Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Самовол, Гладкая эквивалентность дифференциальных уравнений и линейные автоморфизмы, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 4, 567–578

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1199>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 16:45:03

УДК 517.91

ГЛАДКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЛИНЕЙНЫЕ АВТОМОРФИЗМЫ

В. С. Самовол

В статье рассматриваются задачи локальной гладкой эквивалентности и линеаризации систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сохранением имеющихся у этих систем линейных автоморфизмов.

Библиография: 7 названий.

Введение. Поводом к изучению задачи, лежащей в основе данной работы, послужил доклад А. Л. Афендикова, сделанный на научно-исследовательском семинаре под руководством А. Д. Брюно в ИМП им. М. В. Келдыша [1]. Автор доклада рассматривал систему обыкновенных дифференциальных уравнений, с которой тесно связано известное в гидродинамике уравнение Гинзбурга–Ландау. Особенность исследовавшейся системы заключается, в частности, в том, что она обладает линейным автоморфизмом, т.е. ее правая часть не меняется в результате некоторой линейной замены переменных.

Одним из наиболее эффективных методов анализа дифференциальных уравнений является их упрощение путем подходящего преобразования координат. В связи с этим представляет интерес вопрос о сохранении имеющегося автоморфизма после таких преобразований. Для формальных и аналитических систем этот вопрос исследован в [2]. В данной работе эта задача изучается для гладких систем.

Рассмотрим вещественную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\xi} = Q(\xi), \quad (1)$$

где $\xi, Q(\xi)$ – векторы из $\mathbb{R}^n$, $Q(\xi)$ – функция класса C^l в некоторой окрестности нуля (здесь $l > 0$ – целое число или ∞), $Q(0) = 0$, матрица $A = Q'(0)$ не имеет собственных чисел с нулевой действительной частью. Точка $\xi = 0$ является неподвижной точкой для системы (1).

Пусть при линейном невырожденном преобразовании

$$\xi = B\eta \quad (2)$$

система (1) переходит в систему

$$\dot{\eta} = \tilde{Q}(\eta),$$

где $\tilde{Q}(\eta) = B^{-1}Q(B\eta)$.

Если при этом оказывается, что $\tilde{Q}(\eta) \equiv Q(\eta)$, то преобразование (2) называется линейным автоморфизмом системы (1) (см. [2]). В дальнейшем предполагается наличие у системы (1) линейного автоморфизма (2). Ниже для краткости слово линейный мы будем часто опускать. Матрицу B будем называть матрицей автоморфизма.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В [2] понятие линейного автоморфизма включает в себя кроме преобразования (2) и линейную замену времени $t = \mu\tau$. Это означает выполнение равенства $\mu B^{-1}AB = A$, где $A = Q'(0)$. Приравнявая определители левой и правой части данного равенства, для вещественной системы (1) получаем, что $\mu = \pm 1$. При этом $\mu = -1$ возможно лишь в случае, когда матрица A имеет четную размерность и число ее жордановых клеток нечетной размерности четно. Ниже мы ограничимся рассмотрением случая $\mu = 1$.

1. Инвариантные многообразия. Хорошо известно, что у системы (1) имеются инвариантные многообразия: устойчивое и неустойчивое, размерности которых совпадают с числом соответствующих элементов спектра матрицы линейной части системы. Широко распространенным и весьма полезным приемом является “выпрямление” этих многообразий, т.е. такая замена переменных, после которой они превращаются в координатные подпространства. В нашем случае необходимо позаботиться о том, чтобы при такой замене переменных сохранялся автоморфизм системы. Покажем, что это всегда можно обеспечить.

После соответствующего линейного преобразования $\xi = Px$, $x = (x^1, x^2)$, нашу систему можно записать в виде

$$\dot{x}^1 = A_1 x^1 + f_1(x^1, x^2), \quad \dot{x}^2 = A_2 x^2 + f_2(x^1, x^2), \quad (3)$$

где A_1 и A_2 – матрицы, спектры которых расположены соответственно слева и справа от мнимой оси. Матрица $\tilde{B}$ автоморфизма системы (3) имеет вид $\tilde{B} = P^{-1}BP$. Кроме того, ясно, что матрица $\tilde{B}$ имеет блочно-диагональную структуру $\tilde{B} = \text{diag}[B_1, B_2]$, и справедливы равенства

$$B_1^{-1}A_1B_1 = A_1, \quad B_2^{-1}A_2B_2 = A_2, \\ f_1(B_1x^1, B_2x^2) = B_1f_1(x^1, x^2), \quad f_2(B_1x^1, B_2x^2) = B_2f_2(x^1, x^2).$$

У системы (3) имеются два инвариантных многообразия: устойчивое ($x^2 = \varphi(x^1)$) и неустойчивое ($x^1 = \tilde{\varphi}(x^2)$), содержащие начало координат. Наша цель – доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Устойчивое и неустойчивое многообразия обладают автоморфизмом системы, т.е.*

$$\varphi(B_1x^1) = B_2\varphi(x^1), \quad \tilde{\varphi}(B_2x^2) = B_1\tilde{\varphi}(x^2). \quad (4)$$

Это, по сути дела, означает, что “выпрямляющая” замена переменных сохраняет автоморфизм системы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся рассмотрением устойчивого многообразия.

