Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. М. Тимофеев, О разности числа простых делителей последовательных чисел, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 4, 579–595

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1200>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 14:22:04

УДК 511

О РАЗНОСТИ ЧИСЛА ПРОСТЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Н. М. Тимофеев

Пусть $g(n)$ равняется числу делителей n с учетом кратности или числу делителей n , $a \neq 0$ – целое число и

$$N(x, b) = |\{n : n \leq x, g(n+a) - g(n) = b \text{ или } b+1\}|.$$

В работе доказано, что $\sup_b N(x, b) \leq C(a)x(\ln \ln 10x)^{-1/2}$ и существует постоянная $C(a, \mu) > 0$, с которой при целом b , $|b| \leq \mu(\ln \ln x)^{1/2}$, $x \geq x_0$, выполнено $N(x, b) \geq C(a, \mu)x(\ln \ln x)^{-1/2}$.

Библиография: 10 названий.

Пусть $\omega(n)$ и $\Omega(n)$ – соответственно число простых делителей n и число простых делителей n с учетом кратности.

Используя метод работы Хиз-Брауна [1], можно показать, что существует бесконечно много натуральных чисел n таких, что $\Omega(n+1) = \Omega(n)$. В работе [2] Кэн показал, что существует бесконечно много натуральных n , для которых

$$|\omega(n+a) - \omega(n)| \leq 1, \quad \omega(n) = k \geq 1,$$

где $a \neq 0$ – целое число. В замечании в [2] отмечается, что метод работы позволяет доказать, что

$$|\{n : n \leq x, |\omega(n+a) - \omega(n)| \leq 1\}| \geq cx(\ln \ln x)^t \ln^{-2} x,$$

где постоянная $c > 0$, t – любая положительная постоянная. Там же, основываясь на работе [3], высказана гипотеза, что последнее неравенство справедливо с правой частью, равной $cx/\sqrt{\ln \ln x}$. Здесь мы докажем следующий результат, из которого вытекает, в частности, и эта гипотеза.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $g(n)$ равняется $\Omega(n)$ или $\omega(n)$, $a \neq 0$ – целое число и

$$N(x, b) := |\{n : n \leq x, g(n+a) - g(n) = b \text{ или } b+1\}|.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00070.

Тогда при целом b , $|b| \leq \mu \sqrt{\ln_2 x}$, $x \geq x_0$, выполнено

$$N(x, b) \geq \Theta(a) \sigma^2 \mu e^{-\mu^2} \frac{x}{4\sqrt{\ln_2 x}},$$

где μ – любая положительная постоянная, $0 < \sigma \leq 2^{-10} \cdot 0.01$,

$$\Theta(a) = 0.024 \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{\substack{p|a \\ p \neq 2}} \frac{p-1}{p-2} \prod_{p|30a} e^{-8/p} \prod_{p \nmid 30a} \left(1 + \frac{4}{p}\right)^2 e^{-8/p}.$$

Существует постоянная $c(a)$, с которой

$$\sup_b N(x, b) \leq c(a) \frac{x}{\sqrt{\ln_2 10x}}.$$

Здесь и далее $\ln_n x = \ln(\ln_{n-1} x)$, $n = 2, 3, \dots$.

Из теоремы 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Пусть ξ – первообразный корень l -й степени из единицы. Тогда при $l \geq 3$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{x} \left| \sum_{n \leq x} \xi^{\Omega(n) - \Omega(n+a)} \right| < 1. \quad (1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $l \geq 5$, то (1) следует из теоремы 1 из [4].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ. Предположим, что по некоторой последовательности

$$\frac{1}{x} \left| \sum_{n \leq x} \xi^{\Omega(n) - \Omega(n+a)} \right| \rightarrow 1 \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Пусть ω_x равняется аргументу суммы, стоящей под знаком модуля. Можно считать, что на этой последовательности $\omega_x \rightarrow \omega$ при $x \rightarrow \infty$, и мы получаем

$$\sum_{j=0}^{l-1} a_x(j) \xi^j e^{-i\omega} \rightarrow 1 \quad \text{при } x \rightarrow \infty,$$

где

$$a_x(j) = \frac{1}{[x]} |\{n : n \leq x, \Omega(n) - \Omega(n+a) \equiv j \pmod{l}\}|.$$

Следовательно, имеем

$$\sum_{j=0}^{l-1} a_x(j) (1 - \operatorname{Re} \xi^j e^{-i\omega}) \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Поэтому найдется j , $0 \leq j \leq l-1$, такое, что $\xi^j e^{-i\omega} = 1$, $a_x(j) \rightarrow 1$, $a_x(k) \rightarrow 0$ при $k \neq j$, $0 \leq k \leq l-1$, если $x \rightarrow \infty$ по некоторой последовательности. Но из теоремы 1 вытекает, что при $j+2 \leq l-1$

$$\begin{aligned} & a_x(j+1) + a_x(j+2) \\ & \geq \sum_{0 \leq s \leq \mu \sqrt{\ln \ln x}} \frac{1}{x} |\{n : n \leq x, \Omega(n) - \Omega(n+a) = ls + (j+1) \text{ или } ls + (j+2)\}| \geq c_1, \end{aligned}$$

где $c_1 > 0$. Если $j+1 = l-1$, то аналогичная оценка справедлива для $a_x(l-1) + a_x(0)$. Из полученного противоречия вытекает утверждение следствия.

Основную роль при доказательстве первой части теоремы 1 играет теорема 2.

