Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Овчинников, Представление гомеотопий тора простыми полиэдрами с краем, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 4, 533–539

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1197>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 14:42:15

УДК 515.162.3

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГОМЕОТОПИЙ ТОРА ПРОСТЫМИ ПОЛИЭДРАМИ С КРАЕМ

М. А. Овчинников

В 1991 году Тураев и Виро построили квантово-топологическое линейное представление групп классов отображений замкнутых поверхностей, сопоставляя отображениям поверхности в себя простые полиэдры с краем, состоящим из двух простых графов, разрезающих поверхность на клетки. Выбор подходящего множества простых полиэдров сильно влияет на сложность вычислений представлений Тураева–Виро. В работе строятся такие простые полиэдры для случая тора, удобные тем, что все они получаются склейкой по краю из копий всего одного некоторого простого полиэдра.

Библиография: 14 названий.

1. Введение и формулировка результата. Впервые простые полиэдры были явно определены (под названием стандартных) в работе Каслера [1], который исследовал условия, при которых 3-многообразие восстанавливается по своему простому спайну. Свойства простых спайнов детально изучались С. В. Матвеевым [2], [3]. Эти результаты были существенно использованы Тураевым и Виро при построении топологической квантовой теории поля на основе квантовых $6j$ -символов [4]. Представление отображений тора в себя простыми полиэдрами, построенное в данной работе, непосредственно применимо для вычисления представления Тураева–Виро группы классов отображения тора.

Кроме того, простые спайны как способ задания 3-многообразий используются в исследованиях геометрических структур на 3-многообразиях [5], [6], в исследованиях по знаменитым гипотезам Пуанкаре, Зимана, Эндрюса–Кертиса [7]–[9], в теории распознавания многообразий [10]. Последнее направление стимулируется бурным прогрессом персональной вычислительной техники. Простые спайны и, особенно, операции над ними выгодно отличаются от других способов задания 3-многообразий экономностью и простотой компьютерной реализации [11], [12].

Во всех исследованиях, где используется представление 3-многообразий простыми спайнами, могут найти применение методы построения простого спайна по другому представлению 3-многообразия: оснащеному зацеплению, диаграмме Хегора, разветвленному накрытию и т.п. К этому типу задач относится следующая задача, решаемая в этой работе. Пусть к данному 3-многообразию применена переклейка вдоль тора. Как найти простой спайн для полученного многообразия, если известны простой спайн исходного многообразия и гомеоморфизм переклейки? Частным случаем такого способа перестройки 3-многообразий является перестройка Дена (хирургия Дена), а именно, когда тор ограничивает полноторие.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00813.

Результаты данной работы доставляют решение этой задачи для случая, когда пересечение исходного спайна с тором является тэта-кривой.

Напомним необходимые определения. Полиэдр P называется *простым полиэдром* (с *краем*), если у каждой его сингулярной точки линк является графом вида:

- 1) окружность с диаметром, либо
- 2) одномерный остов тетраэдра, либо
- 3) отрезок, либо
- 4) триод.

Множество точек типов 3) и 4) называется *краем* P и обозначается через ∂P .

2-полиэдр P называется *спайном* связного компактного 3-многообразия M , если для некоторого вложения $i: P \rightarrow M$ дополнение к $i(P)$ в M гомеоморфно либо $\partial M \times [0, 1)$, если край у M непуст, либо открытому 3-шару, если M замкнуто. Если при этом полиэдр P простой, то он называется *простым спайном*.

Тэта-кривой называется граф, гомеоморфный окружности с диаметром. Тэта-кривую θ называем *размеченной*, если ее вершины и ребра пронумерованы. Для удобства в тексте вершины и ребра будем считать помеченными вместо номеров символами v_1, v_2 и e_1, e_2, e_3 соответственно. Ребра считаем *ориентированными* от v_1 к v_2 . Всюду далее, говоря о тэта-кривой в торе, будем подразумевать, что дополнение к тэта-кривой является открытым диском.

Полиэдр P называем *размеченным*, если его край состоит из тэта-кривых и тэта-кривые снабжены разметками (символически обозначаемыми m_1 и m_2). Если край полиэдра P состоит из двух тэта-кривых и тэта-кривые снабжены номерами – первая и вторая (помечены символами θ_1, θ_2), – то полиэдр P называем *ориентированным*.

