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} \quad (12)$$

по определению мультипликатора, здесь и далее норма $L_p(\mathbb{R}^2)$ берется по x' . Применим к (11) обратное преобразование Фурье по ξ' :

$$\begin{aligned} \varphi_1^{kj}(x', x_3) &= \frac{1}{x_3} \int_0^{x_3} (T_{m_1^{kj}} \hat{f})(x', x_3, -y_3) dy_3, \\ \varphi_2^{kj}(x', x_3) &= \int_{x_3}^{+\infty} (T_{m_2^{kj}} \hat{f})(x', x_3, -y_3) \frac{1}{y_3} dy_3, \\ \varphi_3^{kj}(x', x_3) &= \frac{1}{x_3} \int_0^{x_3} (T_{m_3^{kj}} \hat{f})(x', x_3, y_3) dy_3, \\ \varphi_4^{kj}(x', x_3) &= \int_{x_3}^{+\infty} (T_{m_4^{kj}} \hat{f})(x', x_3, y_3) \frac{1}{y_3} dy_3. \end{aligned} \quad (13)$$

С помощью неравенства Минковского для интегралов из (12) и (13) получаем

$$\begin{aligned} \|\varphi_1^{kj}(x', x_3)\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} &\leq M \frac{1}{x_3} \int_0^{x_3} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f(x', -y_3)|^p dx' \right)^{1/p} dy_3, \\ \|\varphi_2^{kj}(x', x_3)\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} &\leq M \int_{x_3}^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f(x', -y_3)|^p dx' \right)^{1/p} \frac{1}{y_3} dy_3, \\ \|\varphi_3^{kj}(x', x_3)\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} &\leq M \frac{1}{x_3} \int_0^{x_3} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f(x', y_3)|^p dx' \right)^{1/p} dy_3, \\ \|\varphi_4^{kj}(x', x_3)\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} &\leq M \int_{x_3}^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f(x', y_3)|^p dx' \right)^{1/p} \frac{1}{y_3} dy_3. \end{aligned} \quad (14)$$

Положим

$$\begin{aligned} F_1(y_3) &= \|f(x', -y_3)\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}, & F_2(y_3) &= \frac{1}{y_3} \|f(x', -y_3)\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}, \\ F_3(y_3) &= \|f(x', y_3)\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}, & F_4(y_3) &= \frac{1}{y_3} \|f(x', y_3)\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} \end{aligned} \quad (15)$$

и рассмотрим операторы Харди H_1 и H_2 , определяемые для функции g , заданной на полуоси $(0, +\infty)$ для любого $x > 0$:

$$(H_1 g)(x) := \frac{1}{x} \int_0^x g(y) dy, \quad (H_2 g)(x) := \frac{1}{x} \int_x^{+\infty} g(y) dy.$$

Тогда в обозначениях (15) неравенства (14) принимают вид

$$\begin{aligned} \|\varphi_l^{kj}(x', x_3)\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} &\leq M (H_1 F_l)(x_3), & l &= 1, 3, \\ \|\varphi_s^{kj}(x', x_3)\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} &\leq M x_3 (H_2 F_s)(x_3), & s &= 2, 4. \end{aligned} \quad (16)$$

Воспользуемся неравенствами Харди (см. [4], [5]): если $\alpha < 1/p'$, $p' = p/(p-1)$ ($1 < p < +\infty$), то для любых измеримых на $(0, +\infty)$ функций f

$$\|x^\alpha (H_1 f)(x)\|_{L_p(0, \infty)} \leq \left(\frac{1}{p'} - \alpha \right)^{-1} \|x^\alpha f(x)\|_{L_p(0, \infty)};$$

если $\alpha > 1/p'$, то для любых измеримых на $(0, +\infty)$ функций f

$$\|x^\alpha (H_2 f)(x)\|_{L_p(0, \infty)} \leq \left(\alpha - \frac{1}{p'}\right)^{-1} \|x^\alpha f(x)\|_{L_p(0, \infty)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|(H_1 F_l)(x_3)\|_{L_p(\mathbb{R}_+^1)} &\leq \frac{p}{p-1} \|F_l(x_3)\|_{L_p(\mathbb{R}_+^1)}, \quad l = 1, 3, \\ \|x_3 (H_2 F_s)(x_3)\|_{L_p(\mathbb{R}_+^1)} &\leq p \|x_3 F_s(x_3)\|_{L_p(\mathbb{R}_+^1)}, \quad s = 2, 4. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь $\mathbb{R}_+^1 = \{x_3 \mid x_3 > 0\}$. Применяя норму пространства $L_p(\mathbb{R}_+^1)$ по x_3 к (16) и используя (17), получим