ТЕОРЕМА 2. Пусть

$$S(k, l, x) := |\{n : n \leq x, g(n) = k, g(n+a) = l+1 \text{ или } l+2\}|,$$

$a \neq 0, k \geq 1, l$ — целые числа, $l \geq 0$, если a четно, и $l \geq 1$, если a нечетно. Тогда при $k, l \leq 3 \ln_2 x, x \geq x_0$, справедливо неравенство

$$S(k, l, x) \geq \Theta(a) \frac{s^{k-1}}{(k-1)!} \frac{s^{l(a)}}{l(a)!} \frac{x}{\ln^2 x}, \quad (2)$$

где

$$l(a) = l - 1 + \frac{1 + (-1)^a}{2}, \quad s = \sum_{p \leq x^\sigma} \frac{1}{p} = \ln_2 x + \ln \sigma + \lambda + O(\ln^{-1} x),$$

$0 < \sigma \leq 2^{-10} \cdot 0.01$, постоянная $\Theta(a)$ та же, что и в теореме 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если k, l фиксированы или даже $k, l \leq (1 - \varepsilon) \ln_2 x$, a четно, то, используя решето, можно показать, что

$$S(k, l, x) \ll \frac{x}{\ln^2 x} \frac{s^{k-1}}{(k-1)!} \frac{s^{l+1}}{(l+1)!},$$

т.е. оценки сверху и снизу отличаются на множитель равный $\ln_2 x / l$.

Основным фактом в доказательстве теоремы 2 является следующее утверждение, при доказательстве которого используется метод Чена (см. [5, гл. 11]) и вычисления, сделанные в [5].

ЛЕММА 1. Пусть q — простые числа, $0 < \beta \leq 1/400$,

$$S_1(n, m, x) := \left| \left\{ q : x^\beta < q \leq \frac{x}{n}, nq + a = mP_2 \right\} \right|,$$

где P_2 — числа, имеющие не более двух простых делителей, каждый из которых больше x^β . Тогда

$$S_1(n, m, x) \geq 0.24C \Delta(a) G(nm) \frac{x}{\varphi(nm) \ln^2 x} - r(n, m),$$

где

$$\begin{aligned} C &= \prod_{p > 2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right), \quad \Delta(a) = \prod_{\substack{p|a \\ p \neq 2}} \frac{p-1}{p-2}, \\ G(n) &= \prod_{p|n} G(p), \quad G(p) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right)^{-1}, & \text{если } p \neq 2, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } p = 2, \end{cases} \\ \sum'_{n, m} |r(n, m)| &\ll \frac{x}{\ln^4 x} \end{aligned} \quad (3)$$

с любой положительной постоянной A , $\sum'_{n, m}$ означает, что суммирование распространено по $n \leq x^\beta, m \leq x^\beta, (n, 2a) = 1, (m, pa) = 1; m$ четно, если a нечетно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $P(y) = \prod_{p \leq y} p$ и

$$\begin{aligned} L_1(n, m) &:= \left| \left\{ q : q \leq \frac{x}{n}, nq + a \equiv 0 \pmod{m}, \left(\frac{nq + a}{m}, P\left(\sqrt[10]{\frac{x+a}{m}} \right) \right) = 1 \right\} \right|, \\ L_2(p, n, m) &:= \left| \left\{ q : q \leq \frac{x}{m}, nq + a \equiv 0 \pmod{pm}, \left(\frac{nq + a}{mp}, P\left(\sqrt[10]{\frac{x+a}{m}} \right) \right) = 1 \right\} \right|, \\ L_3(n, m) &:= \left| \left\{ p_1 p_2 p_3 : p_1 p_2 p_3 \leq \frac{x+a}{m}, \sqrt[10]{\frac{x+a}{m}} \leq p_1 \leq \sqrt[3]{\frac{x+a}{m}}, \right. \right. \\ &\quad \left. \sqrt[3]{\frac{x+a}{m}} < p_2 \leq \sqrt{\frac{x+a}{mp_1}}, mp_1 p_2 p_3 \equiv a \pmod{n}, \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{mp_1 p_2 p_3 - a}{n}, P\left(\sqrt{\frac{x}{n}} \right) \right) = 1 \right\} \right|. \end{aligned}$$

Точно так же, как и при доказательстве теоремы Чена (см. [5, гл. 11]), проверяется неравенство

$$\begin{aligned} S_1(n, m, x) &\geq L_1(n, m) - \frac{1}{2} \sum_{\sqrt[10]{(x+a)/m} \leq p \leq \sqrt[3]{(x+a)/m}} L_2(p, n, m) \\ &\quad - \frac{1}{2} L_3(n, m) + O\left(\frac{x^{1-\beta}}{nm}\right). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь и далее числа n, m удовлетворяют условиям леммы 1. Для оценки $L_1(n, m)$ снизу, $L_2(p, n, m)$ и $L_3(n, m)$ сверху применим линейное решето (см. [5, теорема 8.3]). Для $L_1(n, m)$ и $L_2(p, n, m)$ получим

$$L_1(n, m) \geq \frac{1}{\varphi(m)} \pi\left(\frac{x}{n}\right) \prod_{\substack{p \leq \sqrt[10]{(x+a)/m} \\ (p, an)=1}} \left(1 - \frac{\varphi(m)}{\varphi(mp)}\right) \left(f\left(\frac{\ln \xi^2}{\ln z}\right) + O(\ln^{-\delta} x)\right) - 2r_1(n, m),$$

где

$$\begin{aligned} \xi^2 &= \sqrt{\frac{x}{n}} \frac{1}{m \ln^B x}, \quad z = \sqrt[10]{\frac{x+a}{m}}, \quad \delta > 0, \\ r_1(n, m) &= \sum_{\substack{d \leq \xi^2 \\ (d, an)=1}} 3^{\omega(d)} \left| \sum_{\substack{q \leq x/n \\ nq+a \equiv 0 \pmod{md}}} 1 - \frac{1}{\varphi(md)} \pi\left(\frac{x}{n}\right) \right|, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} L_2(p, n, m) &\leq \frac{1}{\varphi(mp)} \pi\left(\frac{x}{n}\right) \prod_{\substack{q \leq \sqrt[10]{(x+a)/m} \\ (q, an)=1}} \left(1 - \frac{\varphi(mp)}{\varphi(mqp)}\right) \left(F\left(\frac{\ln \xi^2(p)}{\ln z}\right) + O(\ln^{-\delta} x)\right) \\ &\quad + r_2(p, n, m), \end{aligned}$$