В данной работе рассматриваются только полиэдры с двумя тэта-кривыми на краю, поэтому для краткости под размеченностью будем подразумевать одновременно и ориентированность. Размеченный полиэдр P называем *произведением* размеченных полиэдров P_1, P_2 , если его можно получить склеиванием копий полиэдров P_1 и P_2 путем отождествления второй тэта-кривой из ∂P_1 с первой из ∂P_2 в соответствии с разметкой. Данная работа посвящена изучению полиэдров, получающихся из следующего элементарного простого полиэдра.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть θ_1 и θ_2 – две размеченные тэта-кривые, $a \vee b$ – букет ориентированных окружностей a и b с вершиной $*$ и клеточное отображение $f: \theta_1 \sqcup \theta_2 \rightarrow a \vee b$ действует по правилу

$$f|_{\theta_1}: e_1 \rightarrow a, e_2 \rightarrow b, e_3 \rightarrow *, \quad f|_{\theta_2}: e_1 \rightarrow a, e_2 \rightarrow -b, e_3 \rightarrow *.$$

Цилиндр $\text{Cyl}(f)$ отображения f , рассматриваемый вместе с разметкой тэта-кривых, называем *полиэдром* J .

ЗАМЕЧАНИЕ. Понятие разметки в этом определении следует трактовать в исходном смысле – без ориентированности. Но даже если размеченный полиэдр J понимается как ориентированный, проблемы не возникает, благодаря его симметрии: все равно, какую из двух тэта-кривых объявить первой, а какую – второй.

Обозначим через $\langle J \rangle$ моноид, порожденный полиэдром J и размеченными полиэдрами, гомеоморфными $\theta \times I$. Единицей в нем является прямое произведение размеченной тэта-кривой на отрезок. Нетрудно убедиться, что полиэдр J простой и, значит, все полиэдры в $\langle J \rangle$ тоже простые. Полиэдры из $\langle J \rangle$ без учета разметки называем *J -полиэдрами*. В частности, J -полиэдром является $\theta \times I$.

Группой $\text{Homeot}(F)$ гомеотопий поверхности F называется факторгруппа группы гомеоморфизмов поверхности F по подгруппе гомеоморфизмов, изотопных тождеству. Известно, что гомеотопии тора взаимно однозначно соответствуют автоморфизмам группы гомологий тора [13, теорема 5.15.5]. Это соответствие упрощает описание полиэдрального представления гомеотопий.

Пусть даны размеченный полиэдр $R \in \langle J \rangle$ и неразбивающее вложение $i: \theta \rightarrow T$ тэта-кривой, снабженной разметкой m , в тор T . Для изоморфизмов групп гомологий, индуцируемых этими полиэдром, вложением и разметками тэта-кривых, будем использовать следующие обозначения:

$$\begin{aligned} R_*: H_1(\theta_1) &\rightarrow H_1(\theta_2), & i_*: H_1(\theta) &\rightarrow H_1(T), \\ (m, m_1)_*: H_1(\theta) &\rightarrow H_1(\theta_1), & (m, m_2)_*: H_1(\theta) &\rightarrow H_1(\theta_2). \end{aligned}$$

Определим соответствие $(i, m)_*: \langle J \rangle \rightarrow \text{Homeot}(T^2)$ как сопоставляющее полиэдру R гомеотопию f , если они определяют один и тот же автоморфизм гомологий тэта-кривой, т.е. f обеспечивает коммутативность диаграммы изоморфизмов

$$\begin{array}{ccc} H_1(\theta_1) & \xrightarrow{R_*} & H_1(\theta_2) & \xrightarrow{(m_1, m_2)_*^{-1}} & H_1(\theta_1) \\ \downarrow (m_1, m)_* & & & & \downarrow (m_1, m)_* \\ H_1(\theta) & & & & H_1(\theta) \\ \downarrow i_* & & & & \downarrow i_* \\ H_1(T) & \xrightarrow{f_*} & & & H_1(T) \end{array}.$$

Оказывается, это соответствие является не только корректно определенным отображением, но и небольшой модификацией моноида превращается в биекцию. Обозначим через $\langle J \mid J^2 \rangle$ фактор моноида $\langle J \rangle$ по отношению эквивалентности, порожденному соотношением $J^2 = 1$.

