Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Рябинин, В. Д. Быстрицкий, В. А. Ильичев, О сингулярных строго монотонных функциях, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 3, 439–451

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm120>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 15:40:41

УДК 517.5

О СИНГУЛЯРНЫХ СТРОГО МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЯХ

А. А. Рябинин, В. Д. Быстрицкий, В. А. Ильичев

Описывается универсальная методика построения непрерывных строго монотонно возрастающих сингулярных функций на отрезке $[-1, 1]$. “Генератором” метода является ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \pm 2^{-k}$ со случайной расстановкой знаков, и соответствующие функции порождаются как функции распределения таких рядов. В качестве примеров рассматриваются два стохастических способа расстановки знаков: независимый и марковский.

Библиография: 10 названий.

1. Введение. Непрерывная функция $F(x)$, определенная на отрезке $[-1, 1]$ и имеющая ограниченную вариацию, называется *сингулярной*, если $F'(x) = 0$ почти всюду на $[-1, 1]$. Нас будут интересовать сингулярные монотонные функции, удовлетворяющие условиям $F(-1) = 0$, $F(1) = 1$. Продолжим $F(x)$ за пределы $[-1, 1]$ по правилу: $F(x) = 0$ при $x < -1$ и $F(x) = 1$ при $x > 1$. Точка $x \in [-1, 1]$ называется *точкой роста* $F(x)$, если для произвольного $\epsilon > 0$ $F(x + \epsilon) - F(x - \epsilon) > 0$. Совокупность точек роста функции $F(x)$ называется *спектром* функции и обозначается $\text{Sp}(F)$. Спектр непрерывной функции является совершенным множеством.

Как следует из названия статьи, нас интересуют строго монотонно возрастающие сингулярные функции, т.е. такие функции, спектром которых является весь отрезок $[-1, 1]$. Существование таких функций весьма не очевидно, в отличие от сингулярных функций типа “канторовской лестницы”, для которых спектр представляет из себя совершенное нигде не плотное множество лебеговой меры нуль. Одним из первых примеров сингулярной строго монотонной функции явилась функция Минковского [1] (см. также [2]), достаточно полное исследование свойств которой, включая и доказательство сингулярности, было проведено А. Данжуа [3]. Другой пример, на котором мы хотим заострить внимание, был построен Р. Салемом [2]. В [4, с. 59] приведена несколько видоизмененная процедура построения функции Салема (так впредь мы будем ее называть). В ином контексте функция Салема появляется в работе [5] в качестве решения одного функционального уравнения. В книге [6, с. 155] приведена процедура построения сингулярных строго монотонных функций, основу которой составляют сингулярные функции типа “канторовской лестницы” и метод “сгущения особенностей”.

В данной статье описывается вероятностная процедура построения всего класса сингулярных строго монотонных функций. Ключевым понятием в этой модели являются ряды со случайной расстановкой знаков

$$\sum_{k=1}^{\infty} \pm \frac{1}{2^k}$$

и интересующие нас функции предстают как функции распределения сумм таких рядов. В частности, функция Салема порождается этой процедурой при независимом неравновероятном способе расстановки знаков.

2. Построение вероятностной процедуры. Пусть $\Omega = \{\omega : \omega = (t_1, t_2, \dots, t_n, \dots), t_n = \pm 1\}$. В построении процедуры можно выделить два существенных момента: во-первых, задание на Ω отображения $S: \Omega \rightarrow [-1, 1]$ и, во-вторых, определение на Ω структуры вероятностного пространства (Ω, β, P) , позволяющей рассматривать S как случайную величину, функция распределения которой при определенных условиях будет строго монотонной сингулярной функцией.

Начнем с отображения S , которое определим формулой

$$S(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k}{2^k}, \quad \omega = (t_1, \dots, t_k, \dots). \quad (1)$$

ЛЕММА 1. *Образом Ω при отображении S будет отрезок $[-1, 1]$, т.е. $S(\Omega) = [-1, 1]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение $S(\Omega) \subset [-1, 1]$ очевидно. Покажем, что и $[-1, 1] \subset S(\Omega)$, т.е. для произвольной точки $x \in [-1, 1]$ найдется $\omega_x \in \Omega$ такое, что

$$S(\omega_x) = x. \quad (2)$$

Заметим, что функция $u \rightarrow 1 - 2u$ осуществляет биекцию отрезков $[0, 1]$ и $[-1, 1]$, поэтому, если

$$u = \frac{\epsilon_1}{2} + \dots + \frac{\epsilon_k}{2^k} + \dots, \quad \epsilon_k = 0 \text{ или } 1, \quad (3)$$

– двоичное разложение числа $u \in [0, 1]$, то

$$x = 1 - 2u = \frac{1 - 2\epsilon_1}{2} + \dots + \frac{1 - 2\epsilon_k}{2^k} + \dots = \frac{t_1^{(x)}}{2} + \dots + \frac{t_k^{(x)}}{2^k} + \dots,$$

где $t_k^{(x)} = +1$ или -1 . Обозначая $\omega_x = (t_1^{(x)}, \dots, t_k^{(x)}, \dots)$, имеем $S(\omega_x) = x$. Лемма установлена.

ЗАМЕЧАНИЕ. Допуская, что сделано то или иное соглашение, обеспечивающее однозначность представления (3), можно утверждать, что посредством (1) устанавливается биекция между Ω и $[-1, 1]$.

