Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. И. Пелешенко, В. А. Катан, Об интегральных операторах свертки, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 4, 551–555

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1198>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 14:40:47

УДК 517.948.5

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ СВЕРТКИ

Б. И. Пелешенко, В. А. Катан

В статье исследуются интегралы свертки, определяемые на функциях n переменных из симметричных пространств. Установлены новые аддитивные оценки среднего значения невозрастающей перестановки модуля интеграла свертки $(K^* f)^{**}(t)$ на отрезке $[0, t]$ для любого $t > 0$. В качестве применения полученных оценок доказана ограниченность интегрального оператора свертки, действующего из пересечения симметричных пространств в пространство Марцинкевича.

Библиография: 4 названия.

В статье рассматриваются интегралы свертки

$$(K^* f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x - y) f(y) dy, \quad (1)$$

определяемые для измеримых на n -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ функций $K(x)$ и $f(x)$.

Обозначим через $E(\mathbb{R}^n)$ симметричное пространство функций, заданных на n -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, с фундаментальной функцией $\varphi_E(t)$, и через $E'(\mathbb{R}^n)$ пространство, ассоциированное с $E(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $g^*(t)$ – невозрастающая перестановка модуля измеримой на $\mathbb{R}^n$ функции $g(x)$, $\chi_{[a, b]}(t)$ – характеристическая функция отрезка $[a, b]$,

$$g^{**}(z) = z^{-1} \int_0^z g^*(t) dt.$$

Множество непрерывных, положительных и неубывающих на полуоси $(0, \infty)$ функций $\varphi(t)$, для которых $\varphi(0+) = 0$, $\varphi(\infty) = \infty$, обозначается через Φ . Для любой функции $\varphi(z) \in \Phi$ и $s > 0$ определяется функция растяжения

$$M_\varphi(s) = \sup_{z > 0} \frac{\varphi(sz)}{\varphi(z)}.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть невозрастающая перестановка $K^*(t)$ ядра оператора (1) интегрируема на отрезке $[0, 1]$ и $K^*(t)\chi_{[1, \infty]}(t)$ принадлежит пространству $E(\mathbb{R})$. Тогда для любых функций $f(x) \in E(\mathbb{R}^n)$, $\delta(z) \in \Phi$ и любого $t > 0$ имеет место неравенство

$$(K^* f)^{**}(t) \leq 2 \left(\int_0^{\delta(t)} K^*(z) dz \cdot f^{**}(t) + \|K^* \chi_{[\delta(t), \infty)}\|_{E'(\mathbb{R})} \cdot \|f\|_{E(\mathbb{R}^n)} \right). \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $\delta(z) \in \Phi$ и $t > 0$. Для произвольной функции $f(x) \in E(\mathbb{R}^n)$ и ядра интегрального оператора свертки, удовлетворяющего условиям теоремы, из неравенства О'Нейла [1] в случае $\delta(t) < t$ получаем

$$\begin{aligned} (K^* f)^{**}(t) &\leq t K^{**}(t) f^{**}(t) + \int_1^\infty K^*(z) f^*(z) dz \\ &\leq \int_0^{\delta(t)} K^*(z) dz \cdot f^{**}(t) + \int_{\delta(t)}^t K^*(z) dz \cdot f^{**}(t) + \int_t^\infty K^*(z) f^*(z) dz. \end{aligned} \quad (3)$$

Используя предположение теоремы о ядре $K(x)$ и неравенство типа Гёльдера для симметричных пространств [2], имеем

$$\begin{aligned} \int_{\delta(t)}^t K^*(z) dz \cdot f^{**}(t) &\leq \|K^* \chi_{[\delta(t), \infty)}\|_{E'(\mathbb{R})} \cdot \varphi_E(t) \varphi_{E'}(t) \cdot \frac{1}{t} \|f^* \chi_{[0, t]}\|_{E(\mathbb{R})}, \\ \int_t^\infty K^*(z) f^*(z) dz &\leq \|K^* \chi_{[t, \infty)}\|_{E'(\mathbb{R})} \cdot \|f^* \chi_{[t, \infty)}\|_{E(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Подставляя эти неравенства в (3) и учитывая, что $\varphi_E(t) \varphi_{E'}(t) \leq t$, получим

$$(K^* f)^{**}(t) \leq \int_0^{\delta(t)} K^*(z) dz \cdot f^{**}(t) + 2 \|K^* \chi_{[\delta(t), \infty)}\|_{E'(\mathbb{R})} \cdot \|f\|_{E(\mathbb{R}^n)}.$$

