Математические заметки

том 75 выпуск 1 январь 2004

УДК 517.5+517.98+519.21

A-СИСТЕМЫ, НЕЗАВИСИМЫЕ ФУНКЦИИ И МНОЖЕСТВА, ОГРАНИЧЕННЫЕ В ПРОСТРАНСТВАХ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

С. Я. Новиков

Пусть $U \subset L_\circ\big([0,1],\mathscr{M},\mathbf{m}\big)$ – некоторое множество измеримых по Лебегу функций и пусть, далее, заданы два квазинормированных пространства вещественных числовых последовательностей: $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$. Исследованы $(\mathscr{A},\mathscr{B})$-множества U, которые определяются классами $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ по следующей схеме:

$$\forall a=(a_n)\in\mathscr{A},\quad \forall(f_n(t))\in u^{\mathbb{N}}\quad \text{(или для последовательностей,}$$
$$\text{подобных}\quad (f_n(t))\quad \exists E=E(a)\subset[0,1],\quad \mathbf{m}E=1\quad\text{такое, что}$$
$$\{a_n f_n(t)\mathbf{1}_E(t)\}\in\mathscr{B},\qquad t\in[0,1].$$

Рассмотрены три варианта определения $(\mathscr{A},\mathscr{B})$-множеств, один из которых использует независимые в вероятностном смысле функции. Подробно исследован случай $\mathscr{B}=l_\infty$. Оказалось, что $(\mathscr{A},l_\infty)$-независимые множества – это множества, ограниченные или порядково ограниченные в некоторых хорошо известных функциональных пространствах (L_p, $L_{p,q}$ и других), построенных по лебеговой мере. Получена характеризация таких множеств квазинормированными пространствами числовых последовательностей. $(l_1,c_\circ)$- и $(\mathscr{A},l_1)$-множества изучались Е. М. Никишиным.

Библиография: 19 названий.

1. Введение. Опишем общую структуру задач, решению которых посвящена работа. Пусть $U \subset L_\circ\big([0,1],\mathscr{M},\mathbf{m}\big)$ – некоторое множество измеримых по Лебегу функций и заданы два класса вещественных числовых последовательностей: $\mathscr{A}\subset\mathbb{R}^\infty$ и $\mathscr{B}\subset\mathbb{R}^\infty$. Нас будут интересовать $(\mathscr{A},\mathscr{B})$-множества U, которые определяются классами $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ следующим образом: для любой последовательности $a=\{a_n\}\in\mathscr{A}$ и для любой последовательности функций $\{f_n\}$ из множества U существует измеримое подмножество $E=E(a,\{f_n\})\subset[0,1]$ полной меры ($\mathbf{m}E=1$) такое, что для любого $t\in E$ числовая последовательность $\{a_n f_n(t)\}\in\mathscr{B}$.

Для конкретных пространств $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ критерии $(\mathscr{A},\mathscr{B})$-множеств были получены Никишиным в начале 70-х годов. Так, для $\mathscr{A}=l_1$, $\mathscr{B}=c_\circ$ и счетного множества U получаем A-систему; для $\mathscr{B}=l_1$ – систему абсолютной сходимости для $\mathscr{A}$ (см., например, [1]). Мы покажем, что в определении A-системы пространство $c_\circ$ можно заменить пространством l_∞ (следствие 2.6) и именно этот случай, т.е. $\mathscr{B}=l_\infty$, будет в данной работе основным.

Интерес к нему обусловлен следующим обстоятельством. Оказалось, что $(\mathscr{A},l_\infty)$-множества – это множества, ограниченные в некоторых хорошо известных функциональных пространствах. Таким образом, получается характеризация таких множеств квазинормированными пространствами числовых последовательностей. Результаты такого рода получались и раньше. Так, в работе Никишина [1] (см. также [2]) был получен критерий A-системы, который можно сформулировать следующим образом.

Критерий Никишина для A-системы. *Пусть* $\{f_n\} \in (L_\circ(\mathbf{m}))^{\mathbb{N}}$ – *последовательность измеримых функций на* $[0,1]$. *Следующие утверждения эквивалентны*:

1) $\{f_n\}$ – *A-система или* $(l_1,\, c_\circ)$*-множество*;
2) *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует измеримое подмножество* $E_\varepsilon \subset [0,1]$ *такое, что* $\mathbf{m}E_\varepsilon \geqslant 1-\varepsilon$ *и последовательность* $\{f_n\, \mathbf{1}_{E_\varepsilon}\}$ *ограничена в пространстве* $L_{1,\infty}(\mathbf{m})$.

Позднее Ж. Пизье [3] (см. также обзоры [4], [5]), развивая результаты Никишина, доказал эквивалентность следующих утверждений для последовательности $\{f_n\} \in (L_\circ(\mathbf{m}))^{\mathbb{N}}$ и для $p > 0$:

1) для любой последовательности $a = \{a_n\} \in l_p,\ \sup_n |a_n f_n(t)| < \infty$ почти всюду на $[0,1]$, и $\sup_n |a_n f_n(t)| \in L_r(\mathbf{m})$ для некоторого $r \in (0,p)$;
2) существует функция $f \in L_1(\mathbf{m}),\ f \geqslant 0,\ \int_{[0,1]} f\, d\mathbf{m} \leqslant 1$, такая, что $\{f = 0\} \subset \bigcap_n \{f_n = 0\}$ и последовательность $\{f_n \cdot f^{-1/r}\}$ ограничена в пространстве $L_{p,\infty}(\nu)$, где $\nu(E) = \int_E f\, d\mathbf{m},\ E \in \mathscr{M}$.

Критерий Никишина был доказан в [1] как следствие общих теорем о факторизации операторов. Позднее, в [6], этот критерий позволил доказать еще одну весьма общую теорему о факторизации. Заметим, что в критерии Никишина $(\mathscr{A},\mathscr{B})$-множества оказываются ограниченными в $L_{p,\infty}(\mathbf{m})$ после умножения на некоторую функцию, а в теореме Пизье – в пространствах $L_{p,\infty}(\nu)$, полученных заменой меры $\mathbf{m}$.

В данной работе мы таким образом модифицируем определение A-системы, чтобы получить точное описание множеств, ограниченных в функциональных пространствах, построенных по лебеговой мере $\mathbf{m}$. Для этого введены понятия $(\mathscr{A},\mathscr{B})$-независимых и $(\mathscr{A},\mathscr{B})$-свободных множеств. Получены условия ограниченности не только в пространствах $L_{p,\infty}(\mathbf{m})$. Например, описаны симметрично порядково ограниченные множества в лебеговых пространствах $L_p,\ p > 0$. Для этого мы рассмотрели в качестве классов коэффициентов $\mathscr{A}$ не только классические пространства l_p, но и другие квазинормированные пространства последовательностей. Попутно обнаружилось свойство стабильности $(\mathscr{A},\mathscr{B})$ -множеств относительно класса $\mathscr{A}$ (теорема 4.2 и следствия к ней) и естественным образом появились независимые (в вероятностном смысле) функции, которых не было в упоминавшихся выше работах. Полученные результаты позволяют получить вероятностные характеризации операторов слабого типа, которые будут предметом отдельной работы.

В первой части мы доказываем несколько общих вспомогательных утверждений об $(\mathscr{A},\mathscr{B})$-множествах. В последующих разделах мы подробно исследуем случай $\mathscr{B} = l_\infty$.

Наши обозначения согласованы с принятыми в книге [2]. Знаком $\mathbf{1}_E$ мы обозначаем характеристическую функцию множества E, а $:=$ – равенство по определению. Двоеточие в строках, записанных с использованием логических символов, заменяет оборот “такое, что”.

2. Модификации $(\mathscr{A},\mathscr{B})$-множеств и операторы, связанные с ними. В дальнейшем множества $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ будут квазибанаховыми симметричными пространствами вещественных числовых последовательностей. Это означает, что каждое из них наделено квазинормой $\|\cdot\|$, причем выполнены следующие аксиомы:

1) если $a=\{a_n\}\in\mathscr{A}$ и $|b|=\{|b_n|\}\leqslant|a|=\{|a_n|\}$, то $b\in\mathscr{A}$ и $\|b\|\leqslant\|a\|$;
2) квазинорма каждого из пространств инвариантна относительно перестановок координат своих элементов.