где

$$\xi^2(p) = \sqrt{\frac{x}{n}} \frac{1}{mp \ln^B x},$$

$$r_2(p, n, m) = \sum_{\substack{d \leq \xi^2(p) \\ (d, an)=1}} 3^{\omega(d)} \left| \sum_{\substack{q \leq x/n \\ nq+a \equiv 0 \pmod{mpd}}} 1 - \frac{1}{\varphi(mpd)} \pi\left(\frac{x}{n}\right) \right|.$$

Используя теорему Виноградова–Бомбьери (см., например, [6, с. 115]), получим, что при $B = B(A)$

$$\sum'_{n,m} r_1(n, m) + \sum'_{n,m} \sum_{p \leq \sqrt[3]{x}} r_2(p, n, m) \ll \frac{x}{\ln^A x}.$$

Обозначим

$$X = \left| \left\{ p_1 p_2 p_3 \leq \frac{x+a}{m}, \sqrt[10]{\frac{x+a}{m}} \leq p_1 < \sqrt[3]{\frac{x+a}{m}} < p_2 \leq \sqrt{\frac{x}{mp_1}} \right\} \right|.$$

Тогда для $L_3(n, m)$ имеем (см. [5, теорема 8.3])

$$L_3(n, m) \leq \prod_{\substack{p \leq \sqrt[4]{x/n} \\ (p, 2am)=1}} \left(1 - \frac{\varphi(n)}{\varphi(np)} \right) \frac{1}{\varphi(n)} X \left(F \left(\frac{\ln \xi_1^2}{\ln z_1} \right) + O(\ln^{-\delta} x) \right) \\ + \sum_{\substack{d \leq \xi_1^2 \\ (d, 2am)=1}} 3^{\omega(d)} \left| \sum''_{\substack{p_1 p_2 p_3 \leq (x+a)/m \\ mp_1 p_2 p_3 \equiv a \pmod{dn}}} 1 - \frac{1}{\varphi(dn)} X \right|,$$

где $\delta > 0$ и $\sum''$ означает, что

$$\sqrt[10]{\frac{x+1}{m}} \leq p_1 \leq \sqrt[3]{\frac{x+a}{m}} < p_2 \leq \sqrt{\frac{x+a}{mp_1}}, \quad \xi_1^2 = \sqrt{\frac{x}{m}} \frac{1}{n \ln^B x}, \quad z_1 = \sqrt[4]{\frac{x}{n}}.$$

Для оценки вклада, который вносит в (3) вторая сумма, используем следующий результат (см., например, [6, леммы 2, 3]).

ЛЕММА 2. Пусть a_n, b_p – последовательности комплексных чисел; $a_n = 0$, если $n \leq \ln^{2B} x$ или если n делится хотя бы на одно простое число $\leq \ln^B x$; $b_p = 0$, если $p \leq e^{\ln^\alpha x}$, $0 < \alpha < 1$; $a_n = O(\ln n)$, $b_p = O(\log p)$,

$$\sum_{p \leq y} b_p \chi_d^*(p) \ll y \ln^{-A} x \quad (5)$$

при $d \leq \log^B x$; $e^{\log^\alpha x} \leq y \leq x$; χ_d^* – примитивный характер Дирихле модуля d ; A и B – любые положительные постоянные. Тогда при $Q \leq \sqrt{x} \ln^{-2B} x$

$$\sum_{d \leq Q} \max_{y \leq x} \max_{(a, d)=1} \left| \sum_{\substack{pn \leq y \\ pn \equiv a \pmod{d}}} b_p a_n - \frac{1}{\varphi(d)} \sum_{pn \leq y} b_p a_n \right| \leq x \ln^{50-B/2} x.$$

В нашем случае $a_n = \sum''_{p_1 p_2 = n} 1, p = p_3$. Отметим, что

$$\sqrt[5]{\frac{x+a}{m}} \leq p_1 p_2 = n \leq \left(\frac{x+a}{m}\right)^{5/6},$$

и можем считать, что $p_3 > (x/m)^{1/7}$. Выполнение условия (5) вытекает из теоремы Зигеля–Вольфима. Применяя лемму 2, получим, что оцениваемый вклад равен $O(x \ln^{-4} x)$.

Подставим первые слагаемые оценок для L_1, L_2, L_3 в (4). Напомним, что

$$C = \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right), \quad \Delta(a) = \prod_{\substack{p|a \\ p \neq 2}} \frac{p-1}{p-2}, \quad G(n) = \prod_{p|n} G(p),$$

где

$$G(p) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)^{-1}, & \text{если } p \neq 2, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } p = 2. \end{cases}$$

Тогда, используя формулу Мертенса и учитывая, что $(n, m) = 1, (nm, a) = 1, p_1 \geq \sqrt[10]{(x+a)/m}$, получим

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{p \leq \sqrt[10]{(x+1)/m} \\ (p, an)=1}} \left(1 - \frac{\varphi(m)}{\varphi(mp)}\right) &= 2C \Delta(a) G(nm) \frac{n}{\varphi(n)} \left(\frac{10e^{-\gamma}}{\ln(x/m)} + O(\ln^{-2} x)\right), \\ \prod_{\substack{p \leq \sqrt[10]{(x+a)/m} \\ (p, an)=1}} \left(1 - \frac{\varphi(mp_1)}{\varphi(mp_1 p)}\right) &= 2C \Delta(a) G(nm) \frac{n}{\varphi(n)} \left(\frac{10e^{-\gamma}}{\ln(x/m)} + O(\ln^{-2} x)\right), \\ \prod_{\substack{p \leq \sqrt[4]{x/n} \\ (p, 2am)=1}} \left(1 - \frac{\varphi(n)}{\varphi(np)}\right) &= 2C \Delta(a) G(nm) \frac{m}{\varphi(m)} \left(\frac{4e^{-\gamma}}{\ln(x/n)} + O(\ln^{-2} x)\right), \end{aligned}$$

где γ – постоянная Эйлера.