Особую роль для нас будут играть, так называемые, цилиндрические множества в Ω .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Подмножество из Ω вида

$$C_n(\delta_1, \dots, \delta_n) = \{\omega : \omega = (\delta_1, \dots, \delta_n; t_{n+1}, \dots)\},$$

где $\delta_k = \pm 1, 1 \leq k \leq n$, фиксированы, а $t_k = \pm 1, k \geq n+1$, произвольные, называется *цилиндрическим* множеством (сокращенно *цилиндром*) с основанием $(\delta_1, \dots, \delta_n)$.

ЛЕММА 2. *Образом цилиндра $C_n(\delta_1, \dots, \delta_n)$ при отображении S является отрезок*

$$\left\{ x \in [-1, 1] : |x - x_n| \leq \frac{1}{2^n}, x_n = \frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_2}{2^2} + \dots + \frac{\delta_n}{2^n} \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 1 и замечания к ней произвольному $\omega \in C_n(\delta_1, \dots, \delta_n)$ взаимнооднозначно ставится в соответствие точка $x \in [-1, 1]$ по правилу

$$x = \frac{\delta_1}{2} + \dots + \frac{\delta_n}{2^n} + \frac{t_{n+1}}{2^{n+1}} + \frac{t_{n+2}}{2^{n+2}} + \dots = x_n + \frac{1}{2^n} \left(\frac{t_{n+1}}{2} + \frac{t_{n+2}}{2^2} + \dots \right).$$

Здесь $t_{n+1}, t_{n+2}, \dots$ принимают произвольные значения ± 1 и в силу леммы 1 числа $(t_{n+1}/2 + t_{n+2}/2^2 + \dots)$ сплошь заполняют отрезок $[-1, 1]$. Таким образом, соответствующие x образуют отрезок $[x_n - 1/2^n, x_n + 1/2^n]$. Лемма установлена.

С помощью цилиндрических множеств определим на Ω структуру борелевского пространства (Ω, β) , а именно, пусть β — σ -алгебра, порожденная цилиндрическими множествами $\{C_n(\delta_1, \dots, \delta_n)\}$. Далее, на (Ω, β) определим вероятностную меру P посредством последовательности конечномерных вероятностных распределений $\{P_n(t_1, \dots, t_n)\}$, удовлетворяющих условию согласованности [7]: для $n = 1, 2, \dots$

$$P_n(t_1, \dots, t_n) = P_{n+1}(t_1, \dots, t_n, 1) + P_{n+1}(t_1, \dots, t_n, -1), \quad (4)$$

так что

$$P(C_n(\delta_1, \dots, \delta_n)) = P_n(\delta_1, \dots, \delta_n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Впредь подчиним последовательность $\{P_n(t_1, \dots, t_n)\}$ условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(t_1, \dots, t_n) = 0 \quad \forall \omega = (t_1, \dots, t_n, \dots) \in \Omega, \quad (6)$$

которое означает, что вероятностное пространство (Ω, β, P) не имеет атомов. Действительно, для всех $\omega = (\delta_1, \dots, \delta_n, \dots) \in \Omega$

$$\begin{aligned} P(\{\omega\}) &= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n(\delta_1, \dots, \delta_n)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(C_n(\delta_1, \dots, \delta_n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\delta_1, \dots, \delta_n) = 0. \end{aligned}$$

Пусть $\{X_k(\omega) = t_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность координатных функций на (Ω, β, P) . Для совместного распределения $(X_1, \dots, X_n)$ имеем

$$\begin{aligned} P(\omega : X_1 = \delta_1, \dots, X_n = \delta_n) &= P(\omega : \omega = (\delta_1, \dots, \delta_n; t_{n+1}, \dots)) \\ &= P(C_n(\delta_1, \dots, \delta_n)) = P_n(\delta_1, \dots, \delta_n). \end{aligned}$$

На (Ω, β, P) рассмотрим ряд

$$S(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k(\omega)}{2^k}. \quad (7)$$

Поскольку случайные величины $\{X_k(\omega)\}_{k=1}^{\infty}$ принимают только лишь значения ± 1 , это ряд со случайной расстановкой знаков и стохастические закономерности в расстановке знаков обусловлены свойствами набора $\{P_n(\delta_1, \dots, \delta_n)\}$. Обозначим

$$F_S(x) = P(\omega : S(\omega) \leq x)$$

функцию распределения суммы ряда (7). Это монотонно неубывающая неотрицательная функция; $F_S(x) = 0$ при $x < -1$ и $F_S(x) = 1$ при $x \geq 1$. Таким образом, отрезок $[-1, 1]$ содержит спектр $F_S(x)$.

3. Результаты.

ТЕОРЕМА 1. *Функция распределения $F_S(x)$ суммы ряда (7) непрерывна тогда и только тогда, когда последовательность $\{P_n(t_1, \dots, t_n)\}_{n=1}^\infty$ удовлетворяет условию*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(t_1, \dots, t_n) = 0 \quad \forall \omega = (t_1, \dots, t_n, \dots) \in \Omega. \quad (8)$$

Теорема 2 дает ответ на вопрос о том, насколько универсально представление непрерывных функций со спектром, содержащемся на отрезке $[-1, 1]$ в виде функций распределения сумм рядов вида (7).

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $F(x)$, $x \in [-1, 1]$, – непрерывная монотонно неубывающая функция и $F(-1) = 0$, $F(1) = 1$. Тогда на борелевском пространстве (Ω, β) можно определить вероятность P таким образом, что функция распределения $F_S(x)$ суммы S ряда (7) есть $F(x)$.*

Теоремы 3 и 4 представляют содержательную часть вероятностной процедуры, построенной в п. 2, по отношению к конструкции строго монотонных сингулярных функций, а именно, в этих теоремах приводятся условия на систему $\{P_n(t_1, \dots, t_n)\}_{n=1}^\infty$, определяющую вероятность P , чтобы функция распределения $F_S(x)$ суммы S ряда (7) была строго монотонной сингулярной функцией.