Квазинорма $\|\cdot\|$ – это функционал, который удовлетворяет всем аксиомам нормы, кроме неравенства треугольника, которое заменяется более слабым неравенством

$$\|a+b\|\leqslant K(\|a\|+\|b\|),\qquad a,b\in\mathscr{A}, \tag{2.1}$$

с некоторым $K\geqslant 1$. Известно, что каждое квазинормированное пространство метризуемо [7, п. 3.10], и мы предполагаем в дальнейшем его полноту. Каждое квазинормированное пространство обладает эквивалентной квазинормой, которая является непрерывной в порождаемой ею топологии [8, 6.1.9]. Поэтому в дальнейшем мы предполагаем квазинорму непрерывной. Если $f\in L_\circ([0,1],\mathscr{M},\mathbf{m})$, то $d_f(\tau)=\mathbf{m}(t\colon|f(t)|>\tau)$, $\tau\geqslant 0$. Будем говорить, что последовательности измеримых функций $\{f_n\}\in L_\circ(\mathbf{m})$ и $\{g_n\}\in L_\circ(\mathbf{m})$ *подобны*, если для любого $n\in\mathbb{N}$ и для любого $\tau\geqslant 0$ выполняется равенство $d_{f_n}(\tau)=d_{g_n}(\tau)$, т.е. функции f_n и g_n равноизмеримы. Известно, что для любой последовательности $\{f_n\}\in L_\circ(\mathbf{m})$ существует подобная ей последовательность $\{F_n\}\in L_\circ(\mathbf{m})$, состоящая из независимых (в вероятностном смысле) функций (см., например, [2, гл. 2], или [9, § 26]).

Определение 2.1. a) Множество $U\subset L_\circ(\mathbf{m})$ назовем $(\mathscr{A},\mathscr{B})$-*множеством*, если для любой последовательности $a\in\mathscr{A}$ и для любой последовательности $\{f_n\}\in U^{\mathbb{N}}$ имеем

$$\{a_nf_n(t)\}\in\mathscr{B}\qquad t\text{-почти всюду.}$$

b) Множество $U\subset L_\circ(\mathbf{m})$ назовем *независимым* $(\mathscr{A},\mathscr{B})$-*множеством*, если для любой последовательности $a\in\mathscr{A}$, для любой последовательности $\{f_n\}\in U^{\mathbb{N}}$ и для любой последовательности $\{X_n\}\in(L_\circ(\mathbf{m}))^{\mathbb{N}}$ *независимых* функций, подобной $\{f_n\}$, имеем

$$\{a_nX_n(t)\}\in\mathscr{B}\qquad t\text{-почти всюду.}$$

c) Множество $U\subset L_\circ(\mathbf{m})$ назовем *свободным* $(\mathscr{A},\mathscr{B})$-*множеством*, если для любой последовательности $a\in\mathscr{A}$, для любой последовательности $\{f_n\}\in U^{\mathbb{N}}$ и для *любой* последовательности $\{F_n\}\in(L_\circ(\mathbf{m}))^{\mathbb{N}}$ функций, подобной $\{f_n\}$, имеем

$$\{a_nF_n(t)\}\in\mathscr{B}\qquad t\text{-почти всюду.}$$

Если обозначить $\mathscr{F}(\mathscr{A},\mathscr{B})$, $\mathscr{I}(\mathscr{A},\mathscr{B})$, $\mathscr{S}(\mathscr{A},\mathscr{B})$ классы свободных, независимых и $(\mathscr{A},\mathscr{B})$-множеств соответственно, то из определений следуют включения

$$\mathscr{F}(\mathscr{A},\mathscr{B})\subset\mathscr{I}(\mathscr{A},\mathscr{B}),\qquad\mathscr{F}(\mathscr{A},\mathscr{B})\subset\mathscr{S}(\mathscr{A},\mathscr{B}).$$

В данной работе будет показано, что первое включение можно заменить на равенство при $\mathscr{B}=c_\circ$ и $\mathscr{B}=l_\infty$, а второе включение является строгим.

Лемма 2.2. *Пусть X – квазибанахово пространство. Существует последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_n\}$ такая, что для всякой последовательности $\{x_n\}\in X^{\mathbb{N}}$ с $\|x_n\|\leqslant\varepsilon_n$, $n\in\mathbb{N}$, ряд $\sum x_n$ сходится в X.*

Доказательство. По индукции доказывается неравенство

$$\left\| \sum_{i=1}^{l} x_l \right\| \leqslant \sum_{i=1}^{l-1} K^i \|x_i\| + K^{l-1}\|x_l\|, \qquad l = 2, 3, \dots .$$

Полагаем $\varepsilon_i = (2K)^{-i}$, $i = 1, 2, \dots$. Если $\|x_i\| \leqslant \varepsilon_i$, то

$$\left\| \sum_{i=k+1}^{k+l} x_i \right\| \leqslant \sum_{i=1}^{l-1} K^i \|x_{k+i}\| + K^{l-1}\|x_{k+l}\| \leqslant \sum_{i=1}^{l-1} K^i \varepsilon_{k+i} + K^{l-1}\varepsilon_{k+l}$$

$$= \sum_{i=1}^{l-1} \frac{1}{2^{i+k}K^k} + \frac{1}{2^{k+l}K^{k+1}} \leqslant \frac{1}{(2K)^k}.$$

Таким образом, выполнен критерий Коши сходимости ряда $\sum x_i$.

Пусть U – $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$-множество и пусть $\{f_n\} \in U^{\mathbb{N}}$. Рассмотрим оператор

$$T_{\{f_n\}} \colon a \in \mathscr{A} \to \|\{a_n f_n(t)\}\|_{\mathscr{B}}.$$

Этот оператор является положительным и квазивыпуклым. Последнее означает, что

1) $T(a_1 + a_2) \leqslant K(T(a_1) + T(a_2))$ почти всюду на $[0, 1]$;
2) $T(\lambda a) = |\lambda| T(a)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, почти всюду на $[0, 1]$.

Лемма 2.3. *Для квазивыпуклого оператора $T\colon \mathscr{A} \to L_\circ(\mathbf{m})$ эквивалентны следующие утверждения*:

1) *оператор T ограничен: переводит множество, ограниченное в $\mathscr{A}$, в множество, ограниченное по мере (в пространстве $L_\circ(\mathbf{m})$);*
2) *оператор T непрерывен: если $a_n \to 0$ в $\mathscr{A}$, то $Ta_n \to 0$ по мере.*

Доказательство. Пусть оператор T ограничен и пусть $a_n \to 0$ в $\mathscr{A}$. Пространство $\mathscr{A}$ метризуемо, поэтому найдется последовательность положительных чисел $\{\gamma_n\}$ такая, что $\gamma_n \to \infty\colon \gamma_n a_n \to 0$ [10, теорема 1.28]. Так как множество $\{\gamma_n a_n\}$ ограничено в $\mathscr{A}$, то $(T\{\gamma_n a_n\})$ ограничено в $L_\circ(\mathbf{m})$. Следовательно, $Tx_n = \gamma_n^{-1} T\{\gamma_n a_n\} \to 0$ [10, теорема 1.30].

Пусть теперь оператор T непрерывен, E ограничено в $\mathscr{A}$, W – окрестность нуля в $L_\circ(\mathbf{m})$. Пространство $\mathscr{A}$ метризуемо, поэтому существует окрестность нуля V в $\mathscr{A}$ такая, что $T(V) \subset W$ [10, теорема 1.32]. Множество E ограничено в $\mathscr{A}$, поэтому $E \subset tV$ при достаточно больших $t > 0$. Имеем

$$T(E) \subset T(tV) = tT(V) \subset tW,$$

т.е. $T(E)$ ограничено в $L_\circ(\mathbf{m})$.

Теорема 2.4. *Пусть U – $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$-множество. Если квазинорма пространства $\mathscr{B}$ порядково полунепрерывна*

$$(x_n \uparrow x \in \mathscr{B} \Rightarrow \|x_n\| \uparrow \|x\|),$$

то семейство операторов $T_{\{f_n\}}$, $\{f_n\} \in U^{\mathbb{N}}$, равномерно ограничено, т.е. множество

$$\mathscr{T} = \left\{ (T_{\{f_n\}}(a))(t) \colon \|a\|_{\mathscr{A}} \leqslant 1,\ \{f_n\} \in U^{\mathbb{N}} \right\}$$

ограничено в пространстве $L_\circ(\mathbf{m})$.

Доказательство. Сначала докажем измеримость функции

$$t \mapsto \|\{a_n f_n(t)\}\|_{\mathscr{B}}.$$

В самом деле, для каждого $k \in \mathbb{N}$ измерима функция

$$t \mapsto \|\{a_1 f_1(t), \dots, a_k f_k(t), 0, 0, \dots\}\|_{\mathscr{B}},$$

как композиция конечного числа измеримых и непрерывной функций.

Из порядковой полунепрерывности квазинормы имеем

$$\|\{a_n f_n(t)\}\|_{\mathscr{B}} = \sup_k \|\{a_1 f_1(t), \dots, a_k f_k(t), 0, 0, \dots\}\|_{\mathscr{B}},$$

а супремум последовательности измеримых функций измерим.

Теперь переходим к доказательству равномерной ограниченности семейства операторов $T_{\{f_n\}}$.