Функция $\varphi(u)$ удовлетворяет уравнению в частных производных

$$\varphi'_u(u)(A_1u + f_1(u, \varphi(u))) = A_2\varphi(u) + f_2(u, \varphi(u)). \quad (5)$$

Здесь $\varphi'_u(u)$ – матрица первых производных функции $\varphi(u)$.

Рассмотрим функцию $\psi(u) = B_2^{-1}\varphi(B_1u)$. Для того чтобы доказать наше утверждение, достаточно показать, что функция $\psi(u)$ удовлетворяет уравнению

$$\psi'_u(u)(A_1u + f_1(u, \psi(u))) = A_2\psi(u) + f_2(u, \psi(u)). \quad (6)$$

Тогда из единственности устойчивого многообразия следует, что $\psi(u) \equiv \varphi(u)$ и равенство (4) доказано. Покажем справедливость (6).

Из определения функции $\psi(u)$ следует, что левая часть уравнения (6) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}\psi'_u(u)(A_1u + f_1(u, \psi(u))) &= B_2^{-1}\varphi'_u(B_1u)B_1(A_1u + f_1(u, B_2^{-1}\varphi(B_1u))) \\ &= B_2^{-1}\varphi'_u(B_1u)(B_1A_1u + B_1f_1(u, B_2^{-1}\varphi(B_1u))) \\ &= B_2^{-1}\varphi'_u(B_1u)(A_1B_1u + f_1(B_1u, B_2B_2^{-1}\varphi(B_1u))) \\ &= B_2^{-1}\varphi'_u(B_1u)(A_1B_1u + f_1(B_1u, \varphi(B_1u))).\end{aligned}\quad (7)$$

Далее используем то, что функция $\varphi(u)$ удовлетворяет уравнению (5), которое мы запишем таким образом:

$$\varphi'_u(B_1u)(A_1B_1u + f_1(B_1u, \varphi(B_1u))) = A_2\varphi(B_1u) + f_2(B_1u, \varphi(B_1u)).$$

Отсюда и из (7) получаем следующее:

$$\begin{aligned}\psi'_u(u)(A_1u + f_1(u, \psi(u))) &= B_2^{-1}A_2\varphi(B_1u) + B_2^{-1}f_2(B_1u, \varphi(B_1u)) \\ &= A_2B_2^{-1}\varphi(B_1u) + f_2(u, B_2^{-1}\varphi(B_1u)) \\ &= A_2\psi(u) + f_2(u, \psi(u)),\end{aligned}$$

и равенство (6) установлено.

Отметим, что использованное выше равенство

$$B_2^{-1}f_2(B_1u, \varphi(B_1u)) = f_2(u, B_2^{-1}\varphi(B_1u))$$

следует из того, что $\tilde{B}$ является матрицей автоморфизма системы (3). Теорема доказана.

Отметим, что если $\xi(\xi^0, t)$ – решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию $\xi(\xi^0, 0) = \xi^0$ и (2) – автоморфизм системы, то имеют место равенства

$$\xi(B\xi^0, t) = B\xi(\xi^0, t), \quad \xi(B^{-1}\xi^0, t) = B^{-1}\xi(\xi^0, t). \quad (8)$$

Действительно, поскольку (2) является автоморфизмом системы (1), то вместе с $\xi(\xi^0, t)$ решением этой системы является и функция $\xi_1(\xi^0, t) = B^{-1}\xi(B\xi^0, t)$, причем $\xi_1(\xi^0, 0) = \xi^0$. Отсюда и из теоремы единственности, очевидно, следуют равенства (8). Таким образом, оператор сдвига по траекториям системы обладает тем же автоморфизмом, что и сама система.

2. Гладкая эквивалентность систем уравнений. Следующий вопрос, который нас интересует, заключается в анализе ситуации, описываемой известной теоремой Стернберга–Ченя о локальной гладкой эквивалентности систем обыкновенных дифференциальных уравнений [3, теорема 12.2]. Достаточные условия такой эквивалентности и методы построения сопрягающего диффеоморфизма хорошо известны. Остается выяснить возможность сохранения автоморфизма системы уравнений при соответствующих ее преобразованиях.

Рассмотрим две системы уравнений

$$\dot{\xi} = Q_1(\xi), \quad (9)$$

$$\dot{\eta} = Q_2(\eta), \quad (10)$$

где $\xi, \eta, Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^n$, $n > 0$, функции Q_1, Q_2 принадлежат классу C^l , $l \geq 1$,

$$Q_1(0) = Q_2(0) = 0, \quad \frac{\partial Q_1(0)}{\partial \xi} = \frac{\partial Q_2(0)}{\partial \eta} = A = \text{diag}[A_1, A_2],$$

A_i – квадратные матрицы размера n_i , $n_1 + n_2 = n$, спектр матрицы A_1 лежит левее, а спектр матрицы A_2 – правее мнимой оси.