Функции $F(u), f(u)$ обладают следующими свойствами (см. [5, с. 226, 227]): $F(u)$ убывая стремится к 1, $f(u)$ возрастая стремится к 1 при $u \rightarrow \infty$; $(uF(u))' = f(u-1)$, $(uf(u))' = F(u-1)$ при $u > 2$; $F(u) = 2e^\gamma/u$, если $0 < u \leq 3$. Применяя формулу Лагранжа при $m \leq x^\beta, n \leq x^\beta, \beta \leq 1/400$, получим

$$\begin{aligned} f\left(5 - \left(\ln\left(\sqrt{nm} \ln^A \frac{x}{n}\right) \left(\ln \sqrt[10]{\frac{x}{m}}\right)^{-1}\right)\right) &\geq f(5) - 3e^\gamma \beta, \\ F\left(\frac{\ln(1/p_1 \cdot \sqrt{x/m})}{\ln \sqrt[10]{x/m}} - \frac{\ln(\sqrt{nm} \ln^A(x/m))}{\ln \sqrt[10]{x/m}}\right) &< F\left(\frac{\ln(\sqrt{x/m} \cdot 1/p_1)}{\ln \sqrt[10]{x/m}}\right) + 3e^\gamma \beta, \\ F\left(2 - \frac{\ln(n \ln^A x)}{\ln \sqrt[4]{x/m}}\right) &< F(2) + F(1)4\beta \leq e^\gamma + 8e^\gamma \beta. \end{aligned}$$

Учитывая полученные неравенства, имеем, что первые слагаемые оценок для L_1, L_2, L_3 дают вклад в правую часть (4)

$$\begin{aligned} &\geq 2C\Delta(a)G(nm)\frac{x}{\varphi(nm) \cdot \ln(x/m) \cdot \ln(x/n)} \left(10e^{-\gamma}f(5) - 30\beta \right. \\ &\quad - \frac{10}{2}e^{-\gamma} \sum_{10\sqrt[10]{(x+a)/m} \leq p_1 \leq \sqrt[3]{(x+a)/m}} \left(F\left(\frac{\ln(1/p_1 \cdot \sqrt{x/m})}{\ln \sqrt[10]{x/n}}\right) + 3e^{\gamma}\beta \right) \frac{1}{p_1} \\ &\quad - \frac{4}{2}(e^{\gamma} + 8e^{\gamma}\beta)e^{-\gamma} \ln \frac{x}{m} \\ &\quad \times \sum_{10\sqrt[10]{(x+a)/m} \leq p_1 \leq \sqrt[3]{(x+a)/m}} \sum_{\sqrt[3]{(x+a)/m} \leq p_2 \leq \sqrt{(x+a)/(mp_1)}} \frac{1}{p_1 p_2 \ln(x/(p_1 p_2))} \Big). \end{aligned}$$

В силу леммы 11.1 из [5] третья сумма $\leq 0.493(\ln(x/m))^{-1}$, и в [5, с. 323] показано, что

$$20e^{-\gamma} \left(f(5) - \frac{1}{2} \int_3^{10} F\left(5 - \frac{10}{t}\right) \frac{dt}{t} \right) > 2.64056.$$

Отсюда, учитывая, что $\beta \leq 1/400$, получаем утверждение леммы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Используя лемму 1, имеем

$$S(k, l, x) \geq \sum'_{n, m} S_1(n, m, x) \geq 0.24C\Delta(a) \frac{x}{\ln^2 x} \sum'_{n, m} \frac{G(nm)}{\varphi(nm)} + O\left(\frac{x}{\ln^A x}\right), \quad (6)$$

где $\sum'_{n, m}$ означает, что n, m удовлетворяют условиям леммы 1: $n \leq x^\beta$, $m \leq x^\beta$, $(n, 2a) = 1$, $(m, na) = 1$; m четно, если a нечетно; кроме того, $g(n) = k - 1$, а $g(m) = l$.

Обозначим $A(k, t) = \{n : (n, 30a) = 1, g(n) = k, n \mid P(t)\}$. Учитывая, что $n/\varphi(n) \cdot G(n) \geq 1$, получим, что сумма, стоящая в правой части неравенства (6),

$$\geq \sum_{m \in A(k-1, t)} \sum_{\substack{m \in A(l_1, t) \\ (n, m)=1}} \frac{1}{nm} - \sum_{n \in A(k-1, t)} \frac{1}{n} \sum_{\substack{m \in A(l_1, t) \\ nm > x^{\beta/2}}} \frac{1}{m}, \quad (7)$$

где $l_1 = l - 1 + (1 + (-1)^a)/2$. Положим

$$\Gamma(k, t) := \sum_{n \in A(k, t)} \frac{1}{n}.$$

Тогда в (7) первая сумма

$$\geq \Gamma(k-1, t)\Gamma(l_1, t) - \sum_{p \geq 7} \frac{1}{p^2} \Gamma(k-2, t)\Gamma(l_1-1, t),$$

вторая сумма

$$\leq \frac{\sqrt{2}}{\ln x^\beta} \left(\Gamma(k-1, t) \sum_{n \in A(l_1, t)} \frac{\ln n}{n} + \Gamma(l_1, t) \sum_{n \in A(k-1, t)} \frac{\ln n}{n} \right).$$

Заменим $\ln n$ на $\sum_{p|n} \ln p$ и поменяем порядок суммирования. Учитывая, что при $t \geq t_0$

$$\sum_{p \leq t} \frac{\ln p}{p} \leq \sqrt{2} \ln t,$$

получим, что оцениваемая сумма

$$\leq 2 \frac{\ln t}{\beta \ln x} (\Gamma(l_1, t) \Gamma(k-1, t) + \Gamma(l_1, t) \Gamma(k-2, t)).$$

Выберем $t = x^\sigma$, $4\sigma < \beta/36$. Заметим, что

$$\sum_{p \geq 7} \frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{49} + \sum_{n \geq 11} \frac{1}{n(n-1)} \leq \frac{1}{36}.$$