$$\begin{aligned} \|\varphi_l^{kj}(x_1, x_2, x_3)\|_{L_p(\mathbb{R}_+^3)} &\leq M \frac{p}{p-1} \|F_l(y_3)\|_{L_p(\mathbb{R}_+^1)}, \quad l = 1, 3, \\ \|\varphi_s^{kj}(x_1, x_2, x_3)\|_{L_p(\mathbb{R}_+^3)} &\leq Mp \|y_3 F_s(y_3)\|_{L_p(\mathbb{R}_+^1)}, \quad s = 2, 4. \end{aligned}$$

Возвращаясь от обозначений (15) к прежним, имеем

$$\begin{aligned} \|\varphi_l^{kj}\|_{L_p(\mathbb{R}_+^3)} &\leq M \left(\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} |f(x', -x_3)|^p dx' dx_3 \right)^{1/p}, \quad l = 1, 2, \\ \|\varphi_s^{kj}\|_{L_p(\mathbb{R}_+^3)} &\leq M \left(\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} |f(x', x_3)|^p dx' dx_3 \right)^{1/p}, \quad s = 3, 4. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\left(\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} |f(x', -x_3)|^p dx' dx_3 \right)^{1/p} = \|f\|_{L_p(\mathbb{R}_-^3)}.$$

Таким образом,

$$\|\varphi_l^{kj}\|_{L_p(\mathbb{R}_+^3)} \leq M \|f\|_{L_p(\mathbb{R}_-^3)}, \quad l = 1, 2, \quad \|\varphi_s^{kj}\|_{L_p(\mathbb{R}_+^3)} \leq M \|f\|_{L_p(\mathbb{R}_+^3)}, \quad s = 3, 4.$$

Так как

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_k \partial x_j} = \sum_{s=1}^4 \varphi_s^{kj}, \quad k, j = 1, 2,$$

получаем

$$\left\| \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_k \partial x_j} \right\|_{L_p(\mathbb{R}_+^3)} \leq \sum_{s=1}^4 \|\varphi_s^{kj}\|_{L_p(\mathbb{R}_+^3)} \leq M (\|f\|_{L_p(\mathbb{R}_-^3)} + \|f\|_{L_p(\mathbb{R}_+^3)}),$$

т.е.

$$\left\| \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_k \partial x_j} \right\|_{L_p(\mathbb{R}_+^3)} \leq M \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^3)}, \quad k, j = 1, 2. \quad (18)$$

Аналогично тому, как доказывались оценки (18), имеем

$$\left\| \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right\|_{L_p(\mathbb{R}_+^3)} \leq M \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^3)}, \quad \left\| \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_k \partial x_3} \right\|_{L_p(\mathbb{R}_+^3)} \leq M \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^3)}.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\left\| \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_k \partial x_j} \right\|_{L_p(\mathbb{R}_+^3)} \leq M \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^3)}, \quad k, j = 1, 2, 3. \quad (19)$$

Оценим нормы вторых производных от $u_2(\xi', x_3)$. Рассмотрим интеграл (11). Продолжим $\hat{f}(\xi', x_3)$ нулем при $y_3 < 0$. Тогда

$$\hat{u}_2(\xi', x_3) = -\frac{1}{2\mu_+|\xi'|} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi', y_3) e^{-|\xi'| \cdot |x_3 - y_3|} dy_3 = -\frac{1}{2\mu_+|\xi'|} \hat{f}(\xi', x_3) * e^{-|\xi'| \cdot |x_3|}. \quad (20)$$

Применим к (20) преобразование Фурье по x_3 :

$$\begin{aligned} F_{x_3 \rightarrow \xi_3}[\hat{u}_2(\xi', x_3)] &= \bar{u}_2(\xi', \xi_3) = -\frac{1}{2\mu_+|\xi'|} \bar{f}(\xi', \xi_3) F_{x_3 \rightarrow \xi_3}[e^{-|\xi'| \cdot |x_3|}] \\ &= -\frac{1}{\mu_+} \bar{f}(\xi', \xi_3) \frac{1}{|\xi|^2}, \end{aligned}$$