Предположим, что множество $\mathscr{T}$ неограничено в $L_\circ(\mathbf{m})$. Тогда для последовательности чисел ε_k из леммы 2.2 имеем

$$\exists \delta > 0, \quad \exists \{a^{(k)}\} \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}}, \quad a^{(k)} \geqslant 0, \quad \|a^{(k)}\|_{\mathscr{A}} \leqslant 1, \quad \exists \{f_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}, \quad k = 1, 2, \dots:$$
$$\mathbf{m}(E_k) := \mathbf{m}\biggl(t \colon (T_{\{f^k\}}(a^{(k)}))(t) > \frac{k}{\varepsilon_k}\biggr) = \mathbf{m}\bigl(t \colon \bigl\|\bigl\{\varepsilon_k a_n^{(k)} f_n^{(k)}(t)\bigr\}_n\bigr\|_{\mathscr{B}} > k\bigr) \geqslant \delta.$$

Пусть $n \mapsto (m,k)$ – биекция $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Определим последовательности $a_n := \varepsilon_m a_k^{(m)}$, $f_n := f_k^{(m)}$, $n = 1, 2, \dots$. Имеем $\{a_n\} \in \mathscr{A}$ (это следует из леммы 2.2) и $\{f_n\} \in U^{\mathbb{N}}$.

Теперь заметим, что если $t \in M := \overline{\lim} E_k = \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=l}^{\infty} E_k$, то

$$\forall l \in \mathbb{N} \quad \exists k \geqslant l \colon \quad \|(\varepsilon_k a_n^{(k)} f_n^{(k)}(t))_n\|_{\mathscr{B}} > k,$$

т.е. для бесконечно многих $k \in \mathbb{N}$ последовательность $\{a_n f_n(t)\}$ содержит подпоследовательность $\bigl\{\varepsilon_k a_n^{(k)} f_n^{(k)}(t)\bigr\}_n$ (быть может, переставленную), квазинорма которой в пространстве $\mathscr{B}$ больше k. В силу монотонности квазинормы получаем

$$\|\{a_n f_n(t)\}\|_{\mathscr{B}} = +\infty, \qquad t \in M, \quad \mathbf{m}(M) \geqslant \delta.$$

Это противоречит определению $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$-множества.

Следствие 2.5. *Пусть квазинорма пространства $\mathscr{B}$ порядково полунепрерывна. Если U – свободное $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$-множество (или, соответственно, независимое $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$-множество), то существует функция $\chi \colon \mathbb{R}_+ \to [0,1]$, $\lim_{\tau\to\infty} \chi(\tau) = 0$, такая, что*

$$\forall a \in \mathscr{A}, \quad \|a\|_{\mathscr{A}} \leqslant 1, \qquad \forall \{f_n\} \in U^{\mathbb{N}} \qquad \mathbf{m}\bigl(t \colon \|\{a_n F_n(t)\}\|_{\mathscr{B}} > \tau\bigr) \leqslant \chi(\tau), \quad \tau \geqslant 0,$$

где $\{F_n\}$ – последовательность измеримых функций, подобная $\{f_n\}$ (соответственно, последовательность независимых функций, подобная $\{f_n\}$).

Доказательство повторяет доказательство теоремы с использованием определений свободных и независимых множеств.

Следствие 2.6. *Пусть квазинорма пространства $\mathscr{B}$ порядково полунепрерывна, Q – множество финитных последовательностей. Если Q плотно в $\mathscr{A}$, то всякое $(\mathscr{A},\mathscr{B})$-множество является $(\mathscr{A},\mathscr{B}_Q)$-множеством, где $\mathscr{B}_Q$ – замыкание Q в $\mathscr{B}$. В частности, (l_1,l_∞)-множество является A-системой (см. введение).*

Доказательство. Для последовательности $a \in \mathscr{A}$ определим "срезки" $a_{[k]} = (0,\dots,0,a_{k+1},\dots)$ и заметим, что $\|a_{[k]}\|_{\mathscr{A}} \to 0,\ k\to\infty$, по условию. Оператор $T\colon a \in \mathscr{A} \mapsto \|\{a_n f_n(t)\}\|_{\mathscr{B}}$ непрерывен (лемма 2.3 и теорема 2.4); следовательно, $T(a_{[k]}) \to 0$ по мере, причем $T(a_{[k]}) \geqslant T(a_{[k+1]})$. Получаем

$$T(a_{[k]}) = \|\{0,\dots,0,a_{k+1}f_{k+1}(t),a_{k+2}f_{k+2}(t),\dots\}\|_{\mathscr{B}} \to 0$$

для почти всех $t\in[0,1]$. Это означает, что $\{a_n f_n(t)\} \in B_Q$ для почти всех $t \in [0,1]$.

3. Совпадение независимых и свободных $(\mathscr{A},l_\infty)$-множеств. Для $\mathscr{B} = l_\infty$ обнаружилось любопытное явление совпадения независимых и свободных $(\mathscr{A},l_\infty)$-множеств, которое описывается следующей теоремой.

Теорема 3.1. *Для множества $U \subset L_\circ(\mathbf{m})$ следующие утверждения эквивалентны:*

1) *U – независимое $(\mathscr{A},l_\infty)$-множество;*
2) *существует положительное число $\tau_\circ$ такое, что для всех $a\in\mathscr{A}$ с $\|a\|_{\mathscr{A}} \leqslant 1$ и для всех $\{f_n\}\in U^{\mathbb{N}}$ сходится ряд $\sum_{n=1}^\infty d_{a_n f_n}(\tau_\circ)$;*
3) *U – свободное $(\mathscr{A},l_\infty)$-множество.*

Таким образом, для произвольного квазибанахова пространства последовательностей $\mathscr{A}$ имеет место равенство $\mathscr{F}(\mathscr{A},l_\infty) = \mathscr{I}(\mathscr{A},l_\infty)$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). По следствию 2.5 с $\mathscr{B} = l_\infty$ получаем: существует положительное число $\tau_\circ$ такое, что для любой последовательности a с $\|a\|_{\mathscr{A}} \leqslant 1$, для любой последовательности $\{f_n\} \in U^{\mathbb{N}}$ и для любой последовательности $\{F_n\}$ независимых функций, подобной $\{f_n\}$,

$$\mathbf{m}\big(t\colon \sup_n |a_n F_n(t)| > \tau_\circ\big) < 1.$$

Рассмотрим

$$\mathbf{m}\big(t\colon \sup_n |a_n F_n(t)| > \tau_\circ\big) = 1 - \mathbf{m}\big(t\colon \sup_n |a_n F_n(t)| \leqslant \tau_\circ\big) =$$

(независимость)

$$= 1 - \prod_n \mathbf{m}\big(|a_n F_n(t)| \leqslant \tau_\circ\big) = 1 - \prod_n \big(1 - \mathbf{m}(|a_n F_n| > \tau_\circ)\big).$$

Таким образом, $\prod_n \big(1 - \mathbf{m}(|a_n F_n| > \tau_\circ)\big) > 0$. Это означает сходимость ряда

$$\sum_n \mathbf{m}\big(|a_n F_n| > \tau_\circ\big) = \sum_n d_{a_n f_n}(\tau_\circ).$$

2) $\Rightarrow$ 3). Пусть $a \in \mathscr{A}$, $\|a\| \leqslant 1$, $\{f_n\} \in U^{\mathbb{N}}$, $\{F_n\}$ – произвольная последовательность, подобная $\{f_n\}$. Рассмотрим

$$\mathbf{m}\bigl(t\colon \sup_n |a_n F_n(t)| > \tau\bigr) = \mathbf{m}\Bigl(\bigcup_n \bigl(t\colon |a_n F_n(t)| > \tau\bigr)\Bigr)$$
$$\leqslant \sum_n \mathbf{m}\bigl(t\colon |a_n F_n(t)| > \tau\bigr) = \sum_n d_{a_n f_n}(\tau) < \infty$$

при достаточно больших τ. Теперь заметим, что

$$\sum_n d_{a_n f_n}(\tau) = \sum_n \bigl(t\colon |a_n f_n(t)| > \tau\bigr)$$

является функцией распределения для некоторой функции, определенной на положительной полуоси (такая функция (обозначим ее $\sum \bigoplus a_n f_n$) получается, если каждую из функций $a_n f_n$ поместить на полуинтервал $[n-1, n)$ и получившиеся таким образом кусочки “склеить” в одну функцию). Итак, функция $\sum \bigoplus a_n f_n \in L_\circ([0,\infty))$ и $d_{\sum \bigoplus a_n f_n}(\tau) < \infty$, поэтому $d_{\sum \bigoplus a_n f_n}(\tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$.

Таким образом, $\mathbf{m}\bigl(t\colon \sup_n |a_n F_n(t)| = \infty\bigr) = 0$.

3) $\Rightarrow$ 1) по определению.

Заметим, что процедура переноса функций с отрезка на полуось, описанная в доказательстве, эффективно применялась рядом авторов [11], [12].

4. Независимые и свободные $(l_{p,q}, l_\infty)$-множества, $0 < q \leqslant p < \infty$. В начале этого раздела мы опишем несколько преобразований положительных функций, которые затем будут использованы для формулировки результатов.