Возвращаясь к неравенству (7), находим, что сумма в правой части (6)

$$\geq \Gamma(l_1, t) \Gamma(k-1, t) - \frac{1}{18} \max_{\substack{i=0,1 \\ j=1,2}} \Gamma(l_1 - i, t) \Gamma(k - j, t). \quad (8)$$

Имеем

$$\Gamma(k, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \sum_{\substack{n|P(t) \\ (n, 30a)=1}} \frac{z^{g(n)}}{n} \frac{dz}{z^{k+1}}.$$

Подынтегральная функция равна

$$\prod_{p \leq t} \left(1 + \frac{z}{p}\right) \prod_{p|30a} \left(1 + \frac{z}{p}\right)^{-1} = \exp\left(z \sum_{p \leq t} \frac{1}{p}\right) \Phi(z) \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right),$$

где

$$\Phi(z) = \prod_{p|30a} e^{-z/p} \cdot \prod_{p \nmid 30a} \left(1 + \frac{z}{p}\right) e^{-z/p}.$$

Обозначим

$$s = s(t) = \sum_{p \leq t} \frac{1}{p}.$$

Положим $r = k/s$. Разложим $\Phi(z)$ в ряд Тейлора:

$$\Phi(z) = \Phi(r) + \Phi'(r)(z-r) + O\left(\max_{|z| \leq r} |\Phi''(z)| \cdot |z-r|^2\right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Gamma(k, t) &= \frac{1}{2\pi i} \left(\Phi(r) \frac{s^k}{k!} + \Phi'(r) \left(\frac{s^{k-1}}{(k-1)!} - r \frac{s^k}{k!} \right) \right) \\ &\quad + O\left(\max_{|z| \leq r} |\Phi''(z)| \int_0^{2\pi} \exp(rs \cos \varphi) (1 - \cos \varphi) \frac{d\varphi}{r^{k-2}}\right). \end{aligned}$$

При $r = k/s$ имеем

$$\frac{s^{k-1}}{(k-1)!} - r \frac{s^k}{k!} = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \exp(rs \cos \varphi)(1 - \cos \varphi) d\varphi = e^k \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-k(1 - \cos \varphi))(1 - \cos \varphi) d\varphi.$$

Учитывая, что при $-\pi \leq \varphi \leq \pi$

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{\varphi^2}{2} \leq 1 - \cos \varphi = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \leq \frac{\varphi^2}{2},$$

находим

$$\Gamma(k, t) = \Phi(r) \frac{s^k}{k!} + O\left(\max_{|z| \leq r} |\Phi''(z)| \frac{e^k s^{k-2}}{k^{k-2}} \frac{1}{k^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-4y^2/\pi^2} dy\right).$$

Так как $k \leq 3 \ln_2 x$, $t = x^\sigma$, $s = s(t) = \ln_2 x + \ln \sigma + \lambda + O(1/\ln x)$, то r ограничено.

Следовательно, используя формулу Стирлинга, получим

$$\frac{e^k s^{k-2}}{k^{k-2}} \frac{1}{k^{3/2}} \ll \frac{s^k}{k!} \frac{k}{s^2} \ll \frac{s^k}{k!} \frac{1}{\ln_2 x},$$

поэтому при $k \leq 3 \ln_2 x$

$$\Gamma(k, t) = \Phi\left(\frac{k}{s}\right) \frac{s^k}{k!} \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln_2 x}\right)\right).$$

Отсюда, в частности, при $k \leq 3 \ln_2 x$ получаем

$$\Gamma(k-1, t) = \Phi\left(\frac{k}{s} + O\left(\frac{1}{\ln_2 x}\right)\right) \frac{s^k}{k!} \frac{k}{s} \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln_2 x}\right)\right) \leq 4\Gamma(k, t)$$

при $x \geq x_0$. Следовательно, учитывая (8) и возвращаясь к соотношению (6), имеем

$$S(k, l, x) \geq \frac{0.24}{9} C \Delta(a) \frac{x}{\ln^2 x} \Phi\left(\frac{k-1}{s}\right) \Phi\left(\frac{l_1}{s}\right) \frac{s^{k-1}}{(k-1)!} \frac{s^{l_1}}{l_1!},$$

где

$$s = \sum_{p \leq x^\sigma} \frac{1}{p}, \quad \sigma \leq \frac{1}{1600 \cdot 36}.$$

Заметим, что $((1+x)e^{-x})' < 0$ при $x > 0$, т.е.

$$\Phi\left(\frac{k-1}{s}\right) \Phi\left(\frac{l_1}{s}\right) \geq \Phi^2(4),$$

поэтому при $k, l \leq 3 \ln_2 x$ имеем

$$S(k, l, x) \geq \Theta(a) \frac{s^{k-1}}{(k-1)!} \frac{s^{l_1}}{l_1!} \frac{x}{\ln^2 x},$$

где

$$\Theta(a) = 0.024 \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{\substack{p|a \\ p \neq 2}} \frac{p-1}{p-2} \prod_{p|30a} e^{-8/p} \prod_{p \nmid 30a} \left(1 + \frac{4}{p}\right)^2 e^{-8/p},$$

$$s = \sum_{p \leq x^\sigma} \frac{1}{p}, \quad \sigma \leq \frac{1}{1600 \cdot 36}.$$

Теорема 2 доказана.

При доказательстве теоремы 1 нам потребуются следующие вспомогательные результаты.

ЛЕММА 3. Существует положительная постоянная $C_0 < 1$ такая, что при $x \geq z \geq y \geq 2$

$$\left| \left\{ n : n \leq x, \prod_{\substack{p^\alpha \parallel n \\ p < y}} p^\alpha > z \right\} \right| \ll x \exp\left(-C_0 \frac{\ln z}{\ln y}\right).$$

Доказательство можно найти, например, в [7].

ЛЕММА 4. Пусть $g(n)$ равняется $\Omega(n)$ или $\omega(n)$. Тогда

$$\sum_{n \leq x} (g(n) - \ln \ln 10x)^2 \leq cx \ln \ln 10x.$$

Это частный случай неравенства Турана–Кубилюса, доказанный Харди и Рамануджаном (см., например, [8]).