ТЕОРЕМА 3. *Функция распределения $F_S(x)$ суммы ряда (7) строго монотонно возрастает на $[-1, 1]$ тогда и только тогда, когда для $n = 1, 2, \dots$*

$$P_n(t_1, \dots, t_n) > 0 \quad \forall t_k = \pm 1, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (9)$$

ТЕОРЕМА 4. *Пусть выполнено условие (8). Функция распределения $F_S(x)$ суммы ряда (7) сингулярна тогда и только тогда, когда для почти всех $x = t_1/2 + t_2/2^2 + \dots + t_n/2^n + \dots \in [-1, 1]$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n P_n(t_1, \dots, t_n) = 0. \quad (10)$$

В качестве иллюстрации мы рассматриваем два стохастических способа расстановки знаков в ряде (7). Сначала вероятностная процедура рассматривается в ситуации, когда

$$P_n(t_1, \dots, t_n) = \prod_{k=1}^n p^{(1-t_k)/2} (1-p)^{(1+t_k)/2}, \quad 0 < p < 1, \quad p \neq \frac{1}{2}. \quad (11)$$

Нетрудно показать, что последовательность $\{X_k(\omega)\}$, обеспечивающая стохастическую расстановку знаков в (7), является последовательностью равнораспределенных случайных величин с распределением

$$P(X_n(\omega) = \delta) = p^{(1-\delta)/2} (1-p)^{(1+\delta)/2}, \quad \delta = \pm 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

Второй пример соответствует марковскому способу расстановки знаков в (7), а именно, пусть

$$P_1(t_1) = \frac{1}{2}, \quad P_n(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{2} \prod_{k=1}^{n-1} p(t_k, t_{k+1}), \quad n = 2, 3, \dots, \quad (12)$$

где $p(t_k, t_{k+1})$ – элементы матрицы

$$|p(t_k, t_{k+1})| = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \alpha \neq \frac{1}{2}.$$

Подробно эти примеры рассмотрены в п. 5.

4. Доказательства теорем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть (8) имеет место, но $F_S(x)$ имеет точку разрыва $x_0 \in [-1, 1]$, т.е. для любого $\epsilon > 0$ найдется $\Delta > 0$ и

$$F_S(x_0 + \epsilon) - F_S(x_0 - \epsilon) \geq \Delta > 0.$$

Отсюда

$$P(\omega : x_0 - \epsilon < S(\omega) \leq x_0 + \epsilon) \geq \Delta > 0.$$

По непрерывности вероятности при $\epsilon \rightarrow 0$ имеем

$$P(\omega : S(\omega) = x_0) \geq \Delta > 0.$$

В силу замечания к лемме 1 равенство $S(\omega) = x_0$ может реализоваться только одним $\omega_0 \in \Omega$, поэтому

$$P(\omega : S(\omega) = x_0) = P(\{\omega_0\}) \geq \Delta > 0,$$

что противоречит (8), которое, как это было показано ранее, означает отсутствие атомов в (Ω, β, P) .

Обратно, пусть $F_S(x)$ непрерывна, т.е. для любого $x_0 \in [-1, 1]$

$$F_S(x_0) - F_S(x) \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow x_0 - 0.$$

Для $x \rightarrow x_0 + 0$ это выполняется всегда, так как функция распределения непрерывна справа. Далее имеем

$$P(\omega : x < S(\omega) \leq x_0) \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow x_0 - 0.$$

По непрерывности вероятности

$$P(\omega : S(\omega) = x_0) = 0 \quad \forall x_0 \in [-1, 1].$$

В силу леммы 1 и замечания к ней отображение S осуществляет биекцию Ω на $[-1, 1]$; следовательно, из полученного равенства немедленно следует, что $P(\{\omega\}) = 0$ для любого $\omega \in \Omega$, а это эквивалентно (8). Теорема установлена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Положим

$$P_n(t_1, \dots, t_n) = F\left(x_n + \frac{1}{2^n}\right) - F\left(x_n - \frac{1}{2^n}\right), \quad x_n = \frac{t_1}{2} + \dots + \frac{t_n}{2^n}. \quad (13)$$

Обращаясь к лемме 2, видим, что в правой части соотношения (13) стоит приращение функции $F(x)$ на образе $[x_n - 1/2^n, x_n + 1/2^n]$ цилиндрического множества $C_n(t_1, \dots, t_n)$ при отображении S . Отметим также, что образами цилиндрических множеств $C_{n+1}(t_1, \dots, t_n, -1)$ и $C_{n+1}(t_1, \dots, t_n, 1)$ будут, соответственно, отрезки $[x_n - 1/2^n, x_n]$ и $[x_n, x_n + 1/2^n]$. Действительно, например, для $S(C_{n+1}(t_1, \dots, t_n, -1))$ из леммы 2 имеем

$$S(C_{n+1}(t_1, \dots, t_n, -1)) = \left\{ x \in [-1, 1] : x_{n+1} - \frac{1}{2^{n+1}} \leq x \leq x_{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}} \right\},$$

при этом

$$x_{n+1} = \frac{t_1}{2} + \dots + \frac{t_n}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} = x_n - \frac{1}{2^{n+1}}$$

и, следовательно,

$$S(C_{n+1}(t_1, \dots, t_n, -1)) = \left\{ x \in [-1, 1] : x_n - \frac{1}{2^n} \leq x \leq x_n \right\}.$$

В силу этого, условие согласованности набора конечномерных вероятностных распределений, задаваемых (13),

$$P_n(t_1, \dots, t_n) = P_{n+1}(t_1, \dots, t_n, -1) + P_{n+1}(t_1, \dots, t_n, +1)$$

есть следствие того, что $F(x)$ непрерывна и приращение $F(x)$ на отрезке $[x_n - 1/2^n, x_n + 1/2^n]$ есть сумма приращений этой функции на отрезках $[x_n - 1/2^n, x_n]$ и $[x_n, x_n + 1/2^n]$.