Пусть, кроме того, системы (9) и (10) обладают линейным автоморфизмом с матрицей B , т.е.

$$B^{-1}Q_1(B\xi) \equiv Q_1(\xi), \quad B^{-1}Q_2(B\eta) \equiv Q_2(\eta).$$

В соответствии с теоремой 1 будем считать, что у систем (9) и (10) имеются “выпрямленные” инвариантные многообразия

$$\begin{aligned} M_{1\xi} &= \{\xi_i = 0, 1 \leq i \leq n_1\}, & M_{2\xi} &= \{\xi_i = 0, n_1 + 1 \leq i \leq n_1 + n_2\}, \\ M_{1\eta} &= \{\eta_i = 0, 1 \leq i \leq n_1\}, & M_{2\eta} &= \{\eta_i = 0, n_1 + 1 \leq i \leq n_1 + n_2\}. \end{aligned}$$

Через $\Lambda = \{\lambda_i, 1 \leq i \leq n\}$ будем обозначать спектр матрицы A .

Если существует диффеоморфизм $\xi = g(\eta)$ класса C^k , $k \geq 1$, приводящий систему (9) к виду (10) в некоторой окрестности начала координат, то говорят, что системы (9) и (10) C^k -эквивалентны (локально эквивалентны). Если при этом система (10) линейна, то говорят о C^k -линеаризации системы (9). Нас интересует существование указанного диффеоморфизма, коммутирующего с линейным автоморфизмом системы, т.е. такого, что $g(B\eta) \equiv Bg(\eta)$. В этом случае мы будем говорить о C^k -эквивалентности систем (9) и (10) с сохранением автоморфизма.

Возвращаясь к уравнению Гинзбурга–Ландау, упомянутому в начале данной статьи, и связанной с ним системе уравнений (1), обладающей автоморфизмом (2), отметим, что матрица такого автоморфизма удовлетворяет условию

$$B^m = E, \quad (11)$$

где E – единичная матрица, а $m > 0$ – некоторое целое число. Это означает, что собственные числа матрицы B являются корнями степени m из единицы, а также, что жорданова форма матрицы B является диагональной матрицей.

ТЕОРЕМА 2. Для систем (9) и (10), где $l = k + 1$ и имеет место равенство (11), существует целое число $N = N(k, \Lambda)$, обладающее следующим свойством: если при малых ξ для всех частных производных $G^{(i)}(\xi)$ порядка $i \leq k$ разности $G(\xi) = Q_1(\xi) - Q_2(\xi)$ справедлива оценка $\|G^{(i)}(\xi)\| \leq D\|(\xi_1, \dots, \xi_n)\|^{N-i}$ (D – некоторая константа), то для системы (9) существует невырожденная замена переменных класса C^k

$$\xi = g(\eta),$$

которая удовлетворяет условию $g(B\eta) = Bg(\eta)$ и приводит эту систему к виду (10), т.е. системы (9) и (10) C^k -эквивалентны с сохранением автоморфизма.

Существует несколько способов построения сопрягающего диффеоморфизма. Для того чтобы такой диффеоморфизм коммутировал с автоморфизмом системы, воспользуемся схемой, предложенной в доказательстве теоремы 1 из [4].

Введем обозначения $\xi = (x, y)$, $x = (\xi_1, \dots, \xi_{n_1})$, $y = (\xi_{n_1+1}, \dots, \xi_{n_1+n_2})$, $r_1 = \|x\|$, $r_2 = \|y\|$, $r_3 = \|(x, y)\|$.

Если $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – набор из неотрицательных целых чисел, то через F^α будем обозначать производную

$$F^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|} F(\xi)}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \dots \partial \xi_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

В дальнейшем, если возникнет необходимость показать ограниченность какой-либо величины произвольной константой, будем пользоваться так называемой “универсальной” константой $D > 0$, считая, что $D + D = D$, $D \cdot D = D$.

В дальнейшем нам понадобится следующее вспомогательное утверждение, аналогичное лемме 1 из [4].

ЛЕММА 1. Если при малых $\|\xi\|$ $F(\xi) \in C^p$,

$$|F^\alpha| \leq Dr_3^{N-|\alpha|}, \quad N \geq 2(p+1), \quad 0 \leq |\alpha| \leq p, \quad (12)$$

то существуют функции $F_i(\xi)$, $i = 1, 2$, такие, что $F(\xi) = F_1(\xi) + F_2(\xi)$, $F_i(\xi) \in C^p$, $i = 1, 2$, и при малых $\|\xi\|$

$$|F_i^\alpha| \leq Dr_i^{N_1-|\alpha|}, \quad 0 \leq |\alpha| \leq p, \quad i = 1, 2, \quad (13)$$

$N_1 = [(N+1)/2]$ – целая часть числа $(N+1)/2$.