ЛЕММА 5. Пусть

$$\sigma(k, d, x) = \max_{y \leq x} \max_{(a, d)=1} |\{n : n \leq y, g(n) = k, (n, P(t)) = 1, n \equiv a \pmod{d}\}|$$

$$- \frac{1}{\varphi(d)} |\{n : n \leq y, g(n) = k, (n, P(t)) = 1\}|.$$

Тогда при $e^{(\ln_2 x)^2} \leq t \leq \sqrt{x}$, $k \leq (\ln_2 x)^2$ для любой положительной постоянной A найдется постоянная $B = B(A)$, с которой при $Q = \sqrt{x} \ln^{-B} x$

$$\sum_{d \leq Q} 9^{\omega(d)} \tau(d) \sigma(k, d, x) \ll x \ln^{-A} x.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя неравенство Коши, мы получим, что оцениваемая сумма

$$\ll \left(x \sum_{d \leq Q} \frac{81^{\omega(d)}}{d} \tau^2(d) \right)^{1/2} \left(\sum_{d \leq x} \sigma(k, d, x) \right)^{1/2};$$

т.е. мы видим, что достаточно оценить сумму без множителя $\tau(d)9^{\omega(d)}$. Это сделано в работе [9, теорема 2], но в случае $g(n) = \Omega(n)$ и в вычитаемом есть дополнительное

условие $(n, d) = 1$. Так как $(n, P(t)) = 1$, то $\omega(n) \neq \Omega(n)$, когда найдется $p^2 \mid n$, $p \geq t$. Таким образом, эта часть суммы

$$\ll \sum_{t < p \leq \sqrt{x}} \sum_{d \leq Q} \left(\frac{x}{p^2 \varphi(d)} + 1 \right) \ll \frac{x \ln x}{t} + Q \sqrt{x} \ll x \ln^{-A} x.$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{d \leq Q} \max_{y \leq x} \frac{1}{\varphi(d)} |\{n : n \leq y, (n, d) = 1, (n, P(t)) = 1, g(n) = k\}| \\ & - |\{n : n \leq y, (n, P(t)) = 1, g(n) = k\}| \ll \sum_{\substack{dp \leq Q \\ p > t}} \frac{x}{p \varphi(dp)} \ll \frac{x \ln x}{t}, \end{aligned}$$

т.е. из [9, теорема 2] следует утверждение леммы 5.

ЛЕММА 6. Пусть $g(n)$ равняется $\omega(n)$ или $\Omega(n)$. Тогда существует постоянная $C(\varepsilon)$, с которой при $k \leq (2 - \varepsilon) \ln_2 x$

$$|\{n : n \leq x, g(n) = k\}| \leq C(\varepsilon) \frac{x}{\ln x} \frac{(\ln_2 x)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Это утверждение вытекает из соответствующих асимптотических формул (см., например, [10]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Учитывая, что

$$N(x, b) = |\{n : n \leq x, g(n) - g(n+a) = -b \text{ или } -b-1\}| = N(x, -b-1) + O(1)$$

и $\Theta(a) = \Theta(-a)$, теорему 1 достаточно доказать для положительных b . Пусть

$$0 \leq b \leq \mu \sqrt{\ln_2 x}, \quad s = \sum_{p \leq x^\sigma} \frac{1}{p}, \quad \sigma \leq \frac{1}{1600 \cdot 36}.$$

Обозначим $\Lambda(\mu, s) = [s - 2\mu\sqrt{\ln_2 x}, s - \mu\sqrt{\ln_2 x}]$.

Используя теорему 2, получим

$$N(x, b) \geq \sum_{k \in \Lambda(\mu, s-1)} S(k, k+b-1, x) \geq \Theta(a) \frac{x}{\ln^2 x} \sum_{k \in \Lambda(\mu, s)} \frac{s^{2k+b}}{k!(k+b)!}. \quad (9)$$

При $k \in \Lambda(\mu, s)$ имеем $s \geq k+b$, поэтому

$$\frac{s^{2k+b}}{k!(k+b)!} \geq \frac{s^{2k}}{(k!)^2} \left(\frac{s}{k+b} \right)^b \geq \frac{s^{2k}}{(k!)^2}.$$

Учитывая, что при $x \geq x_0$ выполнено $s \geq \ln_2 x + 2 \ln \sigma$, и используя формулу Стирлинга, получим

$$\begin{aligned} \frac{s^{2k+b}}{k!(k+b)!} &\geq \left(\frac{\ln_2 x + 2 \ln \sigma}{k} \right)^{2k} e^{2k} \frac{1}{2\pi k} \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln_2 x} \right) \right) \\ &= \frac{\ln^2 x}{3\pi \ln_2 x} \exp \left(2k \ln \left(1 + \frac{2 \ln \sigma}{\ln_2 x} \right) - 2k \ln \left(1 + \frac{k - \ln_2 x}{\ln_2 x} \right) + 2(k - \ln_2 x) \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что $|k - \ln_2 x| \ll \sqrt{\ln_2 x}$ при $x \geq x_0$, имеем

$$\frac{s^{2k+b}}{k!(k+b)!} \geq \frac{\ln^2 x}{4\pi \ln_2 x} \sigma^2 e^{-8\mu^2}.$$

Подставляя эту оценку в (9), получим нижнюю оценку для $N(x, b)$.