Пусть $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – возрастающая вогнутая функция,

$$\lim_{t\to+0} \varphi(t) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty.$$

Определим функцию

$$\hat\varphi(t) := \inf_{s>0} \frac{1+ts}{\varphi(s)}, \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

Функция $\hat\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ вогнута, как $\inf$ множества линейных функций [13, гл. 2],

$$\frac{1}{\varphi\bigl(\frac{1}{t}\bigr)} = \inf_{s>0} \frac{1}{\varphi\bigl(\frac{s}{1+ts}\bigr)} \leqslant \hat\varphi(t) \leqslant \frac{1 + t\cdot\frac{1}{t}}{\varphi\bigl(\frac{1}{t}\bigr)} = \frac{2}{\varphi\bigl(\frac{1}{t}\bigr)}, \qquad t > 0;$$

в частности,

$$\lim_{t\to+0} \hat\varphi(t) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} \hat\varphi(t) = \infty.$$

Кроме того, $\hat\varphi$ строго возрастает и, следовательно, обладает обратной функцией $\check\varphi$: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, которая выпукла, строго возрастает и

$$\lim_{t\to+0} \check\varphi(t) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} \check\varphi(t) = \infty.$$

Кроме того, имеют место неравенства

$$\frac{1}{\varphi^{-1}\left(\frac{2}{s}\right)} \leqslant \check{\varphi}(s) \leqslant \frac{1}{\varphi^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)}, \qquad s > 0.$$

По функции φ определим два класса квазинормированных пространств, которые обычно называют пространствами Лоренца и Марцинкевича [13]. Определяем их на произвольном пространстве $(\mathscr{J}, \nu)$ с σ-конечной мерой ν так, чтобы элементами этих пространств могли быть как функции из $L_\circ(\mathbf{m})$, так и числовые последовательности. Итак, пусть $(\mathscr{J}, \nu)$ – пространство с полной σ-конечной положительной мерой ν, $L_\circ(\mathscr{J}, \nu)$ – пространство всех измеримых почти всюду конечных функций,

$$\Lambda(\mathscr{J}, \nu; \varphi) = \left\{x \in L_\circ(\mathscr{J}, \nu) \colon \|x\| = \int_0^{\nu(\mathscr{J})} x^*(t)\, d\varphi(t) < \infty\right\},$$
$$\mathbb{M}(\mathscr{J}, \nu; \varphi) = \left\{x \in L_\circ(\mathscr{J}, \nu) \colon \|x\| = \sup_{0<t<\nu(\mathscr{J})} x^*(t)\varphi(t) < \infty\right\}.$$

Здесь $x^*(t)$ обозначает невозрастающую перестановку функции $|x(t)|$, т.е.

$$x^*(t) = \inf(\tau \colon d_x(\tau) < t) = \inf\bigl(\tau \colon \nu(j \colon |x(j)| > \tau) < t\bigr).$$

Функционал, определяющий пространство $\Lambda(\varphi)$ для вогнутой функции φ, является нормой, а функционал, определяющий пространство $\mathbb{M}(\varphi)$, – квазинормой [13, гл. 2].

Напомним также определение пространств $L_{p,q}$, $0 < p < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$, упомянутых в названии этого раздела:

$$L_{p,q}(\mathscr{J}, \nu) = \left\{x \in L_\circ(\mathscr{J}, \nu) \colon \|x\| = \left[\int_0^{\nu(\mathscr{J})} (x^*(t))^q\, d(t^{q/p})\right]^{1/q} < \infty\right\} \quad \text{при } q < \infty,$$
$$L_{p,\infty}(\mathscr{J}, \nu) = \bigl\{x \in L_\circ(\mathscr{J}, \nu) \colon \|x\| = \sup_{0<t<\nu(\mathscr{J})} x^*(t) t^{1/p} < \infty\bigr\}.$$

При $p = q$ пространства $L_{p,q}$ и L_p совпадают; если $q_1 < q_2$, то $L_{p,q_1} \subset L_{p,q_2}$. Пространства $L_{p,q}(\mathbb{N})$ принято обозначать $l_{p,q}$. Эти пространства хорошо известны (см., например, [7], [14]).

Лемма 4.1. *Пусть $\varGamma$ – произвольное непустое множество; $\varPhi \colon \mathbb{R}_+ \times \varGamma \to \mathbb{R}_+$ – произвольная ограниченная функция. Эквивалентны следующие утверждения:*

1) *существует положительное число δ такое, что для всех $a \in \Lambda(\mathbb{N}; \varphi)$ с $\|a\|_{\Lambda(\mathbb{N},;\varphi)} \leqslant \delta$ и для всех $\{\gamma_n\} \in \varGamma^{\mathbb{N}}$*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varPhi(|a_n|, \gamma_n) < \infty;$$

2) *существуют положительные числа ϵ и k такие, что для всех $s \in [0, \epsilon]$ и для всех $\gamma \in \varGamma$ имеет место неравенство*

$$\varPhi(s, \gamma) \leqslant \check{\varphi}(ks).$$

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Введем в рассмотрение функцию

$$\rho(s) := \sup_{0\leqslant t\leqslant s} \sup_{\gamma\in\Gamma} \Phi(t,\gamma), \qquad s>0.$$

Функция $\rho(s)$ монотонно возрастает и $\lim_{s\to+0}\rho(s)=0$. По условию существует $\delta_\circ>0$ такое, что для всех a с $\|a\|_{\Lambda(\varphi)}\leqslant\delta_\circ$ сходится ряд $\sum\rho(|a_n|)$. Нас интересует поведение функции $\rho(s)$ в окрестности нуля, поэтому можно считать, что она принимает только конечные значения и $\lim_{s\to+\infty}\rho(s)=+\infty$.

Пусть $\tilde\rho(t):=\sup\{s\geqslant 0\colon \rho(s)\leqslant t\}$. Функция $\tilde\rho(t)$ возрастает. Докажем, что

$$\inf_{n\in\mathbb{N}}\tilde\rho\biggl(\frac{1}{4n}\biggr)\varphi(2n)>0.$$

Допустим противное: $\inf_{n\in\mathbb{N}}\tilde\rho(1/(4n))\varphi(2n)=0$. Возьмем произвольное $\delta_\circ>0$ и по индукции построим последовательность натуральных чисел $n_1<n_2<\cdots$ следующим образом:

1) $n_j\geqslant N_{j-1}$, где $N_{j-1}=\displaystyle\sum_{i=1}^{j-1}n_j$, $j\geqslant 2$, $N_\circ:=0$ (отсюда будет следовать неравенство $N_j\leqslant 2n_j$);

2) $\tilde\rho\biggl(\dfrac{1}{4n_j}\biggr)\varphi(2n_j)\leqslant\dfrac{\delta_\circ}{2^{j+1}}$, $j=1,2,\dots$.

Определим числовую последовательность

$$a_n:=2\tilde\rho\biggl(\frac{1}{4n_j}\biggr) \qquad \text{для}\quad N_{j-1}<n\leqslant N_j.$$

Последовательность $a=\{a_n\}$ имеет такие свойства:

1) $a_n\geqslant 0$, $a_n\downarrow$;

2) имеем

$$\begin{aligned}\|a\|_{\Lambda(\varphi)}&=\sum_n a_n(\varphi(n)-\varphi(n-1))=2\sum_{j=1}^{\infty}\tilde\rho\biggl(\frac{1}{4n_j}\biggr)\bigl(\varphi(N_j)-\varphi(N_{j-1})\bigr)\\&\leqslant 2\sum_{j=1}^{\infty}\tilde\rho\biggl(\frac{1}{4n_j}\biggr)\varphi(2n_j)\leqslant 2\sum\frac{\delta_\circ}{2^{j+1}}=\delta_\circ.\end{aligned}$$

С другой стороны, $\sum\rho(a_n)=\infty$, так как

$$\sum_{n=N_{j-1}+1}^{N_j}\rho(a_n)=n_j\rho\biggl(2\tilde\rho\biggl(\frac{1}{4n_j}\biggr)\biggr)>n_j\frac{1}{4n_j}=\frac14,$$

что противоречит условию.

Таким образом,

$$\varkappa:=\inf_n\tilde\rho\biggl(\frac{1}{4n}\biggr)\varphi(2n)>0.$$

Для $t \geqslant 2$ имеем $2n \leqslant t < 2n+2 < 4n$, где $n := [t/2]$. Получаем неравенство

$$\tilde{\rho}\left(\frac{1}{t}\right)\varphi(t) \geqslant \tilde{\rho}\left(\frac{1}{4n}\right)\varphi(2n) \geqslant \varkappa,$$

из которого следует, что

$$\frac{1}{t} \geqslant \rho\left(\frac{\varkappa}{\varphi(t)}\right), \qquad t \geqslant 2.$$

Полагая $s := \varkappa/\varphi(t),\ t \geqslant 2$, имеем

$$\rho(s) \leqslant \frac{1}{\varphi^{-1}\left(\frac{\varkappa}{s}\right)} \leqslant \check{\varphi}(ks),$$

где $k = 2/\varkappa,\ 0 \leqslant s \leqslant \varkappa/(\varphi(2))$.