Если функция $F(\xi)$ обладает автоморфизмом системы, удовлетворяющим условию (11), то этим же автоморфизмом обладают и функции $F_i(\xi)$, т.е.

$$F_i(B\xi) = BF_i(\xi), \quad i = 1, 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства (12) следует справедливость неравенства

$$|F^\alpha| \leq D(h_1 + h_2)^{N-|\alpha|}, \quad N \geq 2(p+1), \quad 0 \leq |\alpha| \leq p, \quad (14)$$

$$h_1 = h_1(x) = \|x\| + \|B_1x\| + \|B_1^2x\| + \dots + \|B_1^{m-1}x\|,$$

$$h_2 = h_2(y) = \|y\| + \|B_2y\| + \|B_2^2y\| + \dots + \|B_2^{m-1}y\|.$$

Из (14) при $|\alpha| = 0$ следует, что функцию $F(\xi)$ можно представить в виде $F(\xi) = (h_1 + h_2)^N \varphi(\xi)$, где $\varphi(\xi)$ – ограниченная функция, принадлежащая классу C^p всюду за исключением начала координат. Разлагая $(h_1 + h_2)^N$ по биному Ньютона, получаем, что $F(\xi) = (h_1^{N_1} u_1(h_1, h_2) + h_2^{N_1} u_2(h_1, h_2)) \varphi(\xi)$, где $u_i(h_1, h_2)$ – многочлены от своих переменных, $i = 1, 2$, $N_1 = [(N+1)/2]$.

Положим $F_i(z) = h_i^{N_1} u_i(h_1, h_2) \varphi(z)$, $i = 1, 2$. Повторяя рассуждения доказательства леммы 1 из [4], получаем, что (13) выполняется при малых $\|\xi\|$. Вследствие условия (11) из построения функций $h_i(\xi)$ получаем, что $h_1(B_1x) \equiv h_1(x)$, $h_2(B_2y) \equiv h_2(y)$. Отсюда следует справедливость равенств $u(B\xi) \equiv u(\xi)$, $v(B\xi) \equiv v(\xi)$.

Поскольку $F(\xi) = (u(\xi) + v(\xi)) \varphi(\xi)$, $F(B\xi) = BF(\xi)$ и $u(\xi) + v(\xi) = (h_1 + h_2)^N > 0$ при $\xi \neq 0$, то $\varphi(B\xi) = B\varphi(\xi)$. Следовательно, $F_i(B\xi) = BF_i(\xi)$, $i = 1, 2$.

Из последнего равенства с учетом (13) получаем, что все требования леммы выполнены. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. В соответствии с теоремой 1 будем считать, что у систем (9) и (10) имеются “выпрямленные” инвариантные многообразия

$$\begin{aligned} M_{1\xi} &= \{\xi_i = 0, 1 \leq i \leq n_1\}, & M_{2\xi} &= \{\xi_i = 0, n_1 + 1 \leq i \leq n_1 + n_2\}, \\ M_{1\eta} &= \{\eta_i = 0, 1 \leq i \leq n_1\}, & M_{2\eta} &= \{\eta_i = 0, n_1 + 1 \leq i \leq n_1 + n_2\}. \end{aligned}$$

Введем обозначения $\xi = (x, y)$, $x = (\xi_1, \dots, \xi_{n_1})$, $y = (\xi_{n_1+1}, \dots, \xi_{n_1+n_2})$, $\eta = (u, v)$, $u = (\eta_1, \dots, \eta_{n_1})$, $v = (\eta_{n_1+1}, \dots, \eta_{n_1+n_2})$.

Согласно доказанной лемме 1 функцию $Q(\xi) = Q_1(\xi) - Q_2(\xi)$ можно представить в виде $Q(\xi) = R(\xi) + P(\xi)$, где $R(\xi), P(\xi) \in C^{k+1}$, $R(B\xi) = BR(\xi)$, $P(B\xi) = BP(\xi)$, а также

$$\|R^\alpha\| \leq D\|x\|^{N_1-|\alpha|}, \quad \|P^\alpha\| \leq D\|y\|^{N_1-|\alpha|}, \quad 0 \leq |\alpha| \leq k, \quad N_1 = \left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor. \quad (15)$$

Перепишем систему (9) в виде

$$\dot{\xi} = Q_2(\xi) + R(\xi) + P(\xi).$$

Рассмотрим также систему

$$\dot{\zeta} = Q_2(\zeta) + R(\zeta), \quad \zeta = (x^1, y^1), \quad x^1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad y^1 \in \mathbb{R}^{n_2}. \quad (16)$$

Очевидно, система (16) обладает автоморфизмом (2) по построению.

Мы покажем, что при $N_1 > (2k+1)\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$, где

$$\lambda_{\max} = \max_{1 \leq i \leq n} |\operatorname{Re} \lambda_i|, \quad \lambda_{\min} = \min_{1 \leq i \leq n} |\operatorname{Re} \lambda_i|,$$

системы (10) и (16) C^k -эквивалентны, при этом сопрягающее преобразование коммутирует с автоморфизмом (2). Аналогично показывается C^k -эквивалентность систем (9) и (16) с сохранением автоморфизма. Из транзитивности свойства C^k -эквивалентности следует C^k -эквивалентность систем (9) и (10), что и утверждает теорема.

Отметим, что у системы (16) многообразия $\{x^1 = 0\}$, $\{y^1 = 0\}$ являются инвариантными, что следует из инвариантности многообразий $M_{1\eta}$, $M_{2\eta}$ и оценок (15) при $|\alpha| = 0$.