Покажем сейчас, что приращения $F(x)$ и $F_S(x)$ равны на любом отрезке $[x_n - 1/2^n, x_n + 1/2^n]$ для любого $n = 1, 2, \dots$. Действительно,

$$\begin{aligned} \Delta F_S(x)|_{[x_n - \frac{1}{2^n}, x_n + \frac{1}{2^n}]} &= F_S\left(x_n + \frac{1}{2^n}\right) - F_S\left(x_n - \frac{1}{2^n}\right) \\ &= P\left(\omega : x_n - \frac{1}{2^n} < S(\omega) \leq x_n + \frac{1}{2^n}\right) = P(C_n(t_1, \dots, t_n)) \\ &= P_n(t_1, \dots, t_n) = \Delta F(x)|_{[x_n - \frac{1}{2^n}, x_n + \frac{1}{2^n}]}. \end{aligned}$$

Учитывая теперь, что $F_S(-1) = F(-1) = 0$, приходим к выводу, что $F_S(x) = F(x)$ при $x = x_n + 1/2^n$, $n = 1, 2, \dots$. Заметим теперь, что

$$x = x_n + \frac{1}{2^n} = \frac{m}{2^{n-1}}, \quad -2^{n-1} + 1 \leq m \leq 2^{n-1} - 1, \quad \text{где } m \text{ нечетны.}$$

Но числа вида $\{m/2^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ распределены всюду плотно на $[-1, 1]$. Следовательно, учитывая непрерывность $F(x)$ и, как следствие, непрерывность $F_S(x)$ ((13) и теорема 1), убеждаемся в равенстве $F(x) = F_S(x)$. Теорема установлена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть (9) выполнено, но нашлись $x_1, x_2 \in [-1, 1]$, $x_1 < x_2$ такие, что $F_S(x_1) = F_S(x_2)$. Это влечет $P(\omega : x_1 < S(\omega) \leq x_2) = 0$. Обозначим $\bar{x} = (x_1 + x_2)/2$ и $\epsilon = (x_2 - x_1)/2$. В силу леммы 1 найдется $\bar{\omega} = (\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_k, \dots)$ такое, что

$$\bar{x} = S(\bar{\omega}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{t}_k}{2^k}.$$

Подберем $n = n(\epsilon)$ так, чтобы

$$\left| S(\bar{\omega}) - \sum_{k=1}^n \frac{\bar{t}_k}{2^k} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{\epsilon}{2},$$

и рассмотрим цилиндр $C_n(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n)$. Для произвольного $\omega \in C_n(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n)$, $\omega = (\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n, t_{n+1}, \dots)$, $t_k = \pm 1$, $k \geq n+1$, имеем

$$|S(\omega) - \bar{x}| = |S(\omega) - S(\bar{\omega})| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{t_k - \bar{t}_k}{2^k} \right| \leq \epsilon.$$

Поэтому

$$C_n(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n) \subset A = \{\omega : |S(\omega) - \bar{x}| \leq \epsilon\} = \{\omega : x_1 \leq S(\omega) \leq x_2\}$$

и

$$P(C_n(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n)) = P_n(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n) \leq P(A).$$

С одной стороны, $P(A) = 0$, с другой же стороны, в силу (9) $P_n(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n) > 0$. Итак, (9) достаточно для строго монотонного возрастания $F_S(x)$.

Обратно, пусть (9) не выполняется; тогда найдется набор $(\delta_1, \dots, \delta_n)$ такой, что

$$P_n(\delta_1, \dots, \delta_n) = 0.$$

Рассмотрим произвольные $x_1, x_2 \in (x_n - 1/2^n, x_n + 1/2^n)$, где $x_n = \delta_1/2 + \dots + \delta_n/n$, и покажем, что $F_S(x_1) = F_S(x_2)$. Действительно,

$$\begin{aligned} F_S(x_2) - F_S(x_1) &= P(\omega : x_1 < S(\omega) \leq x_2) \leq P\left(\omega : x_n - \frac{1}{2^n} < S(\omega) \leq x_n + \frac{1}{2^n}\right) \\ &= P(C_n(\delta_1, \dots, \delta_n)) = P_n(\delta_1, \dots, \delta_n) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, строго монотонное возрастание функции $F_S(x)$ нарушается. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Пусть $F_S(x)$ — сингулярна; тогда $F'_S(x) = 0$ почти всюду на отрезке $[-1, 1]$, т.е. найдется множество $U \subset [-1, 1]$ полной меры такое, что $F'_S(x) = 0$ для всех $x \in U$. Заметим, что можно пренебречь двоично-рациональными точками в U , т.е. точками вида $x = t_1/2 + t_k/2^k$, $t_k = \pm 1$, так как они образуют множества нулевой лебеговой меры.