2) $\Rightarrow$ 1). Без ограничения общности можно считать, что $\Phi(s,\gamma) \leqslant \check{\varphi}(ks)$ для всех $\gamma \in \Gamma$ и для всех $s \geqslant 0$. Положим $\delta := 1/k$ и возьмем $a \in \Lambda(\mathbb{N},\varphi)$ с $\|a\| \leqslant \delta$. Пусть $h_j := a_j^* - a_{j+1}^*$, так что $a_n^* = \sum_{j=n}^{\infty} h_j,\ n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\begin{aligned}\|a\|_{\Lambda(\mathbb{N},\varphi)} &= \sum a_n^*\big(\varphi(n)-\varphi(n-1)\big) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j=n}^{\infty} h_j\right)\big(\varphi(n)-\varphi(n-1)\big)\\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{j} h_j\big(\varphi(n)-\varphi(n-1)\big) = \sum_{j=1}^{\infty}\varphi(j)h_j \leqslant \delta.\end{aligned}$$

Теперь для фиксированного $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим

$$\check{\varphi}(ka_n^*) = \check{\varphi}\left(k\sum_{j=n}^{\infty} h_j\right) = \check{\varphi}\left(\sum_{j=n}^{\infty} k\varphi(j)h_j\frac{1}{\varphi(j)}\right)$$
$$\leqslant \sum_{j=n}^{\infty} k\varphi(j)h_j\check{\varphi}\left(\frac{1}{\varphi(j)}\right) \leqslant k\sum_{j=n}^{\infty}\frac{k\varphi(j)h_j}{j},$$

так как

$$\sum_{j=n}^{\infty} k\varphi(j)h_j \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\varphi(j)h_j \leqslant k\delta = 1.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\Phi(|a_n,\gamma_n) &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\check{\varphi}(k|a_n|) = \sum_{n=1}^{\infty}\check{\varphi}(ka_n^*)\\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty}\frac{k\varphi(j)h_j}{j} = k\sum_{j=1}^{\infty}\varphi(j)h_j \leqslant k\delta = 1\end{aligned}$$

для любой последовательности элементов $\{\gamma_n\} \in \Gamma^{\mathbb{N}}$.

Для формулировки следующей теоремы будет использовано пространство Орлича l_ψ вещественных числовых последовательностей. Напомним его определение.

Пусть $\psi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – непрерывная возрастающая и выпуклая функция такая, что $\psi(0)=0, \lim_{t\to\infty}\psi(t)=\infty$. *Пространство Орлича* l_ψ состоит из всех последовательностей $a\in\mathbb{R}^\infty$ таких, что $\sum_{n=1}^\infty \psi(|a_n|/\rho)<\infty$ для некоторого $\rho>0$. Пространство l_ψ с нормой

$$\|a\| = \inf\biggl\{\rho>0\colon \sum_{n=1}^\infty \psi\biggl(\frac{|a_n|}{\rho}\biggr)\leqslant 1\biggr\}$$

является банаховым пространством [15, гл. 4].

Теорема 4.2. *Для множества* $U\subset L_\circ\bigl([0,1],\mathscr{M},\mathbf{m}\bigr)$ *следующие утверждения эквивалентны*:

1) U – *независимое* $(\Lambda(\mathbb{N},\varphi),l_\infty)$-*множество*;
2) U *ограничено в пространстве* $\mathbb{M}\bigl([0,1],\mathscr{M},\mathbf{m};\hat\varphi\bigr)$;
3) U – *свободное* $(l_{\check\varphi},l_\infty)$-*множество.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). В силу теоремы 3.1 существует $\tau_\circ>0$ такое, что для всех $a\in\Lambda(\mathbb{N},\varphi)$ с $\|a\|\leqslant 1$ и для всех $\{f_n\}\in U^{\mathbb{N}}$ сходится ряд

$$\sum_n d_{a_n f_n}(\tau_\circ).$$

К функции $(s,f)\mapsto d_{sf}(\tau_\circ)$, определенной на $\mathbb{R}_+\times U$ и принимающей значения в $[0,1]$, применим лемму 4.1:

$$\exists\varepsilon>0,\quad \exists k>0\colon\quad \forall s\in[0,\varepsilon],\quad \forall f\in U\qquad d_{sf}(\tau_\circ)\leqslant\check\varphi(ks).$$

Так как $\check\varphi(u)\uparrow\infty$ при $u\to\infty$, можно считать k настолько большим, что последнее неравенство выполняется для любого $s>0$. Учитывая определения невозрастающей перестановки и функции $\hat\varphi$, получаем

$$\sup_{t>0} f^*(t)\cdot\hat\varphi(t)\leqslant k\tau_\circ,\qquad f\in U,$$

т.е. U ограничено в пространстве $\mathbb{M}\bigl([0,1],\mathscr{M},\mathbf{m};\hat\varphi\bigr)$.

2) $\Rightarrow$ 3). Пусть $a\in l_{\check\varphi}$ и $\{f_n\}\in U^{\mathbb{N}}$. Ограниченность U в пространстве $\mathbb{M}([0,1],\hat\varphi)$ означает существование положительного числа k такого, что для всех $f\in U$ имеет место неравенство

$$d_f(t)\leqslant\check\varphi\biggl(\frac{k}{t}\biggr),\qquad t>0.$$

Теперь легко заметить, что ряд

$$\sum_{n=1}^\infty d_{a_nf_n}(\tau)\leqslant\sum_{n=1}^\infty\check\varphi\biggl(\frac{|a_n|k}{\tau}\biggr)$$

сходится при достаточно больших τ. По теореме 3.1 получаем, что U является свободным $(l_{\check\varphi},l_\infty)$-множеством.

3) $\Rightarrow$ 1). Сравнением фундаментальных функций

$$\|\{\underbrace{1,1,\dots,1}_{n},0,\dots\}\|_{\Lambda(\varphi)}=\varphi(n)\qquad\text{и}\qquad\|\{\underbrace{1,1,\dots,1}_{n},0,\dots\}\|_{l_{\check\varphi}}=\frac{1}{\hat\varphi\bigl(\frac1n\bigr)}\leqslant\varphi(n)$$

устанавливается включение $\Lambda(\mathbb{N},\varphi) \subset l_{\check{\varphi}}$ [13, гл. 2], после которого импликация очевидна.

Пусть $r>0$. Построим r-степенное преобразование квазибанахова пространства X, которое обозначим X^r. Напомним, что

$$X^r=\{y\colon |y|^r\in X\},\qquad \|y\|_{X^r}=\bigl\||y|^r\bigr\|_X^{1/r}.$$

Заметим, что пространства $L_{p,q}$ совпадают с пространствами $\Lambda^q(t^{q/p})$, а $L_{p,\infty}$ – с пространствами $\mathbb{M}^q(t^{q/p})=\mathbb{M}(t^{1/p})$, $0<p<\infty$, $0<q<\infty$.

Если применить теорему к множеству $\{|f|^r\colon f\in U\}$, получим

Следствие 4.3. *Пусть $r>0$. Для множества $U\subset L_0([0,1],\mathscr{M},\mathbf{m})$ следующие утверждения эквивалентны:*

1) *U – независимое $(\Lambda^r(\mathbb{N},\varphi),l_\infty)$-множество;*
2) *U ограничено в пространстве $\mathbb{M}^r([0,1],\mathscr{M},\mathbf{m};\hat{\varphi})$;*
3) *U – свободное $(l^r_{\check{\varphi}},l_\infty)$-множество.*

Полагая в следствии 4.3 $\varphi(t)=t^{q/p}$ и $r=q$, получаем

Следствие 4.4. *Пусть $0<q\leqslant p<\infty$. Для множества $U\subset L_0([0,1],\mathscr{M},\mathbf{m})$ следующие утверждения эквивалентны:*

1) *U – независимое $(l_{p,q},l_\infty)$-множество;*
2) *U ограничено в пространстве $L_{p,\infty}([0,1],\mathscr{M},\mathbf{m})$;*
3) *U – свободное (l_p,l_∞)-множество.*

Таким образом, сравнивая полученные результаты с критерием Никишина, сформулированным во введении, замечаем, что

$$\mathscr{F}(l_1,l_\infty)\overset{\neq}{\subset}\mathscr{S}(l_1,l_\infty).$$

С другой стороны,

$$\mathscr{I}(l_{p,q},l_\infty)=\mathscr{F}(l_{p,q},l_\infty)=\mathscr{F}(l_p,l_\infty),\qquad 0<q\leqslant p<\infty.$$

5. Независимые и свободные $(l_{p,q},l_\infty)$-множества, $0<p\leqslant q\leqslant\infty$. Пусть $\varphi\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ – строго возрастающая непрерывная функция, $\varphi(0)=0$. Через $L_\varphi([0,1],\mathbf{m})$ будем обозначать множество всех измеримых на отрезке $[0,1]$ функций $x(t)$, для которых

$$\int_0^1\varphi(\gamma|x(t)|)\,dt<\infty$$

при некотором $\gamma>0$.