Пусть $\eta(\eta^0, t)$, $\zeta(\zeta^0, t)$ являются решениями систем (10) и (16) с начальными условиями $\eta(\eta^0, 0) = \eta^0$, $\zeta(\zeta^0, 0) = \zeta^0$. Рассмотрим построенное в [4] отображение, переводящее траектории систем (10) и (16) друг в друга:

$$\begin{aligned} \eta_i^0 &= H_i(\zeta^0), \quad 1 \leq i \leq n, \\ H_i(\zeta^0) &= \zeta_i^0 + \int_0^{+\infty} H_i(\zeta^0, \tau) d\tau, \quad 1 \leq i \leq n, \\ H_i(\zeta^0, \tau) &= \sum_{j=1}^n H_{ij}(\zeta^0, \tau), \quad 1 \leq i \leq n, \\ H_{ij}(\zeta^0, \tau) &= \frac{\partial \eta_i(\zeta(\zeta^0, \tau), -\tau)}{\partial \eta_j^0} R_j(\zeta(\zeta^0, \tau)), \quad 1 \leq i, j \leq n. \end{aligned} \quad (17)$$

В работе [4] установлено, что отображение (17) невырожденно и принадлежит классу C^k , если $N_1 > (2k + 1)\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$. Осталось показать, что оно коммутирует с автоморфизмом (2), т.е. что

$$H(B\zeta^0) = BH(\zeta^0). \quad (18)$$

Для установления справедливости равенства (18) достаточно показать, что

$$\frac{\partial \eta(\zeta(B\zeta^0, \tau), -\tau)}{\partial \eta^0} R(\zeta(B\zeta^0, \tau)) = B \frac{\partial \eta(\zeta(\zeta^0, \tau), -\tau)}{\partial \eta^0} R(\zeta(\zeta^0, \tau)),$$

где $\partial \eta(\zeta, \tau)/\partial \eta^0$ – матрица первых частных производных функции $\eta(\eta^0, \tau)$ при $\eta^0 = \zeta$.

Из (8) следует, что

$$\frac{\partial \eta(B\eta^0, -\tau)}{\partial \eta^0} B = B \frac{\partial \eta(\eta^0, -\tau)}{\partial \eta^0}.$$

Кроме того, из построения функции $R(\zeta)$ имеем $R(B\zeta(\zeta^0, \tau)) = BR(\zeta(\zeta^0, \tau))$. В результате получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta(\zeta(B\zeta^0, \tau), -\tau)}{\partial \eta^0} R(\zeta(B\zeta^0, \tau)) &= B \frac{\partial \eta(\zeta(\zeta^0, \tau), -\tau)}{\partial \eta^0} B^{-1} BR(\zeta(\zeta^0, \tau)) \\ &= B \frac{\partial \eta(\zeta(\zeta^0, \tau), -\tau)}{\partial \eta^0} R(\zeta(\zeta^0, \tau)), \end{aligned}$$

что и завершает доказательство теоремы. Теорема 2 доказана.

Обратим внимание на тот факт, что теорему 2 мы доказали при том предположении, что автоморфизм систем (9) и (10) удовлетворяет условию (11). Оказывается, что если условие (11) не выполняется, то сопрягающего диффеоморфизма для систем (9) и (10), который бы коммутировал с автоморфизмом, может не существовать. При этом правые части систем могут отличаться членами сколь угодно высокого порядка. Покажем это.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим две системы уравнений в $\mathbb{R}^3$:

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = -y, \quad \dot{z} = z + x^m y^{m-1}; \quad (19)$$

$$\dot{u} = u, \quad \dot{v} = -v, \quad \dot{w} = w \quad (20)$$

(m – произвольное положительное целое число), обладающие автоморфизмом с матрицей

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Покажем, что не существует невырожденного диффеоморфизма $\xi = H(\eta)$ (здесь $\xi = (x, y, z)$, $\eta = (u, v, w)$ – вектор-столбцы, записанные в строки), приводящего систему (19) к виду (20) и коммутирующего с автоморфизмом с матрицей (21), т.е. такого, что $H(B\eta) = BH(\eta)$. Доказательство проведем от обратного.

Пусть диффеоморфизм с указанными свойствами существует. Поскольку у системы (20) имеется инвариантное многообразие $w = 0$, у системы (19) в некоторой окрестности начала координат существует инвариантное многообразие вида

$$z = f(x, y), \quad (22)$$

обладающее автоморфизмом (21), т.е. выполняется условие

$$f(2x, 0.5y) = 2f(x, y). \quad (23)$$

Покажем, что это невозможно.