Для произвольной точки $x = t_1^{(x)}/2 + t_k^{(x)}/2^k + \dots \in U$ построим систему стягивающихся отрезков вида

$$\begin{aligned} \left\{ [x_1^{(n)}, x_2^{(n)}] : x_1^{(n)} &= \frac{t_1^{(x)}}{2} + \dots + \frac{t_n^{(x)}}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} - \dots, \right. \\ x_2^{(n)} &= \frac{t_1^{(x)}}{2} + \dots + \frac{t_n^{(x)}}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots \left. \right\}_{n=1}^{\infty}. \end{aligned}$$

Длина отрезков $[x_1^{(n)}, x_2^{(n)}]$ $x_2^{(n)} - x_1^{(n)} = 1/2^{n-1}$ и

$$x = \bigcap_{n=1}^{\infty} [x_1^{(n)}, x_2^{(n)}].$$

Так как в точке x производная $F'_S(x)$ существует и $F'_S(x) = 0$, получаем

$$0 = F'_S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_S(x_2^{(n)}) - F_S(x_1^{(n)})}{x_2^{(n)} - x_1^{(n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n P(\omega : x_1^{(n)} < S(\omega) \leq x_2^{(n)}).$$

Из леммы 2, используя замечание к лемме 1, можно сделать вывод, что прообразом отрезка $[x_1^{(n)}, x_2^{(n)}]$ является цилиндрическое множество $C_n(t_1^{(x)}, \dots, t_n^{(x)})$, поэтому

$$P(\omega : x_1^{(n)} < S(\omega) \leq x_2^{(n)}) = P(C_n(t_1^{(x)}, \dots, t_n^{(x)})) = P_n(t_1^{(x)}, \dots, t_n^{(x)}),$$

а значит, для почти всех $x \in [-1, 1]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n P_n(t_1^{(x)}, \dots, t_n^{(x)}) = 0.$$

Необходимость условия (10) сингулярности $F_S(x)$ установлена.

Докажем теперь достаточность. Пусть условие (10) выполнено. Так как $F_S(x)$ – функция распределения ряда, она монотонно возрастает, а следовательно, по теореме Лебега [4] ее производная существует и конечна почти всюду на $[-1, 1]$. Для произвольной точки $x = t_1^{(x)}/2 + \dots + t_k^{(x)}/2^k + \dots$, для которой существует конечная производная, построим набор стягивающихся отрезков $\{[x_1^{(n)}, x_2^{(n)}]\}_{n=1}^\infty$ так же, как было описано выше. Тогда имеем

$$F'_S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_S(x_2^{(n)}) - F_S(x_1^{(n)})}{x_2^{(n)} - x_1^{(n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n P_n(t_1^{(x)}, \dots, t_n^{(x)}),$$

а в силу условия (10) для почти всех $x \in [-1, 1]$, $x = t_1/2 + \dots + t_n/2^n + \dots$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n P_n(t_1, \dots, t_n) = 0.$$

Поскольку пересечение двух множеств полной меры есть множество полной меры, то $F'_S(x) = 0$ почти всюду, а условие (8) обеспечивает непрерывность $F_S(x)$, что и обеспечивает сингулярность $F_S(x)$. Теорема доказана.

5. Примеры. Сейчас мы обратимся к двум частным способам стохастической расстановки знаков.

ПРИМЕР 1 (функция Салема). Пусть набор $\{P_n(t_1, \dots, t_n)\}$ задается посредством (11). Нетрудно видеть, что условия (8), (9) выполняются, так что $F_S(x)$ – непрерывная строго монотонно возрастающая на $[-1, 1]$ функция. Обращаясь теперь к теореме 4, покажем, что $F_S(x)$ сингулярная функция при $p \neq 1/2$. Действительно, имея в виду условие (10), пусть $x = t_1/2 + \dots + t_n/2^n + \dots \in [-1, 1]$ и n_x – количество (-1) в наборе $(t_1, \dots, t_n)$. Имеем согласно (11)

$$2^n P_n(t_1, \dots, t_n) = 2^n p^{n_x} (1-p)^{n-n_x}. \quad (14)$$

Согласно известной теореме о “нормальных” числах (см., например, [8, с. 39])

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_x}{n} = \frac{1}{2}$$

для почти всех $x \in [-1, 1]$, так что для всех $\epsilon > 0$ и $n > N(\epsilon; x)$

$$\frac{1}{2} - \epsilon < \frac{n_x}{n} < \frac{1}{2} + \epsilon.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} 2^n P_n(t_1, \dots, t_n) &= (2(1-p))^n \left(\left(\frac{p}{(1-p)} \right)^{n_x/n} \right)^n \\ &\leq \left(2(1-p) \left(\frac{p}{1-p} \right)^{1/2 \pm \epsilon} \right)^n = \left((4(1-p)p)^{1/2} \left(\frac{p}{1-p} \right)^{\pm \epsilon} \right)^n. \end{aligned}$$

Здесь “+” или “-” выбираются в соответствии с $p > 1/2$ или $p < 1/2$. Поскольку $[4p(1-p)]^{\frac{1}{2}} < 1$, при достаточно малом $\epsilon > 0$ и всех $n > N(\epsilon; x)$ получаем

$$(4(1-p)p)^{1/2} \left(\frac{p}{1-p} \right)^{\pm \epsilon} < 1,$$

что и обеспечивает выполнение (11) для почти всех $x \in [-1, 1]$ при $p \neq 1/2$.

Следующая наша цель – это показать, что $F_S(x)$ является функцией Салема [2]. Важная информация содержится в следующей лемме.