Если функция φ удовлетворяет Δ_2-условию, то множество $L_\varphi([0,1],\mathbf{m})$ совпадает с классом $\varphi(L)$, подробно рассмотренным в [16]. Если φ является N-функцией [16], [17], то $L_\varphi([0,1],\mathbf{m})$ является банаховым пространством и называется пространством Орлича [17].

Начнем с рассмотрения более простого “крайнего” случая.

Теорема 5.1. *Пусть* $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – *строго возрастающая непрерывная функция*, $\varphi(0)=0$.

Для множества $U \subset L_\circ([0,1],\mathscr{M},\mathbf{m})$ *следующие утверждения эквивалентны*:

1) U – *независимое* $(\mathbb{M}(\mathbb{N},\varphi),l_\infty)$-*множество*;
2) *существует* $\tau_\circ>0$ *такое, что*

$$\int_0^\infty d(U,\tau_\circ\varphi(t))\,dt<\infty,$$

где $d(U,\tau):=\sup_{f\in U} d_f(\tau),\ \ \tau>0$;
3) *множество* U *порядково ограничено в множестве* $L_{\varphi^{-1}}([0,1],\mathbf{m})$, *т.е. существует невозрастающая функция* $h\in L_{\varphi^{-1}}([0,1],\mathbf{m})$ *такая, что для всех* $f\in U$ *имеет место неравенство*

$$f^*(t)\leqslant h(t),\qquad 0<t\leqslant 1;$$

4) U – *свободное* $(\mathbb{M}(\mathbb{N},\varphi),l_\infty)$-*множество*.

Доказательство. Сразу отметим эквивалентность 1) и 4), которая следует из теоремы 3.1. Далее имеем цепочку эквивалентных утверждений:

– утверждение 1) $\Longleftrightarrow$ (по теореме 3.1) существованию числа $\tau_\circ>0$ такого, что для любой последовательности a с $\|a\|_{\mathbb{M}(\mathbb{N},\varphi)}\leqslant 1$ и для любой последовательности $\{f_n\}\in U^{\mathbb{N}}$ сходится ряд $\sum d_{a_nf_n}(\tau_\circ)$;
– существует число $\tau_\circ>0$ такое, что для любой последовательности $\{f_n\}\in U^{\mathbb{N}}$ сходится ряд $\sum d_{f_n}(\tau_\circ\varphi(n))$;
– существует число $\tau_\circ>0$ такое, что сходится ряд $\sum_{n=1}^\infty d(U,\tau_\circ\varphi(n))$;
– существует число $\tau_\circ>0$ такое, что сходится интеграл $\int_0^\infty d(U,\tau_\circ\varphi(t))$;
– существует число $\tau_\circ>0$ такое, что сходится интеграл $\int_0^1\varphi^{-1}(h(t)/\tau_\circ)\,dt$, где $h(t):=\sup_{f\in U} f^*(t), 0<t<1$;
– существует функция $h\in L_{\varphi^{-1}}([0,1],\mathbf{m})$ такая, что для всех $f\in U$ имеет место неравенство $f^*(t)\leqslant h(t),\ 0<t\leqslant 1$.

Так же, как это было сделано в предыдущем разделе, доказываются два следствия.

Следствие 5.2. *Пусть* $\varphi\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ – *строго возрастающая непрерывная функция*, $\varphi(0)=0,\ \ r>0$.

Для множества $U\subset L_\circ([0,1],\mathscr{M},\mathbf{m})$ *следующие утверждения эквивалентны*:

1) U – *независимое* $(\mathbb{M}^r(\mathbb{N},\varphi),l_\infty)$-*множество*;
2) *множество* U *порядково ограничено в* r-*степенном преобразовании пространства Орлича* $L^r_{\varphi^{-1}}([0,1],\mathbf{m})$, *т.е. существует невозрастающая функция* $h\in L^r_{\varphi^{-1}}([0,1],\mathbf{m})$ *такая, что для всех* $f\in U$ *имеет место неравенство* $f^*(t)\leqslant h(t),\ \ 0<t\leqslant 1$;
3) U – *свободное* $(\mathbb{M}^r(\mathbb{N},\varphi),l_\infty)$-*множество*.

Следствие 5.3. *Пусть $p>0$. Для множества $U \subset L_\circ([0,1],\mathscr{M},\mathbf{m})$ следующие утверждения эквивалентны*:

1) *U – независимое $(l_{p,\infty}, l_\infty)$-множество*;
2) *множество U симметрично порядково ограничено в пространстве $L_p([0,1],\mathbf{m})$, т.е. существует невозрастающая функция $h \in L_p([0,1],\mathbf{m})$ такая, что для всех $f \in U$ имеет место неравенство $f^*(t) \leqslant h(t)$, $0 < t \leqslant 1$*;
3) *U – свободное $(l_{p,\infty}, l_\infty)$-множество.*

Для формулировки итогового результата (теорема 5.9) отметим, что условие 2) в последнем следствии можно переформулировать следующим образом: множество U ограничено в пространстве $\mathbb{M}([0,1];1/h(t))$, где $h(t) \in L_p([0,1],\mathbf{m})$.

Лемма 5.4. *Если X – квазибанахово пространство, K – константа из неравенства* (2.1), *$\gamma \in (0, 1/(2K))$ и $\|x_n\| \leqslant \gamma^n$, $n = 1,2,\dots$, то ряд $\sum x_n$ сходится в пространстве X.*

Доказательство очень похоже на доказательство леммы 2.2.

Лемма 5.5. *Оператор растяжения $\sigma_\tau x(t) := x(t/\tau)$, $\tau > 0$, ограничен в любом квазибанаховом симметричном пространстве функций на* $[0,1]$.

Доказательство повторяет рассуждения нормированного случая [13, гл. 2]. Получается такая оценка "нормы": $\|\sigma_\tau\| := \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|\sigma_\tau x\| \leqslant K\tau$.

Лемма 5.6. *Пусть X – квазибанахово симметричное пространство функций на $[0,1]$. Существует константа $R>1$ такая, что для любой невозрастающей функции $x(t) \in X$ существует невозрастающая функция $x_1(t) \in X$, причем $x(t) \leqslant x_1(t)$ и $x_1(t/2) \leqslant Rx_1(t)$ почти всюду.*

Доказательство. Возьмем $\alpha \in (0, (2K)^{-1}\|\sigma_2\|^{-1})$ и положим

$$x_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x\left(\frac{t}{2^n}\right), \qquad t \in (0,1].$$

Функция $x_1(t)$ не возрастает и $x(t) \leqslant x_1(t)$. Так как

$$\|\alpha^n \sigma_{2^n} x\| \leqslant \bigl(\alpha\|\sigma_2\|_{X\to X}\bigr)^n \|x\|, \qquad \alpha\|\sigma_2\|_{X\to X} \in (0,(2K)^{-1}),$$

то $x_1(t) \in X$ (лемма 5.4). Кроме того,

$$x_1\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) \leqslant \frac{1}{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x\left(\frac{t}{2^n}\right) = \frac{1}{\alpha}x_1(t), \qquad t \in (0,1].$$

Осталось положить $R := 1/\alpha$.

В предыдущем разделе были определены пространства $\Lambda(\mathscr{J},\nu;\varphi)$ по вогнутой функции φ. Аналогичным образом определяются квазинормированные пространства по выпуклой N-функции (для степенных функций – [14, гл. 5] и [18]). Понятие выпуклой N-функции и дополнительной к ней подробно рассмотрены в [17]. Пространства Орлича, построенные по N-функции φ и по дополнительной к ней N-функции φ^*, находятся в двойственности. Следуя [17], будем говорить, что N-функция $\varphi(t)$ удовлетворяет *Δ_2-условию* при $t \geqslant t_\circ$, если существует такая постоянная $K>2$, что

$$\varphi(2t) \leqslant K\varphi(t), \qquad t \geqslant t_\circ.$$

Лемма 5.7. *Пусть $\varphi(t)$ – N-функция, удовлетворяющая Δ_2-условию при $t \geqslant 1$ с дополнительной N-функцией $\varphi^*(t)$. Для произвольной возрастающей функции $\rho(t)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ эквивалентны условия:*

1) *$\forall a \in \Lambda(\mathbb{N},\varphi)$ сходится ряд $\sum \rho(a_n)$;*
2) *функция $\varkappa(t) := \rho(t)/t$, где $t > 0$, принадлежит пространству Орлича $L_{\varphi^*}([0,1],\mathbf{m})$.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Сначала по индукции докажем, что для произвольных $t_1,\dots t_m \geqslant 1$ выполняется неравенство

$$\varphi(t_1+\dots+t_m) \leqslant \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{K}{2}\right)^{m-i+1}\varphi(t_i). \tag{$*$}$$