Перейдем к доказательству оценки сверху. Представим $n, n+a$ в виде $n = m_1 m_2$, $n+a = m'_1 m'_2$, где у m_1, m'_1 все простые делители $\leq t_1$, а у m_2, m'_2 они $> t_1$. Возьмем

$$\ln t_1 = C \frac{\ln x}{\ln_3 x}, \quad C = \frac{2C_0}{10},$$

C_0 – постоянная из леммы 2. Обозначим $I = (\ln_2 x - (\ln_2 x)^{3/4}, \ln_2 x + (\ln_2 x)^{3/4})$. Тогда

$$\begin{aligned} N(x, b) &\leq |\{n : n \leq x, m_1 \geq \sqrt[10]{x} \text{ или } m'_1 \geq \sqrt[10]{x}\}| + |\{n : n \leq x, g(n) \notin I\}| \\ &\quad + |\{n : \exists p > t_1, p^2 \mid n(n+a)\}| \\ &\quad + |\{n : n = m_1 m_2 \leq x, m_1 \leq \sqrt[10]{x}, m'_1 \leq \sqrt[10]{x}, \\ &\quad g(m_1 m_2 + a) - g(m_1 m_2) = b \text{ или } b+1, g(m_1 m_2) \in I, \mu^2(m_2) = \mu^2(m'_2) = 1\}|. \end{aligned} \quad (10)$$

В силу леммы 3 первое слагаемое в правой части (10)

$$\ll x \exp \left(-C_0 \frac{\ln x^{1/10}}{\ln t_1} \right) \ll \frac{x}{\sqrt{\ln_2 x}};$$

из леммы 4 следует, что второе слагаемое

$$\ll \frac{1}{(\ln_2 x)^{3/2}} \sum_{n \leq x} (g(n) - \ln_2 x)^2 \ll \frac{x}{\sqrt{\ln_2 x}};$$

а третье слагаемое равно $O(x/t_1)$.

Перейдем к оценке четвертого слагаемого в правой части неравенства (10). Пусть $\delta = (m_1, m'_1)$. Тогда оно

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{\delta \mid a} \left| \left\{ n : n = \delta m_1 m_2 \leq x, m_1 m_2 + \frac{a}{\delta} = m'_1 m'_2, (m_1 m'_1) = 1, \mu^2(m_2) = 1, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. |g(m'_1 m'_2) - g(m_1 m_2) - b| \leq \omega(\delta) + 1, m_1 \leq \sqrt[10]{x}, m'_1 \leq \sqrt[10]{x}, g(\delta m_1 m_2) \in I \right\} \right|. \end{aligned}$$

Значит, достаточно оценить при любом фиксированном a

$$\begin{aligned} \Sigma(a) &= |\{n : n = m_1 m_2 \leq x, m_1 m_2 + a = m'_1 m'_2, (m'_1, m_1) = 1, \mu^2(m_2) = 1, \\ &\quad g(m'_1 m'_2) = g(m_1 m_2) + b, m_1 \leq \sqrt[10]{x}, m'_1 \leq \sqrt[10]{x}, g(m_1 m_2) \in I\}|. \end{aligned}$$

Докажем следующий вспомогательный результат.

ЛЕММА 7. Пусть $\sum'$ означает, что t пробегает некоторое множество натуральных чисел. Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{m \leq \sqrt[5]{x}}' q^{\omega(m)} \rho_m \sum_{\substack{m'_1 \leq \sqrt[10]{x} \\ (m'_1, m) = 1}} \left| \left\{ m'_2 : m'_2 \leq \frac{x}{m'_1}, m'_1 m'_2 \equiv a \pmod{m}, \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left(\frac{m'_1 m'_2 - a}{m}, P(t) \right) = 1, g(m'_2) = k - g(m'_1) \right\} \right| \\ & \ll \frac{1}{\ln t} \sum_{m \leq \sqrt[5]{x}}' \frac{q^{\omega(m)} \rho_m}{\varphi(m)} |\{n : n \leq x, g(n) = k\}| + O(x \ln^{-A} x), \end{aligned}$$

где A — любая положительная постоянная. Здесь $1 < q < 2$, $0 \leq \rho_m \leq \ln^4 2m$, $k \leq 2 \ln_2 x$, все простые делители m'_1 не превосходят $t_1 = x^{C/\ln_3 x}$, а у m'_2 они больше t_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим решето Сельберга (см. [5, теорема 6.2]), полагая

$$\begin{aligned} \rho(d) &= \begin{cases} \frac{\varphi(m)}{\varphi(dm)}, & \text{если } (d, am'_1) = 1, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\ X &= \frac{1}{\varphi(m)} \left| \left\{ m'_2 : m'_2 \leq \frac{x}{m'_1}, g(m'_2) = k - g(m'_1) \right\} \right|, \quad \xi^2 = x^{1/3}. \end{aligned}$$

В результате получим, что оцениваемая сумма

$$\begin{aligned} & \ll \frac{1}{\ln t} \sum_{m \leq \sqrt[5]{x}}' \frac{q^{\omega(m)} \rho_m}{\varphi(m)} |\{n : n \leq x, g(n) = k\}| \\ & \quad + \ln^4 2x \sum_{m'_1 \leq \sqrt[10]{x}} \sum_{m \leq \sqrt[5]{x}} \sum_{\substack{d \leq \sqrt[3]{x} \\ (md, m'_1 a) = 1}} 3^{\omega(dm)} \left| \left\{ m'_2 : m'_2 \leq \frac{x}{m'_1}, \right. \right. \\ & \quad \left. \left. g(m'_2) = k - g(m'_1), m'_1 m'_2 \equiv a \pmod{dm} \right\} \right| \\ & \quad - \frac{1}{\varphi(dm)} \left| \left\{ m'_2 : m'_2 \leq \frac{x}{m'_1}, g(m'_2) = k - g(m'_1) \right\} \right|. \end{aligned}$$

Применяя лемму 5, отсюда получим утверждение леммы 7.