Пусть окрестность нуля, в которой существует инвариантное многообразие (22), имеет радиус ε . Рассуждая как при доказательстве теоремы 1 в работе [5], можно показать, что функция $f(x, y)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$f\left(\frac{xy}{\delta}, \delta\right) = \frac{y}{\delta} \left(f(x, y) + x^m y^{m-1} \ln \left| \frac{y}{\delta} \right| \right), \quad 0 < \delta < \varepsilon,$$

которое, как нетрудно видеть, противоречит равенству (23). Следовательно, системы (19) и (20) не являются гладко эквивалентными с сохранением автоморфизма с матрицей (21) при любом сколь угодно большом m . Причиной этого является, видимо, то обстоятельство, что инвариантные многообразия вида (22), которые имеются у системы (19), не являются инвариантными относительно автоморфизма системы. Данный автоморфизм переводит указанные многообразия не в себя, а в другое многообразие того же вида. Вместе с тем при линеаризации (если таковая существует) одно из таких многообразий должно переходить в координатную плоскость $w = 0$, которая инвариантна относительно автоморфизма системы. Это противоречит тому, что линеаризующий диффеоморфизм коммутирует с автоморфизмом системы.

3. Гладкая линеаризация систем уравнений. Исследуем теперь проблему существования гладкого линеаризующего преобразования системы (1), коммутирующего с ее автоморфизмом (2).

По-прежнему, мы будем считать, что у системы (1) устойчивое и неустойчивое многообразия “выпрямлены”, т.е. совпадают с соответствующими координатными подпространствами. Это, в частности, означает, что матрица A имеет блочно-диагональную структуру $A = \text{diag}[A_1, A_2]$, где собственные числа матрицы A_1 лежат левее, а собственные числа матрицы A_2 – правее мнимой оси.

В дальнейшем нам будет необходимо производить некоторые линейные преобразования координат в исследуемой системе. В частности, будет полезно приведение матрицы линейной части системы к жордановой форме. В подобных случаях в новых координатах система может уже иметь комплексный вид. Важно отметить, что поскольку исходная система вещественна, то при этом всегда будет соблюдаться так называемое условие вещественности (см. [2, гл. 3, п. 1.9]). Поэтому без ограничения общности можно считать, что матрица линейной части системы (1) имеет жорданову форму, а сама система (1) и матрица B автоморфизма (2) удовлетворяют условию вещественности.

Хорошо известно, что с помощью преобразования, близкого к тождественному,

$$\xi = x + F(x), \quad \|F(x)\| = o(\|x\|), \quad (24)$$

где $F(x)$ – полином от своих переменных, можно систему (1) привести к виду

$$\dot{x} = Ax + R_1(x) + R_2(x). \quad (25)$$

Здесь $R_1(x)$ – полином, состоящий из резонансных членов степени, не превосходящей некоторого целого числа N , а для функции $R_2(x)$ выполняется оценка $\|R_2(x)\| = o(\|x\|^N)$

при $\|x\| \rightarrow 0$. При этом число N можно выбрать сколь угодно большим. Кроме того, из [2, гл. 3, п. 1.9, 1.10] следует, что преобразование (24) можно выбрать таким, чтобы оно удовлетворяло условию вещественности, а также коммутировало с автоморфизмом системы, т.е. $F(Bx) = BF(x)$. Таким образом, для функций $R_1(x)$, $R_2(x)$ выполняются условия

$$R_1(Bx) = BR_1(x), \quad R_2(Bx) = BR_2(x).$$

Пусть задано некоторое целое число $k > 0$. Пусть также для системы (25) выполнено неравенство $N > N(k, \Lambda)$, где $N(k, \Lambda)$ – число, существование которого утверждается в теореме 2. Тогда, применяя к системе (25) теорему 2, получаем, что существует близкое к тождественному преобразование, коммутирующее с автоморфизмом системы, приводящее эту систему к виду

$$\dot{y} = Ay + R_1(y). \quad (26)$$

Отметим, что из доказательства теоремы 2 следует, что указанное преобразование удовлетворяет условию вещественности.

Для формулировки заключительных результатов запишем систему (26) в виде

$$\dot{y}_i = \varepsilon_i y_{i-1} + \lambda_i y_i + a_i(y), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (27)$$

$\varepsilon_i = 0$ или $\varepsilon_i = \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $a_i(y) = \sum_{|s|=2}^N a_s^i y^s$, $s = (s_1, \dots, s_n)$ – неотрицательные целочисленные наборы, $|s| = \sum_{i=1}^n s_i$. Кроме того, считаем, что $\operatorname{Re} \lambda_{i+1} \leq \operatorname{Re} \lambda_i < 0$ при $1 \leq i \leq n_1 - 1$ и $\operatorname{Re} \lambda_{i+1} \geq \operatorname{Re} \lambda_i > 0$ при $n_1 + 1 \leq i \leq n_1 + n_2 - 1$, $n_1 + n_2 = n$.

Для каждого целочисленного набора $s \in W = \bigcup_{i=1}^n \{s : a_s^i \neq 0\}$ положим

$$\rho_{m,k}(s) = \begin{cases} \sum_{i=1}^m s_i |\operatorname{Re} \lambda_i| - k |\operatorname{Re} \lambda_m|, & 1 \leq m \leq n_1, \\ \sum_{i=n_1+1}^m s_i \operatorname{Re} \lambda_i - k \operatorname{Re} \lambda_m, & n_1 + 1 \leq m \leq n, \end{cases}$$

$$\rho_k(s) = \max_{1 \leq m \leq n} \rho_{m,k}(s).$$

Будем говорить, что набор s удовлетворяет условию $S(k)$, если выполняется неравенство $\rho_k(s) > 0$. Если же это неравенство выполняется для каждого набора $s \in W$, то будем говорить, что система (27) удовлетворяет условию $S(k)$.