При $m=1$ оно очевидно, так как константа $K \geqslant 2$. Если $(*)$ выполнено при $m \in \mathbb{N}$, то для $t_1,\dots,t_m,t_{m+1} \geqslant 1$ имеем

$$\begin{aligned}
\varphi(t_1+\dots+t_m+t_{m+1}) &\leqslant K\varphi\left(\frac{t_1+\dots+t_m+t_{m+1}}{2}\right)\\
&\leqslant \frac{K}{2}\varphi(t_1+\dots+t_m)+\frac{K}{2}\varphi(t_{m+1})\\
&\leqslant \frac{K}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{K}{2}\right)^{m-i+1}\varphi(t_i)+\frac{K}{2}\varphi(t_{m+1})\\
&= \sum_{i=1}^{m+1}\left(\frac{K}{2}\right)^{m-i+2}\varphi(t_i).
\end{aligned}$$

Возьмем $\gamma \in (0,2/K)$ и обозначим через $\{a_n\}$ последовательность

$$\underbrace{1,\dots,1}_{n_1},\underbrace{\gamma,\dots,\gamma}_{n_2},\dots,\underbrace{\gamma^{j-1},\dots,\gamma^{j-1}}_{n_j},\dots,$$

где числа $n_1,n_2,\dots$ будут выбраны позже. Так как

$$\|\{a_n\}\|_{\Lambda(\mathbb{N},\varphi)} = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)(a_n-a_{n+1}) = (1-\gamma)\sum_{j=1}^{\infty}\varphi(n_1+\dots+n_j)\gamma^{j-1}$$

и

$$\varphi(n_1+\dots+n_j) \leqslant \sum_{i=1}^{j}\left(\frac{K}{2}\right)^{j-i+1}\varphi(n_i), \qquad j \in \mathbb{N},$$

то

$$\begin{aligned}
\|\{a_n\}\|_{\Lambda(\mathbb{N},\varphi)} &\leqslant (1-\gamma)\sum_{j=1}^{\infty}\gamma^{j-1}\sum_{i=1}^{j}\left(\frac{K}{2}\right)^{j-i+1}\varphi(n_i)\\
&= (1-\gamma)\sum_{i=1}^{\infty}\varphi(n_i)\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{K}{2}\right)^{j-i+1}\gamma^{j-1} = \frac{K(1-\gamma)}{2-K\gamma}\sum_{i=1}^{\infty}\varphi(n_i)\gamma^{i-1}.
\end{aligned} \tag{$**$}$$

Сумму сходящегося числового ряда представим следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\rho(a_n)=\sum_{j=1}^{\infty}n_j\rho(\gamma^{j-1})=\frac{\gamma}{1-\gamma}\int_0^1\sum_{j=1}^{\infty}n_j\mathbf{1}_{(\gamma^j,\gamma^{j-1}]}(t)\cdot\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\rho(\gamma^{j-1})}{\gamma^j}\mathbf{1}_{(\gamma^j,\gamma^{j-1}]}(t)\,dt,$$

и покажем, что

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\rho(\gamma^{j-1})}{\gamma^j}\mathbf{1}_{(\gamma^j,\gamma^{j-1}]}(t)\in L_{\varphi^*([0,1])}.$$

Действительно, если предположить противное, то найдется такая последовательность неотрицательных чисел (s_j), что

$$\Big\|\sum_{j=1}^{\infty}s_j\mathbf{1}_{(\gamma^j,\gamma^{j-1}]}\Big\|_{L_\varphi([0,1])}\leqslant 1,$$

и

$$\int_0^1\sum_{j=1}^{\infty}s_j\mathbf{1}_{(\gamma^j,\gamma^{j-1}]}(t)\cdot\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\rho(\gamma^{j-1})}{\gamma^j}\mathbf{1}_{(\gamma^j,\gamma^{j-1}]}(t)\,dt=\infty.$$

Положим $n_j=[s_j]+1,\ j\in\mathbb{N}$; тогда

$$\int_0^1\sum_{j=1}^{\infty}n_j\mathbf{1}_{(\gamma^j,\gamma^{j-1}]}(t)\cdot\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\rho(\gamma^{j-1})}{\gamma^j}\mathbf{1}_{(\gamma^j,\gamma^{j-1}]}(t)\,dt=\infty$$

и, следовательно, $\sum\rho(a_n)=\infty$.

В то же время

$$\begin{aligned}(1-\gamma)\sum_{j=1}^{\infty}\varphi(n_j)\gamma^{j-1}&\leqslant(1-\gamma)\sum_{j=1}^{\infty}\varphi(s_j+1)\gamma^{j-1}\\&\leqslant(1-\gamma)\sum_{j=1}^{\infty}[K\varphi(s_j)+\varphi(2)]\gamma^{j-1}\\&=\varphi(2)+(1-\gamma)K\sum_{j=1}^{\infty}\varphi(s_j)\gamma^{j-1}\leqslant\varphi(2)+K,\end{aligned}$$

что вместе с $(**)$ дает

$$\|\{a_n\}\|_{\Lambda(\mathbb{N},\varphi)}\leqslant\frac{K(\varphi(2)+K)}{2-K\gamma}.$$

Полученное противоречие означает, что

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\rho(\gamma^{j-1})}{\gamma^j}\mathbf{1}_{(\gamma^j,\gamma^{j-1}]}(t)\in L_{\varphi^*([0,1])}.$$

А так как

$$\varkappa(t)\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\rho(\gamma^{j-1})}{\gamma^j}\mathbf{1}_{(\gamma^j,\gamma^{j-1}]}(t),\qquad 0<t\leqslant 1,$$

то и $\varkappa(t) \in L_{\varphi^*}([0,1])$.

2) $\Rightarrow$ 1). Можно считать, что последовательность $\{a_n\}$ убывает и $\|\{a_n\}\|_{\Lambda(\mathbb{N},\varphi)} \leqslant 1/4$. Определим последовательность натуральных чисел (N_j) следующим образом:

$$N_0 := 0, \qquad N_j := \sup\left\{n \in \mathbb{N} : a_n \geqslant \frac{a_1}{2^j}\right\}, \qquad j \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \rho(a_n) &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty}(N_j - N_{j-1})\rho\left(\frac{a_1}{2^{j-1}}\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} N_j \rho\left(\frac{a_1}{2^{j-1}}\right)\\
&= 2\int_0^{2a_1} \sum_{j=1}^{\infty} N_j \mathbf{1}_{(\frac{a_1}{2^{j-1}},\frac{a_1}{2^{j-2}}]}(t) \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\rho\left(\frac{a_1}{2^{j-1}}\right)}{\frac{a_1}{2^{j-2}}} \mathbf{1}_{(\frac{a_1}{2^{j-1}},\frac{a_1}{2^{j-2}}]}(t)\,dt\\
&\leqslant 2\int_0^{2a_1} \sum_{j=1}^{\infty} N_j \mathbf{1}_{(\frac{a_1}{2^{j-1}},\frac{a_1}{2^{j-2}}]}(t) \cdot \frac{\rho(t)}{t}\,dt\\
&\leqslant 4\left\| \sum_{j=1}^{\infty} N_j \mathbf{1}_{(\frac{a_1}{2^{j-1}},\frac{a_1}{2^{j-2}}]}\right\|_{L_\varphi([0,2a_1])} \cdot \|\varkappa\|_{L_{\varphi^*}([0,2a_1])}.
\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} \varphi(N_j)\frac{a_1}{2^{j-1}} &= 4\sum_{j=1}^{\infty} \varphi(N_j)\frac{a_1}{2^{j+1}}\\
&= 4\Bigg\|\underbrace{\frac{a_1}{2},\dots,\frac{a_1}{2}}_{N_1},\underbrace{\frac{a_1}{2^2},\dots,\frac{a_1}{2^2}}_{N_2-N_1},\dots,\underbrace{\frac{a_1}{2^j},\dots,\frac{a_1}{2^j}}_{N_j-N_{j-1}},\dots\Bigg\|_{\Lambda(\mathbb{N},\varphi)}\\
&\leqslant 4\|(a_n)\|_{\Lambda(\mathbb{N},\varphi)} \leqslant 1,
\end{aligned}$$

получаем

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} N_j \mathbf{1}_{(\frac{a_1}{2^{j-1}},\frac{a_1}{2^{j-2}}]}\right\|_{L_\varphi([0,2a_1])} \leqslant 1$$

и, следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho(a_n) \leqslant 4\|\varkappa\|_{L_{\varphi^*}([0,2a_1])}.$$

Следствие 5.8. *Пусть $0 < p < q < \infty$. Для произвольной возрастающей функции $\rho(t)\colon \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ эквивалентны условия:*

1) *$\forall a \in l_{p,q}$ сходится ряд $\sum \rho(a_n)$;*
2) *функция $1/\lambda$, где $\lambda(s) := \sup\{t \geqslant 0\colon \rho(t) \leqslant s\}$, $s \in [0,1]$, принадлежит пространству $L_{p,r}([0,1],\mathbf{m})$; число r определяется уравнением $1/r = 1/p - 1/q$.*