где $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$, так как

$$F_{x \rightarrow \xi}[e^{-a|x|}] = \frac{2a}{\xi^2 + a^2} \quad \text{при } a > 0.$$

Итак,

$$F_{x \rightarrow \xi}[u_2(x)] = -\frac{1}{\mu_+} \bar{f}(\xi) \frac{1}{|\xi|^2}.$$

Заметим, что

$$F_{x \rightarrow \xi} \left[\frac{\partial^2 u_2(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_k \partial x_j} \right] = -\frac{(i\xi_k)(i\xi_j)}{\mu_+} \bar{f}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \frac{1}{|\xi|^2}, \quad k, j = 1, 2, 3. \quad (21)$$

Очевидно, функции

$$m^{kj}(\xi) = -\frac{(i\xi_k)(i\xi_j)}{\mu_+(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)}, \quad k, j = 1, 2, 3,$$

являются мультипликаторами из L_p в L_p , $1 < p < \infty$, по $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Тогда из (21) получаем

$$\left\| \frac{\partial^2 u_2(x_1, u_2, u_3)}{\partial x_k \partial x_j} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^3)} = \|F_{\xi \rightarrow x}^{-1}[m^{kj}(\xi) \bar{f}(\xi)]\|_{L_p(\mathbb{R}^3)} \leq \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^3)}.$$

Рассмотрим сужение u_2 на $\mathbb{R}_+^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 > 0\}$:

$$\left\| \frac{\partial^2 u_2(x_1, u_2, u_3)}{\partial x_k \partial x_j} \right\|_{L_p(\mathbb{R}_+^3)} \leq M \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^3)}, \quad k, j = 1, 2, 3. \quad (22)$$

Таким образом, из (19), (22) получаем

$$\left\| \frac{\partial^2 u(x_1, u_2, u_3)}{\partial x_k \partial x_j} \right\|_{L_p(\mathbb{R}_+^3)} \leq M \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^3)}, \quad k, j = 1, 2, 3.$$

Для $x_3 \in \mathbb{R}_-^3$ доказательство оценки проводится аналогично, но его можно и не делать, так как при замене $x_3 \rightarrow -x_3'$ система (1)–(4) перейдет в себя с точностью до замены μ_- на μ_+ . Таким образом, имеем (8). Теорема 2 доказана.

ТЕОРЕМА 3. Для любого $f(x) \in L_p(\mathbb{R}^3)$ существует решение задачи (1)–(3) в пространстве $L_p^2(\mathbb{R}_\pm^3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\dot{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ плотно в $L_p(\mathbb{R}^3)$, существование обобщенного решения задачи (1)–(3) в классе $L_p^2(\mathbb{R}_\pm^3)$ для всех $f(x) \in L_p(\mathbb{R}^3)$ доказывается с помощью предельного перехода и оценки (8) из теоремы 2.

3. Ядро оператора, порождаемого задачей (1)–(3).

ТЕОРЕМА 4. Если $f(x) \equiv 0$, то существует нетривиальное решение $u(x) \in L_p(\mathbb{R}_\pm^3)$ задачи (1)–(3), являющееся полиномом первой степени.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $u(x) \in L_p^2(\mathbb{R}_\pm^3)$, по теореме Фубини $u(x', x_3) \in L_p^2(\mathbb{R}^2)$ для почти всех $x_3 \in \mathbb{R}^1$, где x_3 – параметр. Поэтому преобразование Фурье по $x' = (x_1, x_2)$ функции $u(x', x_3)$ принадлежит пространству обобщенных функций $S'(\mathbb{R}^2)$. Преобразуя по Фурье по x' уравнение (1) (с $f(x) \equiv 0$) и решая его при $x_3 \geq 0$, получаем общее решение в виде

$$U_\pm(\xi', x_3) = a_\pm(\xi')e^{\mp|\xi'|x_3} + b_\pm(\xi')e^{\pm|\xi'|x_3},$$

где знаки “ $\pm$ ” соответствуют $x_3 > 0$ и $x_3 < 0$, $a_\pm(\xi')$, $b_\pm(\xi')$ – обобщенные функции из S' , $U_\pm(\xi', x_3)$ – функционалы по ξ' , x_3 – параметр, т.е.