ЛЕММА 3. Пусть выполнено (11). Тогда

1) для функции распределения $F_S(x)$ ряда (7) имеем соотношение

$$F_S(x) = pF_S(2x+1) + (1-p)F_S(2x-1); \quad (15)$$

2) для преобразования Фурье–Стилтьеса $\hat{F}_S(z)$ функции распределения $F_S(x)$ имеем для $z \in \mathbb{C}$

$$\hat{F}_S(z) = \prod_{n=1}^{\infty} Q\left(\frac{z}{2^n}\right), \quad Q(u) = (1-p)e^{iu} + pe^{-iu}. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) При выполнении (11) система координатных случайных величин $\{X_k(\omega)\}_{k=1}^{\infty}$ является системой независимых одинаково распределенных случайных величин. Поэтому

$$\begin{aligned} F_S(x) &= P(\omega : S(\omega) \leq x) \\ &= P\left(X_1 = -1; -\frac{1}{2} + \frac{X_2}{2^2} + \dots \leq x\right) + P\left(X_1 = +1; \frac{1}{2} + \frac{X_2}{2^2} + \dots \leq x\right) \\ &= pF_S(2x+1) + (1-p)F_S(2x-1). \end{aligned}$$

2) Имеем на основании (15)

$$\begin{aligned} \hat{F}_S(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} dF_S(x) = p \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} dF_S(2x+1) + (1-p) \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} dF_S(2x-1) \\ &= pe^{-i\frac{z}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{z}{2}t} dF_S(t) + (1-p)e^{i\frac{z}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{z}{2}t} dF_S(t) \\ &= Q\left(\frac{z}{2}\right) \hat{F}_S\left(\frac{z}{2}\right). \end{aligned}$$

Итерируя полученное соотношение, имеем

$$\hat{F}_S(z) = \hat{F}_S\left(\frac{z}{2^n}\right) \prod_{k=1}^n Q\left(\frac{z}{2^k}\right).$$

При $n \rightarrow \infty$ $\hat{F}_S(z/2^n) \rightarrow 1$; $\prod_{k=1}^n Q(z/2^k) \rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} Q(z/2^n)$ равномерно на любом компакте в $\mathbb{C}$ [9, с. 277].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При $p = 1/2$, как видно из (16), $\widehat{F}_S(z) = \sin z/z$ и, следовательно, $F_S(x) = x/2 + 1/2$, т.е. функция распределения равномерного вероятностного распределения на $[-1, 1]$. В этом случае $P_n(t_1, \dots, t_n) = 1/2^n$, $n = 1, 2, \dots$, т.е. знаки в (7) расставляются независимо и равномерно.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Сравнивая выражение (16) для $\widehat{F}_S(z)$ при $p \neq 1/2$ с формулой для преобразования Фурье–Стилтьеса функции Салема [2], адаптированной к отрезку $[-1, 1]$ (в [2] получены только формулы для коэффициентов Фурье–Стилтьеса), убеждаемся в их совпадении. Привлекая теперь теорему единственности для преобразований Фурье–Стилтьеса [8], приходим к выводу, что функция распределения суммы ряда (7) в данном частном случае (11), $p \neq 1/2$, есть в точности функция Салема, конструктивная процедура построения которой приведена в [2] (см. также [4, с. 59]).

ПРИМЕР 2. Пусть набор $\{P_n(t_1, \dots, t_n)\}$ задается посредством (12). В этом случае координатные случайные величины $\{X_k\}_{k=1}^\infty$ образуют марковскую цепь с начальным распределением $(1/2, 1/2)$ и матрицей переходных вероятностей $\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$. В [10] получена удобная формула для $P_n(t_1, \dots, t_n)$: для $n = 2, 3, \dots$

$$P_n(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{2^n \operatorname{ch}^{n-1} J} e^{J \sum_{k=1}^{n-1} t_k t_{k+1}}, \quad J = \frac{1}{2} \ln \frac{1-\alpha}{\alpha}. \quad (17)$$

Как нетрудно видеть из (17), условия (8) и (9) теорем 1 и 3 выполняются; следовательно, $F_S(x)$ является непрерывной строго монотонно возрастающей функцией. Покажем, что при $\alpha \neq 1/2$ $F_S(x)$ является сингулярной функцией.

Левая часть соотношения (10) теоремы 4 с учетом (17) может быть записана в виде

$$\frac{\operatorname{ch} J}{e^{J t_1}} \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left\{ J \left(t_1 + \sum_{k=1}^{n-1} t_k t_{k+1} \right) - n \ln \operatorname{ch} J \right\}. \quad (18)$$

Остается показать, что для почти всех $x = t_1/2 + \dots + t_n/2^n + \dots \in [-1, 1]$ предел в (18) равен нулю.

Рассмотрим отображение $A: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$, определяемое следующим образом: пусть $x = t_1/2 + \dots + t_n/2^n + \dots$; тогда

$$u = A(x), \quad \text{где } u = \frac{t_1}{2} + \frac{t_1 t_2}{2^2} + \dots + \frac{t_{n-1} t_n}{2^n} + \dots \in [-1, 1]. \quad (19)$$

Обозначим $s_1 = t_1$, $s_2 = t_1 t_2$, $\dots$, $s_n = t_{n-1} t_n$, $\dots$ – коэффициенты бинарного разложения u . Тогда в новых обозначениях предел в (18) запишется в виде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left\{ J \sum_{k=1}^n s_k - n \ln \operatorname{ch} J \right\}.$$

Нетрудно показать, что для почти всех $u \in [-1, 1]$, $u = s_1/2 + s_2/2^2 + \dots + s_n/2^n + \dots$, этот предел равен нулю. Действительно, обозначим n_u – количество (-1) в наборе $(s_1, \dots, s_n)$, так что $(n - n_u)$ – количество $(+1)$ в этом наборе. В таком случае рассматриваемый предел запишется в виде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left\{ n \left[2J \left(\frac{1}{2} - \frac{n_u}{n} \right) - \ln \operatorname{ch} J \right] \right\}.$$

С учетом того, что $\ln \operatorname{ch} J > 0$ для $J \neq 0$ ($\alpha \neq 1/2$) и теоремы о “нормальных” числах [8, с. 39] для всех достаточно больших n и почти всех $u \in [-1, 1]$

$$2J\left(\frac{1}{2} - \frac{n_u}{n}\right) - \ln \operatorname{ch} J < 0,$$

что и приводит к желаемому результату.