Доказательство. Имеем цепочку эквивалентностных утверждений: 1) $\Longleftrightarrow$ для любой последовательности $(b_n) \in l_{q/p,1}$ сходится ряд $\sum \rho(b_n^{1/q})$, по лемме 5.7;

– сходится интеграл $\displaystyle\int_0^1 \left[\frac{\rho(t^{1/q})}{t}\right]^{q/(q-p)} dt$;

– сходится интеграл $\displaystyle\int_0^\infty \left[\frac{\rho(t^{1/q})}{t}\right]^{q/(q-p)} dt$ (замена $t = \theta^{-q/r}$);

– сходится интеграл $\displaystyle\int_0^\infty [\rho(\theta^{-1/r})]^{r/p}\, d\theta$;

– сходится интеграл $\displaystyle\int_0^1 \inf\{\theta \geqslant 0\colon [\rho(\theta^{-1/r})]^{r/p} \leqslant \tau\}\, d\tau$;

– сходится интеграл $\displaystyle\int_0^1 \big[\sup\{t \geqslant 0\colon \rho(t) \leqslant \tau^{p/r}\}\big]^{-r}\, d\tau$;

– сходится интеграл $\displaystyle\int_0^1 [\lambda(\tau^{p/r})]^{-r}\, d\tau$ (замена $s := \tau^{p/r}$);

– сходится интеграл $\displaystyle\int_0^1 \left[\frac{1}{\lambda(s)}\right]^r d(s^{r/p})$; функция $\frac{1}{\lambda} \in \Lambda_r(s^{r/p}) = L_{p,r}$.

В заключение сформулируем теорему, которая объединяет результаты 4-го и 5-го разделов о независимых множествах.

Теорема 5.9. *Пусть* $0 < p < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$. *Для множества* $U \subset L_\circ([0,1], \mathscr{M}, \mathbf{m})$ *следующие утверждения эквивалентны*:

(1) U – $(l_{p,q}, l_\infty)$-*независимое множество*;
(2) U – $(l_{p,q}, l_\infty)$-*свободное множество*;
(3) *существует функция* $\psi(t)$ *такая, что* U *ограничено в пространстве* $\mathbb{M}([0,1], \mathscr{M}, \mathbf{m}; \psi)$, *причем*

$$\frac{1}{\psi} \in L_{p,r}([0,1], \mathscr{M}, \mathbf{m}), \qquad \frac{1}{r} = \max\{0, \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\}.$$

Доказательство. Случай $0 < q \leqslant p < \infty$ рассмотрен в следствии 4.4. В самом деле, там показано, что условие (1) эквивалентно ограниченности множества в пространстве $L_{p,\infty}$ и $L_{p,\infty}([0,1]) = \mathbb{M}(t^{1/p})$. Таким образом, получено условие (3) с $r = \infty$.

Пусть теперь $0 < p < q < \infty$. Построим последовательность эквивалентных утверждений:

1) $\Longleftrightarrow$ 2) существует число $\tau_0 > 0$ такое, что для любой последовательности $\{a_n\} \in l_{p,q}$ с $\|\{a_n\}\|_{l_{p,q}} \leqslant 1$ и для любой последовательности $\{f_n\} \in U^{\mathbb{N}}$ сходится ряд $\sum_{n=1}^\infty d_{a_n f_n}(\tau_0)$;

3) для любой последовательности $\{a_n\} \in l_{p,q}$ и для любой последовательности $\{f_n\} \in U^{\mathbb{N}}$ сходится ряд $\sum_{n=1}^\infty d_{f_n}(1/a_n)$;

4) для любой последовательности $\{a_n\} \in l_{p,q}$ сходится ряд $\sum_{n=1}^\infty d_U(1/a_n)$ (по следствию 5.8);

5) функция

$$\frac{1}{\sup\{t \geqslant 0\colon d_U\left(\frac{1}{t}\right) \leqslant s\}} \in L_{p,r}([0,1]);$$

6) функция $\sup_{f \in U} f^* \in L_{p,r}([0,1])$.

Заметим, что 1) $\Longleftrightarrow$ 6) и при $q = \infty$ (следствие 5.3).

Для завершения доказательства покажем, что (2) $\Longleftrightarrow$ 6). (Двусторонние круглые скобки показывают, что речь идет об условии из *формулировки* теоремы.) Импликация (2) $\Rightarrow$ 6) очевидна.

Пусть $h := \sup_U f^*$. По лемме 5.6 существует такая невозрастающая функция $h_1(t) \in L_{p,r}([0,1],\mathbf{m})$, что для некоторой константы $R > 1$, $h(t) \leqslant h_1(t)$ и $h_1(t/2) \leqslant Rh_1(t)$ почти всюду на $[0,1]$.

Обозначим $\psi := 1/h_1$. Определенная таким образом функция не убывает и удовлетворяет Δ_2-условию: $\psi(t) \leqslant K\psi(t/2), 0 < t \leqslant 1$. Из 6) следует, что множество U лежит в “единичном шаре” пространства $\mathbb{M}([0,1],\mathbf{m};\psi)$ и $1/\psi \in L_{p,r}([0,1],\mathbf{m})$, т.е. 6) $\Longrightarrow$ (2).

Заметим, что в последней теореме при $1 < p < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$ можно заменить квазинормированное пространство $\mathbb{M}([0,1],\mathbf{m};\psi)$ на традиционное нормированное пространство Марцинкевича

$$\mathbb{M}^{(n)}([0,1],\mathbf{m};\psi) := \bigl\{x \in L_\circ([0,1],\mathbf{m})\colon \|x\| = \sup_{0<t\leqslant 1} x^{**}(t)\psi(t) < \infty\bigr\},$$

где

$$x^{**}(t) := \frac{1}{t}\int_0^t x^*(s)\,ds, \qquad 0 < t \leqslant 1,$$

построенное по квазивогнутой функции $\psi\colon [0,1] \to \mathbb{R}_+$.

В этом случае в пространстве $L_{p,r}$ действует оператор Харди–Литтлвуда

$$Hx(t) := \frac{1}{t}\int_0^t x(s)\,ds, \qquad 0 < t \leqslant 1,$$

(см. [13, гл. 2]).

Положим

$$\psi := \frac{1}{Hh}, \qquad h = \sup_U f^*;$$

тогда

$$\sup_{0<t\leqslant 1} \psi(t) f^{**}(t), \qquad f \in U,$$

функция ψ квазивогнута и

$$\frac{1}{\psi} = Hh \in L_{p,r}, \qquad \text{если} \quad h \in L_{p,r}.$$

Получаем, что из 6) следует такое утверждение:

7) существует квазивогнутая функция $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ такая, что $1/\psi \in L_{p,r}$ и $\sup_t \psi(t) f^{**}(t) \leqslant 1, f \in U$.

С другой стороны, 7) $\Longrightarrow \sup_U f^{**} \in L_{p,r} \Longrightarrow$ 6).

Частный случай теоремы 5.9 для независимых и *одинаково распределенных* случайных величин был доказан ранее в работе [19].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Никишин Е. М. Резонансные теоремы и надлинейные операторы // УМН. 1970. Т. 25. №6. С. 129–191.
[2] Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М.: АФЦ, 1999.
[3] Pisier G. Factorisation of Operators through $L_{p,\infty}$ and $L_{p,1}$ // Math. Ann. 1986. V. 276. P. 105–136.
[4] Макаров Б. М. p-абсолютно суммирующие операторы и некоторые их приложения // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. №2. С. 1–76.
[5] Кисляков С. В. Абсолютно суммирующие операторы на диск-алгебре // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. №4. С. 1–77.
[6] Никишин Е. М. Резонансная теорема и ряды по собственным функциям оператора Лапласа // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1972. Т. 36. №4. С. 795–813.
[7] Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. М.: Мир, 1980.
[8] Пич А. Операторные идеалы. М.: Мир, 1982.
[9] Партасарати К. Введение в теорию вероятностей и теорию меры. М.: Мир, 1983.
[10] Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
[11] Johnson W. B., Schechtman G. Sums of independent random variables in rearrangement invariant function spaces // Ann. of Probability. 1989. V. 17. №2. P. 789–808.
[12] Carothers N. L., Dilworth S. J. Inequalities for sums of independent random variables // Proc. of Amer. Math. Soc. 1988. V. 104. №1. P. 221–226.
[13] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
[14] Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
[15] Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces, I. Berlin: Springer, 1977.
[16] Ульянов П. Л. Представление функций рядами и классы $\varphi(L)$ // УМН. 1972. Т. 27. №2. С. 3–52.
[17] Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958.
[18] Hunt R. A. On $L(p,q)$ spaces // L'Enseignement Math. 1966. V. 12. №4. P. 249–276.
[19] Новиков С. Я., Штейнберг А. М. Пространства Лоренца и ограниченность почти наверное... // Сиб. матем. ж. 1989. Т. 30. №2. С. 138–144.

Самарский государственный университет
E-mail: nvks@ssu.samara.ru

Поступило
01.04.2002
Исправленный вариант
28.05.2003