ТЕОРЕМА 1. *Моноид $\langle J \mid J^2 \rangle$ является группой, изоморфной группе $\text{Homeot}(T^2)$.*

Формально-алгебраические свойства J -полиэдров тесно связаны с их полезными геометрическими свойствами, описываемыми следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть 3-многообразия M_1 и M_2 получены из 3-многообразия M_0 , возможно несвязного, склеиваниями $f_1, f_2: T_1 \rightarrow T_2$ торов края ∂M_0 . Предположим, что полиэдр $P_0 \subset M_0$, лежащие в нем тэта-кривые θ'_1 и θ'_2 являются неразбивающими тэта-кривыми в торах T_1 и T_2 соответственно и гомеоморфизмом f_1 отображаются друг на друга, а полиэдр P_1 , полученный из полиэдра P_0 склейкой тэта-кривых θ'_1, θ'_2 посредством этого отождествления, является спайном многообразия M_1 . Тогда существуют J -полиэдр R и гомеоморфизм приклейки $g_2: \partial R \rightarrow \theta'_1 \sqcup \theta'_2 \subset P_0$ такие, что полиэдр $P_2 = R \cup_{g_2} P_0$ является спайном многообразия M_2 .*

ЗАМЕЧАНИЕ. Выбор разметки тэта-кривой равносильен выбору гомеоморфизма с точностью до изотопии с некоторой избранной тэта-кривой Θ . Размеченный полиэдр является кобордизмом для тэта-кривой Θ . Умножение размеченных полиэдров совершенно аналогично композиции кобордизмов.

В [4] рассматривается категория $\underline{S}$, объекты которой – все 3-валентные графы, а кобордизмы – все простые полиэдры с краем. Соотношение $J^2 = 1$ естественно в том смысле, что простой спайн, преобразованный посредством этого соотношения, остается простым спайном того же многообразия. В [4] рассматриваются преобразования, позволяющие преобразовать друг в друга любые два простых спайна данного 3-многообразия, и определяется фактор $\underline{Q}$ категории $\underline{S}$ по порожденному этими преобразованиями отношению эквивалентности между кобордизмами в $\underline{S}$. Поэтому $\langle J \rangle$ может рассматриваться как подкатегория в $\underline{S}$, а $\langle J \mid J^2 \rangle$ – как подкатегория в $\underline{Q}$, с той оговоркой, что в определении $\underline{S}$ и $\underline{Q}$ участвуют гомеоморфизмы, а в определении $\langle J \rangle$ и $\langle J \mid J^2 \rangle$ – гомеоморфизмы с точностью до изотопии.

Обозначение умножения полиэдров выбрано слева-направо, хотя для композиции кобордизмов общепринято функциональное справа-налево. Так часто делается для удобства, когда операция умножения реально применяется в вычислениях, например, для записи умножения в группе преобразований или умножения матриц. Предлагаемая в данной работе алгебраическая конструкция разработана именно для реальных “вычислений” простых полиэдров (опробовано и используется), см. также гипотезу в конце статьи.

2. Доказательство теоремы 1. Из-за сингулярных точек типа 2) обратимыми в $\langle J \rangle$ являются только полиэдры, гомеоморфные полиэдру $\theta \times I$. Состоящую из этих полиэдров подгруппу в $\langle J \rangle$ обозначаем $\langle \theta \times I \rangle$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Группа $\langle \theta \times I \rangle$ изоморфна группе $S_3 \times \mathbb{Z}_2$.*

Канонический изоморфизм естественен. Если ребра 1, 2, 3 графа $\theta_1 \subset P \in \langle \theta \times I \rangle$ проецируются в ребра $i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2, 3\} \subset \theta_2$ либо $\{-1, -2, -3\} \subset \theta_2$, то данному полиэдру сопоставляется элемент $((i_1, i_2, i_3), +1) \in S_3 \times \mathbb{Z}_2$ либо $((i_1, i_2, i_3), -1) \in S_3 \times \mathbb{Z}_2$ соответственно. В дальнейшем эти группы не различаем ввиду очевидности данного изоморфизма. При этом для краткости единицу группы обозначаем символом 1, инволюцию из $\mathbb{Z}_2$ как подгруппы $S_3 \times \mathbb{Z}_2$ обозначаем через (-1) , инволюции из S_3 обозначаем (12) , (23) , (32) , оставшиеся элементы S_3 обозначаем (123) , (132) . Символ (-123) соответствует элементу $((123), (-1))$ и т.п. Для размеченного полиэдра P обозначение $-P$ равносильно $(-1)P$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Полиэдры $J, (-1), (12), (23)$ порождают моноид $\langle J \rangle$.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Моноид $\langle J \mid J^2 \rangle$ является группой.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *В полугруппе $\langle J \rangle$ имеют место следующие соотношения:*