Для $\delta(t) \geq t$ из неравенства О'Нейла следует

$$\begin{aligned} (K^* f)^{**}(t) &\leq t K^{**}(t) f^{**}(t) + \int_t^{\delta(t)} K^*(z) f^*(z) dz + \int_{\delta(t)}^\infty K^*(z) f^*(z) dz \\ &\leq 2 \int_0^{\delta(t)} K^*(z) dz \cdot f^{**}(t) + \|K^* \chi_{[\delta(t), \infty)}\|_{E'(\mathbb{R})} \cdot \|f\|_{E(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть вогнутые функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ из множества Φ таковы, что

$$\int_0^1 \frac{dz}{\varphi(z)} + \int_1^\infty \frac{d\psi(z)}{\varphi(z)} < \infty,$$

и $E(\mathbb{R}^n)$ – симметричное пространство с фундаментальной функцией $\varphi_E(t) = t/\psi(t)$. Если невозрастающая перестановка ядра $K(x)$ оператора (1) удовлетворяет условию

$$\sup_{t>0} K^*(t)\varphi(t) < \infty, \quad (4)$$

то для любых функций $f(x) \in E(\mathbb{R}^n)$, $\delta(z) \in \Phi$ и произвольного $t > 0$ имеет место неравенство

$$(K^*f)^{**}(t) \leq C \left(\frac{\psi(t)}{t} \int_0^{\delta(t)} \frac{dz}{\varphi(z)} + \int_{\delta(t)}^\infty \frac{d\psi(z)}{\varphi(z)} \right) \cdot \|f\|_{E(\mathbb{R}^n)}.$$

Здесь постоянная C не зависит от $f(x)$, $\delta(t)$, t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий теоремы 2 вытекает выполнение условий теоремы 1. Применяя неравенство (4), из теоремы 1 получим

$$(K^*f)^{**}(t) \leq C \left(\frac{1}{t} \int_0^{\delta(t)} \frac{dz}{\varphi(z)} \int_0^t f^*(z) dz + \left\| \frac{\chi_{[\delta(t), \infty)}(\cdot)}{\varphi(\cdot)} \right\|_{E'(\mathbb{R})} \cdot \|f\|_{E(\mathbb{R}^n)} \right). \quad (5)$$

Далее оцениваем интеграл с помощью неравенства типа Гёльдера для симметричных пространств:

$$\int_0^t f^*(z) dz \leq \varphi_{E'}(t) \|f\|_{E(\mathbb{R}^n)} = \psi(t) \|f\|_{E(\mathbb{R}^n)}.$$

Из вложения пространства Лоренца в симметричное пространство с той же фундаментальной функцией [2] получаем

$$\left\| \frac{\chi_{[\delta(t), \infty)}(\cdot)}{\varphi(\cdot)} \right\|_{E'(\mathbb{R})} \leq \int_{\delta(t)}^\infty \frac{d\psi(z)}{\varphi(z)}.$$

Подставляя эти неравенства в неравенство (5), завершаем доказательство теоремы 2.

ТЕОРЕМА 3. Пусть вогнутая функция $\varphi(z)$ из множества Φ такова, что

$$\int_0^1 M_\varphi\left(\frac{1}{z}\right) dz + \int_1^\infty M_\varphi\left(\frac{1}{z}\right) \frac{dz}{z} < \infty,$$

и для вогнутой фундаментальной функции симметричного пространства $E(\mathbb{R}^n)$ выполняется неравенство

$$\int_1^\infty M_\varphi\left(\frac{1}{z}\right) d\left(z M_{\varphi_E}\left(\frac{1}{z}\right)\right) < \infty.$$

Если невозрастающая перестановка ядра $K(x)$ удовлетворяет условию (4), то для любых функций $f(x) \in E(\mathbb{R}^n)$, $\delta(z) \in \Phi$ и любого $t > 0$ справедливо неравенство

$$(K^*f)^{**}(t) \leq C \left(\frac{\delta(t)}{\varphi(\delta(t))} f^{**}(t) + \frac{\delta(t)}{\varphi(\delta(t))\varphi_E(\delta(t))} \|f\|_{E(\mathbb{R}^n)} \right).$$

Здесь постоянная C не зависит от $f(x)$, $\delta(t)$, t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что интеграл

$$\int_0^{\delta(t)} K^*(z) dz$$

существует, и оценим его. Используя условие конечности интеграла

$$\int_0^1 M_\varphi\left(\frac{1}{z}\right) dz,$$

имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta(t)} K^*(z) dz &\leq C \frac{1}{\varphi(\delta(t))} \int_0^{\delta(t)} \frac{\varphi(\delta(z))}{\varphi(z)} dz = C \frac{\delta(t)}{\varphi(\delta(t))} \int_0^1 \frac{\varphi(\delta(z))}{\varphi(s\delta(z))} ds \\ &\leq C \frac{\delta(t)}{\varphi(\delta(t))} \int_0^1 M_\varphi\left(\frac{1}{s}\right) ds \leq C \frac{\delta(t)}{\varphi(\delta(t))}. \end{aligned}$$