$$\langle U_\pm, \varphi \rangle = \langle a_\pm(\xi')e^{\mp|\xi'|x_3}, \varphi(\xi') \rangle + \langle b_\pm(\xi')e^{\pm|\xi'|x_3}, \varphi(\xi') \rangle \quad (23)$$

для всех $\varphi \in S(\mathbb{R}^2)$, $\varphi(0) = 0$, в окрестности $|\xi'| = 0$. Обозначим это пространство через $\hat{S}(\mathbb{R}^2)$. Отметим, что последнее требование на пробные функции необходимо для того, чтобы функционалы в (23) были непрерывными. Докажем, что

$$\langle b_\pm(\xi')e^{\pm|\xi'|x_3}, \varphi(\xi') \rangle = 0.$$

Для этого рассмотрим действие оператора Лапласа на u во всем $\mathbb{R}^3$ с условиями сопряжения (2), (3). Очевидно, существуют производные $\partial u / \partial x_3$, $D_{x'}^\alpha u$, $|\alpha'| = 2$, в смысле Соболева. Найдем $\partial^2 u / \partial x_3^2$ для $x \in \mathbb{R}^3$ в смысле обобщенных функций:

$$\begin{aligned} \left\langle u, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} \right\rangle &= - \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_3}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right\rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x_3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} dx_3 \\ &= - \int_{-\infty}^0 \frac{\partial u}{\partial x_3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} dx_3 - \int_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x_3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} dx_3 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \varphi dx_3 - \frac{\partial u}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} \varphi(x', 0) + \frac{\partial u}{\partial x_3} \Big|_{x_3=+0} \varphi(x', 0) \\ &= \left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial x_3} \Big|_{x_3=+0} - \frac{\partial u}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} \right), \varphi(x', 0) \right\rangle + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \varphi dx_3 \\ &= \langle h(x')\delta(x_3), \varphi(x') \rangle + \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right] \end{aligned}$$

для всех $\varphi \in S(\mathbb{R}^3)$. Таким образом, для $x \in \mathbb{R}^3$ в смысле обобщенных функций имеем

$$\Delta u = h(x')\delta(x_3), \quad (24)$$

где

$$h(x') = \frac{\partial u(x', x_3)}{\partial x_3} \Big|_{x_3=+0} - \frac{\partial u(x', x_3)}{\partial x_3} \Big|_{x_3=-0}.$$

Преобразуем по Фурье по $x \in \mathbb{R}^3$ уравнение (24): $|\xi|^2 \hat{u}(\xi) = \hat{h}(\xi')$. Найдем обратное преобразование Фурье по x_3 :

$$\hat{u}(\xi', x_3) = F_{\xi_3 \rightarrow x_3}^{-1} \frac{\hat{h}(\xi')}{|\xi'|^2 + \xi_3^2} = \hat{h}(\xi') \frac{\pi}{|\xi'|} e^{-|\xi'| \cdot |x_3|}, \quad (25)$$

раскрывая модуль $|x_3|$ в зависимости от знака x_3 . Записывая (25) в виде функционала и сравнивая с (23), получаем $b_{\pm}(\xi') \equiv 0$. Таким образом, общее решение в смысле S' задачи (1)–(3) имеет вид

$$U(\xi', x_3) = \begin{cases} a_+(\xi') e^{-x_3 |\xi'|}, & x_3 > 0, \\ a_-(\xi') e^{x_3 |\xi'|}, & x_3 < 0. \end{cases}$$

Найдем $a_+(\xi')$ и $a_-(\xi')$ из условий сопряжения. Имеем $\langle a_+(\xi'), \varphi(\xi') \rangle = \langle a_-(\xi'), \varphi(\xi') \rangle$ для всех $\varphi \in \dot{S}(\mathbb{R}^2)$, откуда следует, что $a_+(\xi') = a_-(\xi')$. Из второго условия сопряжения (3) находим $\mu_+ |\xi'| a_+(\xi') = \mu_- |\xi'| a_-(\xi')$, причем все равенства выполняются в смысле S' для всех $\varphi \in \dot{S}(\mathbb{R}^2)$. Из последних двух равенств, так как $\mu_+ \neq \mu_-$, получаем $\langle a_+(\xi'), \varphi(\xi') \rangle = 0$ для всех $\varphi \in \dot{S}(\mathbb{R}^2)$, откуда следует, что $\text{supp } a_{\pm}(\xi') = \{0\}$, т.е.