- 1) $(-1)J(-1) = J$;
- 2) $(12)J(12) = -J$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Действие (-1) эквивалентно обращению ориентации ребер соответствующей тэта-кривой. Одновременная смена ориентаций ребер у обеих тэта-кривых у J обеспечивает ту же самую склейку двух размеченных $\theta \times [0, 1]$, что и в определении J .

2) Левую часть равенства можно истолковать согласно определению J как полиэдр, склеенный из $\theta_1 \times I$ и $\theta_2 \times I$ таким образом, что $e_1 \times \{1\}$ из $\theta_1 \times [0, 1]$ отождествляется с $-e_1 \times \{0\}$ в $\theta_2 \times [0, 1]$ и $e_2 \times \{1\}$ из $\theta_1 \times [0, 1]$ отождествляется с $e_2 \times \{0\}$ в $\theta_2 \times [0, 1]$. Такой же размеченный полиэдр задается правой частью равенства.

СЛЕДСТВИЕ 3. Элемент (-1) лежит в центре моноида $\langle J \rangle$.

Изоморфизм $m_*: H_1(\theta) \rightarrow \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$, индуцированный разметкой m тэта-кривой θ , определим, сопоставляя циклу $e_1 e_3^{-1} \subset \theta$ вектор-строку $(10) \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ и циклу $e_2 e_3^{-1} \subset \theta$ вектор-строку $(01) \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$. Таким образом, размеченный полиэдр P индуцирует эндоморфизм $m_{2*} P_* m_{1*}^{-1}: \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ и, тем самым, индуцирует матричный образ A_P размеченного полиэдра P в кольце матриц $M(2, \mathbb{Z})$. Справедливо равенство $A_{P_1 P_2} = A_{P_1} A_{P_2}$ для любых $P_1, P_2 \in \langle J \rangle$. Матрицы – образы полиэдра J и размеченных полиэдров, гомеоморфных $\theta \times I$, – вычисляем непосредственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Матричные образы полиэдра J и размеченных полиэдров, гомеоморфных $\theta \times I$, имеют вид

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & A_{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & A_{(12)} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ A_{(23)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, & A_{(13)} &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & A_J &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Все вычисленные матрицы невырожденные. Известно, что эти матрицы порождают $GL(2, \mathbb{Z})$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Каждый размеченный полиэдр $P \in \langle J \rangle$ определяет автоморфизм группы $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$, и полученный гомоморфизм $A: \langle J \rangle \rightarrow GL(2, \mathbb{Z})$ является эпиморфизмом.

Так как $A_J^2 = E$, то отображение A индуцирует корректно определенный гомоморфизм $A^*: \langle J \mid J^2 \rangle \rightarrow GL(2, \mathbb{Z})$. Построим отображение $Q: GL(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \langle J \mid J^2 \rangle$ в обратную сторону.

Известно, что $GL(2, \mathbb{Z})$ на образующих

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

имеет копредставление [14, с. 126]

$$\langle R_1, R_2, R_3, Z \mid R_1^2 = R_2^2 = R_3^2 = E, (R_1 R_2)^3 = (R_1 R_3)^2 = Z, Z^2 = E \rangle.$$

Замечая, что $R_1 = A_{(12)}$, $R_2 = -A_{(23)}$, $R_3 = -A_J$, $Z = A_{-1}$, определим Q на образующих:

$$R_1 \rightarrow (12), \quad R_2 \rightarrow -(23), \quad R_3 \rightarrow -J, \quad Z \rightarrow -1.$$