Из вложения пространства Лоренца в симметричное пространство с той же (или эквивалентной) фундаментальной функцией [2] и условия (4) получаем

$$\begin{aligned} \|K^* \chi_{[\delta(t), \infty)}\|_{E'(\mathbb{R})} &\leq \int_{\delta(t)}^\infty K^*(z) d\varphi_{E'}(z) \leq C \frac{\varphi_{E'}(\delta(t))}{\varphi(\delta(t))} \int_{\delta(t)}^\infty \frac{\varphi(\delta(z))}{\varphi(z)} d\left(\frac{\varphi_{E'}(z)}{\varphi_{E'}(\delta(z))}\right) \\ &\leq C \frac{\varphi_{E'}(\delta(t))}{\varphi(\delta(t))} \int_1^\infty \frac{\varphi(\delta(z))}{\varphi(s\delta(z))} d\left(s \frac{\varphi_{E'}(z)}{\varphi_{E'}(s\delta(z))}\right) \\ &\leq C \frac{\delta(t)}{\varphi(\delta(t))\varphi_{E'}(\delta(t))} \int_1^\infty M_\varphi\left(\frac{1}{s}\right) d\left(s M_{\varphi_E}\left(\frac{1}{s}\right)\right). \end{aligned} \quad (6)$$

Так как по условию интеграл

$$\int_1^\infty M_\varphi\left(\frac{1}{s}\right) d\left(s M_{\varphi_E}\left(\frac{1}{s}\right)\right)$$

существует, из (6) следует, что

$$\|K^* \chi_{[\delta(t), \infty)}\|_{E'(\mathbb{R})} \leq C \frac{\delta(t)}{\varphi(\delta(t))\varphi_{E'}(\delta(t))}.$$

Для завершения доказательства теоремы 3 подставим полученные оценки в неравенство (2).

Пусть $\mathcal{M}_\varphi(\mathbb{R}^n)$ – пространство Марцинкевича функций n переменных.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнены условия теоремы 3, функция $\delta(t) \in \Phi$ и функции

$$\psi_1(t) = \frac{\delta(t)}{\varphi(\delta(t))\varphi_E(\delta(t))}, \quad \varphi_1(t) = \varphi(\delta(t))$$

являются вогнутыми. Тогда для любой функции $f \in \mathcal{M}_{\varphi_1}(\mathbb{R}^n) \cap E(\mathbb{R}^n)$ выполняется неравенство

$$\|K^* f\|_{\mathcal{M}_{\psi_1}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{\mathcal{M}_{\varphi_1}(\mathbb{R}^n) \cap E(\mathbb{R}^n)}.$$

Здесь постоянная C не зависит от $f(x)$, $\delta(t)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. При выполнении условий теоремы 3 существует постоянная $C > 0$ такая, что для любой функции $f(x) \in E(\mathbb{R}^n)$ и произвольных $\alpha > 0$ и $t > 0$ выполняется неравенство

$$(K^* f)^{**}(t) \leq C \left(\frac{\alpha}{\varphi(\alpha)} f^{**}(t) + \frac{\alpha}{\varphi(\alpha)\varphi_E(\alpha)} \|f\|_{E(\mathbb{R}^n)} \right).$$

Доказательство получаем из теоремы 3, выбрав для каждого $t > 0$ функцию $\delta(z) \in \Phi$, значение которой в t равно α .

Установленные в статье оценки дополняют соответствующие результаты О'Нейла [1], Крейна, Петунина, Семёнова [2], Павлова [3] и др. Утверждение следствия 2 доказано Стефано [4] для операторов дробного интегрирования $K(x) = |x|^{\alpha-n}$, $0 < \alpha < n$, в пространствах $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] O'Neil R. Convolution operators and $L(p, q)$ spaces // Duke Math. J. 1963. V. 30. P. 129–142.
- [2] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семёнов Е. М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
- [3] Павлов Е. А. Об интегральных операторах свертки // Матем. заметки. 1985. Т. 38, № 1. С. 74–79.
- [4] Stefano M. A note on fractional integratio // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1989. P. 31–35.

Днепропетровский государственный агроуниверситет
Днепропетровский государственный университет

Поступило
02.12.97