$$a_{\pm}(\xi') = \sum_{|\alpha'| \leq N} c_k D_{\xi'}^{\alpha'} \delta(\xi').$$

Но решение принадлежит $L_p^2(\mathbb{R}_{\pm}^3)$, значит нетривиальное решение задачи (1)–(3) с $f \equiv 0$ имеет вид $u(x) = a_1(x_3)x_1 + a_2(x_3)x_2 + a_3(x_3)$ при $x_3 \geq 0$. Так как $\Delta u = 0$, то $a_1''(x_3)x_1 + a_2''(x_3)x_2 + a_3''(x_3) = 0$, т.е. $a_k(x_3)$ должны быть многочленами первого порядка:

$$u(x) = (\alpha_1 x_3 + \alpha_0)x_1 + (\beta_1 x_3 + \beta_0)x_2 + \gamma_1 x_3 + \gamma_0.$$

Но

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3} = \alpha_1, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3} = \beta_1,$$

а поскольку $u(x) \in L_p^2(\mathbb{R}_{\pm}^2)$, то $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Таким образом, при $x_3 \geq 0$ имеем $u_{\pm}(x) = \alpha_0^{\pm} x_1 + \beta_0^{\pm} x_2 + \gamma_1^{\pm} x_3 + \gamma_0^{\pm}$. Коэффициенты этого полинома должны удовлетворять условиям сопряжения:

$$u|_{x_3=+0} = u|_{x_3=-0},$$

откуда $\alpha_0^+ x_1 + \beta_0^+ x_2 + \gamma_0^+ = \alpha_0^- x_1 + \beta_0^- x_2 + \gamma_0^-$, т.е. $\alpha_0^+ = \alpha_0^- = \alpha_0$, $\beta_0^+ = \beta_0^- = \beta_0$, $\gamma_0^+ = \gamma_0^- = \gamma_0$;

$$\mu_+ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{x_3=+0} = \mu_- \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{x_3=-0},$$

откуда $\mu_+ \gamma_1^+ = -\mu_- \gamma_1^-$. Таким образом, ядро дифференциального оператора, порожденного задачей (1)–(3), с областью определения $L_p^2(\mathbb{R}_{\pm}^3)$ имеет вид

$$u_{\pm}(x) = \alpha_0 x_1 + \beta_0 x_2 + \gamma_1^{\pm} x_3 + \gamma_0,$$

где $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \gamma_1^{\pm}$ – произвольные постоянные. Теорема 4 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Размерность ядра дифференциального оператора, порожденного задачей (1)–(3), с областью определения $L_p^2(\mathbb{R}_\pm^3)$ и областью значений $L_p(\mathbb{R}^3)$ равна 1.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если от решения $u(x) \in L_p^2(\mathbb{R}_\pm^3)$ потребовать выполнения условия убывания (4) при $|x_3| \rightarrow \infty$, то решение задачи (1)–(4) будет единственным.*

Однако, вопрос о существовании такого решения для $f(x) \in L_p(\mathbb{R}^3)$ остается открытым; для $f(x) \in \dot{C}(\mathbb{R}^3)$ оно построено в явном виде.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Масленникова В. Н., Боговский М. Е. Гидродинамический подход к моделированию динамики морских волн, создаваемых ураганом // Proceedings of the 9th International Conference “Computational Modelling and Computing in Physics”. Дубна, 1997. С. 352–359.
- [2] Maslennikova V. N., Bogovskii M. E. Generalized solution in the large for the Navier–Stokes system with a free surface separating two fluids // International Conference “Nonlinear Partial Differential Equations”. Abstracts. Kiev, 1997. P. 16.
- [3] Лизоркин П. И. Обобщенное ливиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций // Тр. МИАН. 1969. Т. 105. С. 89–167.
- [4] Буренков В. И. Функциональные пространства. Основные интегральные неравенства, связанные с пространствами L_p . М.: Изд. УДН, 1989.
- [5] Стейн И. М. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
- [6] Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976.
- [7] Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.

Российский университет Дружбы народов

Поступило
10.12.98