Рассмотрим вместе с системой (27) соответствующую линейную систему

$$\dot{z}_i = \varepsilon_i z_{i-1} + \lambda_i z_i, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (28)$$

Имеет место следующее утверждение [6, теорема 3].

Если для системы (27) выполнено условие $S(k)$, то существует близкое к тождественному преобразование

$$y_i = z_i + h_i(z), \quad |h_i(z)| = o(\|z\|), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (29)$$

класса C^k , приводящее систему (27) к виду (28), т.е. системы (27) и (28) C^k -эквивалентны. Таким образом, условие $S(k)$ является достаточным условием C^k -линеаризации системы (27). Вопрос, который осталось обсудить, заключается в том, можно ли построить преобразование (29) так, чтобы оно коммутировало с автоморфизмом системы (27). Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Если матрица B автоморфизма системы (27) удовлетворяет условию (11), то условие $S(k)$ является достаточным условием для существования преобразования (29), приводящего эту систему к линейному виду (28) и коммутирующего с автоморфизмом системы, т.е. система (27) C^k -линеаризуема с сохранением автоморфизма.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Искомые функции $h_i(z)$ должны удовлетворять системе уравнений в частных производных, характеристическая система которой имеет вид

$$\dot{z}_i = \varepsilon_i z_{i-1} + \lambda_i z_i, \quad \dot{h}_i = \varepsilon_i h_{i-1} + \lambda_i h_i + a_i(z + h), \quad 1 \leq i \leq n. \quad (30)$$

Наша цель – показать, что у системы (30) имеется инвариантное многообразие класса C^k вида $h = \varphi(z)$, $\|\varphi(z)\| = o(\|z\|)$, удовлетворяющее условию $\varphi(Bz) = B\varphi(z)$. Это будет означать, что отображение $y = z + \varphi(z)$ является искомым.

Следуя технологии линеаризации, разработанной в [5]–[7], произведем в системе (30) замену переменных $h = g + \Phi(z)$, $\Phi(z) \in C^k$, после которой данная система примет вид

$$\dot{z}_i = \varepsilon_i z_{i-1} + \lambda_i z_i, \quad \dot{g}_i = \varepsilon_i g_{i-1} + \lambda_i g_i + \tilde{a}_i(z, g) + \tilde{a}_i(z), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (31)$$

где функции $\tilde{a}_i(z, g), \tilde{a}_i(z)$ таковы, что $\tilde{a}_i(z, 0) \equiv 0$, $|\tilde{a}_i(z)| = o(\|z\|^N)$, причем число N можно сделать сколь угодно большим.

Ниже мы покажем, что функция $\Phi(z)$ может быть построена так, что

$$\Phi(Bz) = B\Phi(z). \quad (32)$$

Вследствие этого система (31) обладает линейным автоморфизмом с матрицей $\tilde{B} = \text{diag}[B, B]$.

Применяя к системе (31) доказанную выше теорему 2, получаем, что существует преобразование $g = g^1 + \Phi^1(z)$, $\|\Phi^1(z)\| = o(\|z\|)$, $\Phi^1(z) \in C^k$, приводящее эту систему к виду

$$\dot{z}_i = \varepsilon_i z_{i-1} + \lambda_i z_i, \quad \dot{g}_i^1 = \varepsilon_i g_i^1 + \lambda_i g_i^1 + \tilde{a}_i(z, g^1), \quad 1 \leq i \leq n. \quad (33)$$

При этом для функции $\Phi^1(z)$ выполняется условие $\Phi^1(Bz) = B\Phi^1(z)$. У системы (33) многообразие $g^1 = 0$ инвариантно, следовательно, у системы (31) многообразие $g = \Phi^1(z)$ также инвариантно, откуда следует, что преобразование $h = \varphi(z) = \Phi(z) + \Phi^1(z) \in C^k$ является искомым и удовлетворяет требуемому условию $\varphi(Bz) = B\varphi(z)$.

Нам осталось показать, что функция $\Phi(z)$ может быть построена так, что выполнено условие (32).

В работах [5]–[7] вектор-функция $\Phi(z) = (\Phi_1(z), \dots, \Phi_n(z))$ строится следующим образом:

$$\Phi_i(z) = \sum_{|s|=2}^N b_s^i z^s T^\varpi, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (34)$$

где z^s – резонансные наборы, удовлетворяющие условию $S(k)$, $T^\varpi = t_1^{\varpi_1} \dots t_n^{\varpi_n}$ – мономы от переменных $t_1(z), \dots, t_n(z)$, причем функции $t_j(z)$, $1 \leq j \leq n$, таковы, что производная каждой из них в силу линейной системы (28) равна 1.