Дальнейшая наша цель – показать, что тот же вывод справедлив и для почти всех $x = t_1/2 + \dots + t_n/2^n + \dots \in [-1, 1]$. Обратимся к отображению A .

ЛЕММА 5. *Отображение $A : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$, определяемое формулой (19) сюръективно и является биекцией вне множества рациональных чисел.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u = s_1/2 + \dots + s_n/2^n + \dots \in [-1, 1]$, $s_n = \pm 1$, произвольное. Рассмотрим $x = s_1/2 + s_1 s_2/2^2 + \dots + s_1 s_2 \dots s_n/2^n + \dots \in [-1, 1]$. Имеем

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{s_1}{2} + \frac{s_1^2 s_2}{2^2} + \frac{(s_1 s_2)^2 s_3}{2^3} + \dots + \frac{(s_1 s_2 \dots s_{n-1})^2 s_n}{2^n} + \dots \\ &= \frac{s_1}{2} + \frac{s_2}{2^2} + \dots + \frac{s_n}{2^n} + \dots = u \end{aligned}$$

и сюръективность установлена.

Покажем теперь, что “слипание” образов отображения A происходит на рациональных $x \in [-1, 1]$ и образом в этом случае является также рациональное $u \in [-1, 1]$. Итак, пусть

$$\begin{aligned} A(x_1) = A(x_2), \quad x_1 &= \frac{t_1^{(1)}}{2} + \dots + \frac{t_k^{(1)}}{2^k} + \dots, \quad x_2 = \frac{t_1^{(2)}}{2} + \dots + \frac{t_k^{(2)}}{2^k} + \dots \quad \text{и} \\ n &= \min(k : t_k^{(1)} \neq t_k^{(2)}), \quad \text{т.е.} \quad t_1^{(1)} = t_1^{(2)}, \quad \dots, \quad t_{n-1}^{(1)} = t_{n-1}^{(2)}, \quad t_n^{(1)} \neq t_n^{(2)}. \end{aligned}$$

Тогда равенство $A(x_1) = A(x_2)$ с учетом (19) влечет

$$\frac{t_{n-1}^{(1)} t_n^{(1)}}{2^n} + \frac{t_n^{(1)} t_{n+1}^{(1)}}{2^{n+1}} + \dots = \frac{t_{n-1}^{(2)} t_n^{(2)}}{2^n} + \frac{t_n^{(2)} t_{n+1}^{(2)}}{2^{n+1}} + \dots. \quad (20)$$

Примем для определенности $t_{n-1}^{(1)} = t_{n-1}^{(2)} = 1$, $t_n^{(1)} = 1$, $t_n^{(2)} = -1$. Имеем из (20)

$$(t_n^{(1)} - t_n^{(2)}) + \frac{t_n^{(1)} t_{n+1}^{(1)} - t_n^{(2)} t_{n+1}^{(2)}}{2} + \frac{t_{n+1}^{(1)} t_{n+2}^{(1)} - t_{n+1}^{(2)} t_{n+2}^{(2)}}{2^2} + \dots = 0$$

или

$$2 + \frac{t_{n+1}^{(1)} + t_{n+1}^{(2)}}{2} + \frac{t_{n+1}^{(1)} t_{n+2}^{(1)} - t_{n+1}^{(2)} t_{n+2}^{(2)}}{2^2} + \dots = 0.$$

Отсюда с необходимостью получим

$$\begin{cases} t_{n+1}^{(1)} = -1, \\ t_{n+1}^{(2)} = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} t_{n+2}^{(1)} = 1, \\ t_{n+2}^{(2)} = -1, \end{cases} \quad \dots \quad \begin{cases} t_{n+k}^{(1)} = (-1)^k, \\ t_{n+k}^{(2)} = -1. \end{cases}$$

Поэтому, обозначая $t_1^{(1)} = t_1^{(2)} = t_1, \dots, t_{n-1}^{(1)} = t_{n-1}^{(2)} = t_{n-1}$, имеем

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{t_1}{2} + \frac{t_2}{2^2} + \dots + \frac{t_{n-2}}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{(-1)^k}{2^{n+k}} + \dots, \\ x_2 &= \frac{t_1}{2} + \frac{t_2}{2^2} + \dots + \frac{t_{n-2}}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} - \dots - \frac{1}{2^{n+k}} + \dots. \end{aligned}$$

Очевидно, обе точки рациональные, равно как и их образ

$$\begin{aligned} u = A(x_1) = A(x_2) &= \frac{t_1}{2} + \frac{t_1 t_2}{2^2} + \dots + \frac{t_{n-3} t_{n-2}}{2^{n-2}} + \frac{t_{n-2}}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots \\ &= \frac{t_1}{2} + \frac{t_1 t_2}{2^2} + \dots + \frac{t_{n-3} t_{n-2}}{2^{n-2}} + \frac{t_{n-2}}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Таким образом, отображение A не является инъективным и нарушение инъективности происходит на множестве рациональных точек отрезка $[-1, 1]$. Исключив рациональные точки, мы имеем на оставшейся части отрезка $[-1, 1]$, которая имеет полную лебегову меру, биективность отображения A . Лемма установлена.