Из свойств группы $S_3 \times \mathbb{Z}_2$ и предложения 2 легко следует, что для образов образующих выполняются соответствующие соотношения, поэтому Q корректно определено и, значит, является эпиморфизмом. Следовательно, A^* и Q – взаимно обратные изоморфизмы между $\langle J \mid J^2 \rangle$ и $GL(2, \mathbb{Z})$. Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 2. Пусть символы $\theta_1, \theta_2, a \vee b, f$ означают то же, что и в определении полиэдра J . Будем считать графы $\theta_1, \theta_2, a \vee b$ лежащими в торах T_1, T_2, T соответственно. Распространим по непрерывности клеточное отображение f из определения полиэдра J до отображения $F: T_1 \sqcup T_2 \rightarrow T$, являющегося гомеоморфизмом на каждом открытом диске $T_i - \theta_i, i = 1, 2$. Пара $(\text{Cyl}(F), \text{Cyl}(f))$, полученная из цилиндров отображений F и f , состоит из утолщенного тора $T^2 \times I$, где $I = [0, 1]$, и размеченного полиэдра J . Обозначим ее через $(T^2 \times I, J)$.

Подполиэдр P 3-многообразия M называется *собственно вложенным*, если $\text{Int } P \subset \text{Int } M$ и $\partial P \subset \partial M$. Так что пара $(T^2 \times I, J)$ определяет собственное вложение полиэдра J в утолщенный тор.

Очевидным образом умножение размеченных полиэдров можно распространить до умножения пар вида (утолщенный тор, собственно вложенный размеченный полиэдр). Тогда пара $(T^2 \times I, J)$ и пары $(T^2 \times I, \theta \times I)$ порождают моноид, изоморфный $\langle J \rangle$, а с соотношением $(T^2 \times I, J)^2 = (T^2 \times I, \theta \times I)$, где $\theta \times I$ – прямое произведение размеченной тэта-кривой на отрезок, порождают группу, изоморфную $\langle J \mid J^2 \rangle$.

Предположим, что на краях утолщенного тора $T^2 \times I$ лежат размеченные тэта-кривые θ'_1 и θ'_2 . Такую тройку обозначим через $(T^2 \times I, \theta'_1, \theta'_2)$. Аналогично определяется умножение троек; тройки все, очевидно, обратимы и образуют группу, изоморфную группе $\langle J \mid J^2 \rangle$. Разумеется, пары и тройки рассматриваются с точностью до гомеоморфизма, сохраняющего разметки тэта-кривых. Так что элементы моноида пар, дающие один и тот же элемент группы пар, “стиранием” полиэдра дают одну и ту же тройку.

Этот факт связывает свойства пар, троек и размеченных полиэдров из $\langle J \rangle$. Нам он понадобится для доказательства теоремы 2 и может быть сформулирован следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Для любой тройки $(T^2 \times I, \theta'_1, \theta'_2)$ найдутся полиэдр $P \in \langle J \rangle$ и собственное вложение $i: P \rightarrow T^2 \times I$ такие, что $di(P) = \theta'_1 \sqcup \theta'_2$.*

Докажем теорему 2. Обозначим через M' многообразие, гомеоморфное M_2 и полученное из многообразия M_0 по сути той же склейкой, но с склеенным утолщенным тором:

$$M' = M_0 \sqcup (T_1 \times [0, 1]) / (\text{id}_1 : T_1 \times \{0\} \rightarrow T_1, f' : T_1 \times \{1\} \rightarrow T_2),$$

где id_1 индуцировано тождеством $T_1 \rightarrow T_1$, f' индуцировано гомеоморфизмом f_2 . Обозначим через $p': P_0 \rightarrow M'$ вложение, индуцированное гомеоморфизмом вложения $M_0 \subset M'$. Имеем тройку $(T_1 \times [0, 1], p'(\theta'_1), p'(\theta'_2))$.

Согласно предложению 4 найдутся полиэдр $R \in \langle J \rangle$ и собственное вложение $r: R \rightarrow T_1 \times [0, 1]$, совмещающее края полиэдров $r(R)$ и $p'(P_0)$.

Частичное отображение $r^{-1}p': \theta'_1 \sqcup \theta'_2 \rightarrow \theta_1 \sqcup \theta_2$ обозначим через g_2 , а результат склейки полиэдров $P_0 \cup_{g_2} R$ – через P_2 .

Учитывая, что P_1 – спайн и что $T_1 \times [0, 1] - r(R)$ является произведением открытого диска на отрезок, получаем, что P_2 – спайн с очевидным вложением $p: P_2 \rightarrow M'$, определяемым формулами $p|_{P_1} = p', p|_R = r$. Поскольку M' гомеоморфно M_2 , то P_2 – спайн многообразия M_2 . Доказательство теоремы 2 завершено.