Из способа построения функций $\Phi_i(z)$, приведенного в [5]–[7], следует, что для вектор-функции $\tilde{\Phi}(z) = (\tilde{\Phi}_1(z), \dots, \tilde{\Phi}_n(z))$,

$$\tilde{\Phi}_i(z) = \sum_{|s|=2}^N b_s^i z^s, \quad 1 \leq i \leq n,$$

выполняется условие

$$\tilde{\Phi}(Bz) = B\tilde{\Phi}(z). \quad (35)$$

Ниже мы покажем, что функции $t_j(z)$, $1 \leq j \leq n$, можно выбрать таким образом, что для них будет выполняться условие

$$t_j(Bz) = t_j(z), \quad 1 \leq j \leq n. \quad (36)$$

Тогда с учетом (35) для функции $\Phi(z)$ будет выполняться требуемое условие (32), и теорема 3 будет доказана. Нам осталось убедиться в справедливости равенства (36).

Пусть для набора s выполнено условие $\rho_k(s) > 0$. Рассмотрим непустое множество M_s целых чисел $\tilde{m}$, $1 \leq \tilde{m} \leq n$, для которых справедливо неравенство $\rho_{\tilde{m},k}(s) > 0$, и определим число

$$\bar{m} = m(s) = \max_{\tilde{m} \in M_s} \tilde{m},$$

являющееся максимальным элементом множества M_s .

Отметим, что если $\bar{m} = m(s) < n$, то $\operatorname{Re} \lambda_{\bar{m}+1} \neq \operatorname{Re} \lambda_{\bar{m}}$. Пусть для определенности $1 \leq \bar{m} \leq n_1$.

В работах [5]–[7] в качестве функций $t_j(z)$, $1 \leq j \leq n_1$, рассматривались функции вида $t_{\bar{m}}(z) = t(z_1, \dots, z_{\bar{m}})$, определенные как время, за которое точка $z = (z_1, \dots, z_{\bar{m}}, 0, \dots, 0)$, двигаясь по траектории системы (28), достигнет сферы $\sum_{i=1}^{\bar{m}} |z_i|^2 = \tilde{\varepsilon}^2$, где $\tilde{\varepsilon}$ – некоторое положительное число. При этом функции $t_{\bar{m}}(z)$ определены корректно и выполняются все требования относительно гладкости функций (34).

Отметим, что поскольку $\operatorname{Re} \lambda_{\bar{m}+1} \neq \operatorname{Re} \lambda_{\bar{m}}$, то матрица A системы (28) имеет блочно-диагональную структуру $A = \operatorname{diag}[\tilde{A}_1, \tilde{A}_2]$, где размерность матрицы $\tilde{A}_1$ равна числу $\bar{m}$. Тогда аналогичную структуру имеет и матрица автоморфизма $B = \operatorname{diag}[\tilde{B}_1, \tilde{B}_2]$, где $\tilde{B}_1$ – матрица размерности $\bar{m}$.

Для наших целей в качестве функций $t_{\bar{m}}(z)$ мы рассмотрим функции, определенные как время, за которое точка $z = (z_1, \dots, z_{\bar{m}}, 0, \dots, 0)$ достигнет поверхности

$$\sum_{i=1}^{\bar{m}} R_i(z) = \tilde{\varepsilon}^2, \quad R_i(z) = \|\tilde{B}_1^{i-1} z\|^2, \quad 1 \leq i \leq \bar{m}.$$

Нетрудно видеть, что функции $t_{\bar{m}}(z)$ определены корректно. Вместе с тем они удовлетворяют всем условиям, которые обеспечивают гладкость функций (34). И, наконец, что самое главное, функции $t_{\bar{m}}(z)$ удовлетворяют условию $t_{\bar{m}}(Bz) = t_{\bar{m}}(z)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что преобразования, построенные при доказательствах утверждений данной работы, обладают тем же свойством, что и преобразования, построенные в [2], а именно: коммутируют не просто с отдельно взятым автоморфизмом соответствующей системы, а одновременно со всеми линейными автоморфизмами, имеющимися у системы уравнений.

Идею построения функций h_1, h_2 в доказательстве леммы 1, инвариантных относительно автоморфизма (2), предложил А. Д. Брюно, за что автор выражает ему свою благодарность.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Afendikov A., Mielke A. Bifurcation of homoclinic orbits to a saddlefocus in reversible systems with $SO(2)$ -symmetry. Preprint DANCE № 1. Hannover, Germany: University of Hannover, 1998.
- [2] Брюно А. Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979.
- [3] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
- [4] Самовол В. С. Эквивалентность систем дифференциальных уравнений в окрестности особой точки // Тр. ММО. 1982. Т. 44. С. 213–234.
- [5] Самовол В. С. О необходимом и достаточном условии гладкой линеаризации автономной системы на плоскости в окрестности особой точки // Матем. заметки. 1989. Т. 46. № 1. С. 67–77.
- [6] Самовол В. С. Линеаризация систем дифференциальных уравнений в окрестности инвариантных тороидальных многообразий // Тр. ММО. 1979. Т. 38. С. 187–219.
- [7] Самовол В. С. Критерий C^1 -гладкой линеаризации автономной системы в окрестности невырожденной особой точки // Матем. заметки. 1991. Т. 49. № 3. С. 91–96.

Российский государственный гуманитарный университет
E-mail: samovol@cityline.ru

Поступило
16.06.99