На множестве иррациональных точек отрезка $[-1, 1]$ определим обратное отображение $A^{-1}(u)$: пусть $u = s_1/2 + \dots + s_n/2^n + \dots$; тогда

$$x = A^{-1}(u) = \frac{s_1}{2} + \frac{s_1 s_2}{2^2} + \dots + \frac{s_1 s_2 \dots s_n}{2^n} + \dots. \quad (21)$$

ЛЕММА 6. *Отображение A^{-1} сохраняет меру Лебега.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим подмножество $M_n(\delta_1, \dots, \delta_n) \subset [-1, 1]$ вида

$$\begin{aligned} M_n(\delta_1, \dots, \delta_n) &= \left\{ u \in [-1, 1] : u = \frac{\delta_1}{2} + \dots + \frac{\delta_n}{2^n} + \frac{s_{n+1}}{2^{n+1}} + \dots, \right. \\ &\quad \delta_k = \pm 1, 1 \leq k \leq n, \text{ фиксированы,} \\ &\quad \left. s_k = \pm 1, k \geq n+1, \text{ произвольные} \right\} \\ &= \left\{ u \in [-1, 1] : u = \frac{m}{2^n} + \frac{1}{2^n} \left(\frac{s_{n+1}}{2} + \frac{s_{n+2}}{2^2} + \dots \right), \right. \\ &\quad \left. m = \delta_1 2^{n-1} + \dots + \delta_n \right\}, \end{aligned}$$

т.е. $M_n(\delta_1, \dots, \delta_n)$ есть отрезок вида $[m/2^n - 1/2^n, m/2^n + 1/2^n]$, так что лебегова мера $\lambda(M_n(\delta_1, \dots, \delta_n)) = 1/2^{n-1}$.

Далее имеем согласно (21) на множестве иррациональных точек $M_n(\delta_1, \dots, \delta_n)$

$$\begin{aligned} A^{-1}(M_n(\delta_1, \dots, \delta_n)) &= \left\{ x \in [-1, 1] : x = \frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_1 \delta_2}{2^2} + \dots + \frac{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_n}{2^n} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_n s_{n+1}}{2^{n+1}} + \dots \right\} \\ &= \left\{ x \in [-1, 1] : x = \frac{l}{2^n} + \frac{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_n}{2^n} \left(\frac{s_{n+1}}{2} + \frac{s_{n+1} s_{n+2}}{2^2} + \dots \right), \right. \\ &\quad \left. l = \delta_1 2^{n-1} + \dots + \delta_1 \delta_2 \dots \delta_n \right\} \\ &= \left\{ x \in [-1, 1] : x = \frac{l}{2^n} + \frac{1}{2^n} A^{-1}([-1, 1]) \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда и из свойств биективности отображения A на множестве иррациональных точек отрезка $[-1, 1]$ заключаем, что

$$\lambda(A^{-1}(M_n(\delta_1, \dots, \delta_n))) = \lambda\left\{x \in [-1, 1] : \left|x - \frac{l}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n}\right\} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Таким образом, на отрезках вида $[m/2^n - 1/2^n, m/2^n + 1/2^n]$ для всех $n = 1, 2, \dots$ отображение A^{-1} сохраняет меру Лебега. Поскольку точки вида $m/2^n$, $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, всюду плотно расположены на $[-1, 1]$, а отображение A^{-1} биективно вне множества рациональных точек, которое имеет меру нуль, отсюда следует, что отображение A^{-1} сохраняет меру Лебега. Лемма установлена.

СЛЕДСТВИЕ. Предел (18) равен нулю для почти всех $x \in [-1, 1]$, $x = t_1/2 + \dots + t_n/2^n + \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, нами установлено, что (18) равен нулю для почти всех $u = A(x) \in [-1, 1]$. Но согласно лемме 6 отображение $x = A^{-1}(u)$ переводит множество полной меры в множество полной меры; следовательно, равенство нулю для почти всех $u \in [-1, 1]$ соответствует почти всем $x = t_1/2 + \dots + t_n/2^n + \dots \in [-1, 1]$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Minkowski H. Zur Geometrie der Zahlen // Gesammelte Abhandlungen. 1911. V. 2. P. 50–51.
- [2] Salem R. On some singular monotonic functions which are strictly increasing // Trans. Amer. Math. Soc. 1943. V. 53. P. 427–439.
- [3] Denjoy A. Sur une fonction réelle de Minkowski // J. Math. Pures Appl. 1938. V. 17. P. 105–151.
- [4] Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. 2-е изд. М.: Мир, 1979.
- [5] de Rham G. Sur quelques courbes définies par des équations fonctionnelles // Rend. Sem. Matem. Univ. Torino. 1956–1957. № 16. P. 101–113.
- [6] Сакс С. Теория интеграла. М.: ИЛ, 1949.
- [7] Партасарати К. Введение в теорию вероятностей и теорию меры. М.: Мир, 1983.
- [8] Ламперти Дж. Вероятность. М.: Наука, 1973.
- [9] Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Т. 1. М.: Наука, 1967.
- [10] Рябинин А. А. О характеристических функциях вероятностных распределений сумм случайной расстановкой знаков // Теория вероятн. и ее примен. 2000. Т. 45. № 4. С. 773–776.

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Поступило

10.04.2001

Исправленный вариант

18.06.2003