Условия теоремы 2, вообще говоря, позволяют тэта-кривым θ'_1, θ'_2 не лежать на крае полиэдра P_0 , проходить по внутренностям клеток, через вершины (сингулярные точки типа 2)) и т.п. Практический интерес представляет следующий вариант этого результата.

СЛЕДСТВИЕ 5. *Если в условиях теоремы 2 полиэдр P_0 простой с краем $\partial P_0 = \theta'_1 \sqcup \theta'_2$, то полиэдры P_1 и P_2 являются простыми спайнами многообразий M_1 и M_2 .*

ЗАМЕЧАНИЕ. Гомеоморфизм склейки торов задают обычно матрицей из $GL(2, \mathbb{Z})$. Изоморфизмы $GL(2, \mathbb{Z}) \cong \langle J \mid J^2 \rangle \cong \text{Homeot}(T^2)$, построенные в работе, дают конструктивный метод подбора полиэдра $R \in \langle J \rangle$ по матрице гомеоморфизма. Из таких полиэдров легко выбрать содержащий минимально возможное число вершин – критерием минимальности (неминимальности) служит отсутствие (наличие) в полиэдре 2-угольников. Из анализа построенного копредставления для $\langle J \mid J^2 \rangle$ несложно выводится,

что для любого вложения пары тэта-кривых в края утолщенного тора минимальный J -полиэдр единственен.

ГИПОТЕЗА. Для любой пары тэта-кривых на краях утолщенного тора простой полиэдр, имеющий минимально возможное число вершин среди полиэдров с краем, состоящим из данных тэта-кривых, и разрезающих утолщенный тор до шара, является J -полиэдром.

Компьютерным перебором проверена (“доказана”) эта общая минимальность J -полиэдров без 2-угольников с числом вершин до восьми включительно.

Автор благодарит С. В. Матвеева за постановку задач и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Casler B. G. An embedding theorem for connected 3-manifolds with boundary // Proc. Amer. Math. Soc. 1965. V. 16. P. 559–566.
- [2] Матвеев С. В. Специальные остовы кусочно линейных многообразий // Матем. сб. 1973. Т. 92. № 2. С. 282–293.
- [3] Матвеев С. В. Универсальные 3-деформации специальных полиэдров // УМН. 1987. Т. 42. № 3. С. 193–194.
- [4] Turaev V. G., Viro O. Y. State sum invariants of 3-manifolds and quantum $6j$ -symbols // Topology. 1992. V. 31. P. 865–902.
- [5] Матвеев С. В., Фоменко А. Т. Изоэнергетические поверхности гамильтоновых систем, перечисление трехмерных многообразий в порядке возрастания их сложности и вычисление объемов замкнутых гиперболических многообразий // УМН. 1988. Т. 43. № 1. С. 5–22.
- [6] Benedetti R., Petronio C. Branched standard spines of 3-manifolds. Lecture Notes in Math. V. 1653. New York: Springer, 1997.
- [7] Матвеев С. В. Гипотеза Зимана для неутолщаемых специальных полиэдров эквивалентна гипотезе Эндрюса–Кертиса // Сиб. матем. ж. 1987. Т. 28. № 6. С. 66–80.
- [8] Матвеев С. В. Преобразования специальных спайнов и гипотеза Зимана // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. № 5. С. 1104–1116.
- [9] Gillman D., Rolfsen D. The Zeeman Conjecture for standard spines is equivalent to the Poincaré Conjecture // Topology. 1983. V. 22. № 3. P. 315–323.
- [10] Matveev S. V. Complexity theory of three-dimensional manifolds // Acta Appl. Math. 1990. V. 19. P. 101–130.
- [11] Matveev S. V. On a computer recognition of 3-manifolds. MSRI Preprint No. 1997-028: MSRI, 1997.
- [12] Adams C. SNAPPEA: The Week’s hyperbolic 3-manifolds program // Notices Amer. Math. Soc. 1990. V. 37. P. 273–275.
- [13] Цишанг Х., Форт Э., Колдевай Х.-Д. Поверхности и разрывные группы. М.: Наука, 1988.
- [14] Коксетер Г. С. М., Мозер У. О. Порождающие элементы и определяющие соотношения. М.: Наука, 1980.

Челябинский государственный университет
E-mail: ovch@csu.ac.ru

Поступило
03.09.98
Исправленный вариант
09.07.99