Вернемся к доказательству теоремы 1. Введем следующие обозначения: $l_1 = \ln_3 x$, $l_2 = \ln l_1, \dots, t_1 = x^{C/l_1}, t_2 = x^{C/l_2}, \dots, t_s = x^{C/l_s}$, где s — наибольшее число, удовлетворяющее условию $1/l_s \leq 10^{-8}$, $C = 2C_0/10$. Представим n в виде $n = m_1 m_2 \cdots \times m_s m_{s+1}$, где у m_1 все простые делители $\leq t_1$, у m_i при $i = 2, \dots, s$ все простые делители больше t_{i-1} и $\leq t_i$, а у m_{s+1} они больше t_s . Числа $m_2, \dots, m_{s+1}$ бесквадратные, $m_1 \leq \sqrt[10]{x}$. В этих обозначениях

$$\begin{aligned} \Sigma(a) &= |\{n : n = m_1 m_2 \cdots m_s m_{s+1} \leq x, n + a = m'_1 m'_2, (m_1, m'_1) = 1, \\ & \quad g(m'_1 m'_2) = g(n) + b, m'_1 \leq \sqrt[10]{x}, m_1 \leq \sqrt[10]{x}, g(n) \in I\}|. \end{aligned}$$

Оценим часть $\Sigma(a)$, в которой $g(m_2) \in [C_1 l_2, C_1 l_1)$, где $C_1 \geq 1/C = 10/(2C_0)$. Представим m_2 с $g(m_2) = l$ в виде $m_2 = n_2 n_3$, где у n_2 все простые делители $\leq x^{2/l}$, а у n_3 они $> x^{2/l}$. Если $n_2 \geq x^{1/\sqrt[4]{l}}$, то эта часть $\Sigma(a)$ будет

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{k \in I} \sum_{r \leq l_2/C} \sum_{C_1 l_2 \leq l \leq C_1 l_1} \sum_{\substack{m_1 \leq \sqrt[10]{x} \\ g(m_1) = k-l-r}} \sum_{\substack{m'_1 \leq \sqrt[10]{x} \\ (m'_1, m_1) = 1}} \sum_{\substack{m_2 = n_2 n_3 \\ \Omega(m_2) = l}} \left(\frac{\ln n_2}{\ln x^{1/\sqrt[4]{l}}} \right)^3 \\ &\quad \times |\{m'_2 : m'_1 m'_2 \leq x, m'_1 m'_2 + a = m_1 m_2 \cdots m_{s+1}, g(m_3 \cdots m_{s+1}) = r, \\ &\quad g(m'_1 m'_2) = g(m_1 m_2 \cdots m_{s+1}) + b\}| \\ &\leq \sum_{r \leq l_2/C} \frac{1}{\ln^3 x} \sum_{k \in I} \sum_{C_1 l_2 \leq l \leq C_1 l_1} l^{3/4} \sum_{\substack{m_1 \leq \sqrt[10]{x} \\ g(m_1) = k-l-r}} \sum_{\substack{m'_1 \leq \sqrt[10]{x} \\ (m'_1, m_1) = 1}} \sum_{p_1, p_2, p_3 \leq x^{2/l}} \ln p_1 \ln p_2 \ln p_3 \\ &\quad \times \left| \left\{ m'_2 : m'_1 m'_2 \leq x, m'_1 m'_2 + a \equiv 0 \pmod{m_1 [p_1, p_2, p_3]}, \right. \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{m'_1 m'_2 + a}{m_1 [p_1, p_2, p_3]}, P(x^{C/l_1}) \right) = 1, g(m'_1 m'_2) = k + b \right\} \right|. \end{aligned}$$

Применяя лемму 7, а затем лемму 6, получим, что оцениваемая сумма

$$\begin{aligned} &\ll \frac{l_1}{\ln x} \sum_{k \in I} \sum_{r \leq l_2/C} \sum_{C_1 l_2 \leq l \leq C_1 l_1} \sqrt[4]{l^3} \sum_{\substack{m_1 \leq \sqrt[10]{x} \\ g(m_1) = k-l-r}} \frac{1}{\varphi(m_1)} \\ &\quad \times \frac{1}{\ln^3 x} \sum_{p_1, p_2, p_3 \leq x^{2/l}} \frac{\ln p_1 \ln p_2 \ln p_3}{[p_1, p_2, p_3]} |\{n \leq x, g(n) = k + b\}| \\ &\ll \frac{x}{\ln^2 x} \ln_3 x \sum_{k \in I} \sum_{r \leq l_2/C} \sum_{C_1 l_2 \leq l \leq C_1 l_1} \frac{1}{l^{3-3/4}} \frac{1}{(k-l-r)!} \\ &\quad \times \left(\sum_{r, p \leq x^{C/l_1}} \frac{1}{\varphi(p^r)} \right)^{k-l-r} \frac{(\ln_2 x)^{k+b-1}}{(k+b-1)!}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $k \in I, l+r \leq C \ln_3 x$, мы получим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(k-l-r)!} \left(\sum_{r, p \leq x^{1/(Cl_1)}} \frac{1}{\varphi(p^r)} \right)^{k-l-r} = \frac{(\ln_2 x - \ln_4 x + O(1))^{k-l-r}}{(k-l-r)!} \\ &\ll \frac{(\ln_2 x)^{k-1}}{(k-1)!} \left(\frac{k}{\ln_2 x} \right)^{l+r} \left(1 - \frac{\ln_4 x + O(1)}{\ln_2 x} \right)^{k-l-r} \ll \frac{(\ln_2 x)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{1}{\ln_3 x}. \end{aligned}$$

Возвращаясь к предыдущему соотношению, получим, что оцениваемая часть $\Sigma(a)$ будет

$$\ll \frac{x}{\ln^2 x} \frac{1}{\sqrt[4]{l_2}} \sum_k \frac{(\ln_2 x)^k}{k!} \frac{(\ln_2 x)^{k+b}}{(k+b)!}.$$

Самое большое значение $(\ln_2 x)^n/n!$ принимает при $n = \ln_2 x + O(1)$, и из формулы Стирлинга следует, что оно равно

$$O\left(\exp\left((\ln_2 x + O(1)) \ln \frac{\ln_2 x}{\ln_2 x + O(1)} + \ln_2 x + O(1)\right) \frac{1}{\sqrt{\ln_2 x}}\right) = O\left(\frac{\ln x}{\sqrt{\ln_2 x}}\right).$$

Отсюда получим, что оцениваемая часть $\Sigma(a)$ равна

$$O\left(\frac{x}{\sqrt{\ln_2 x}} \frac{1}{\sqrt[4]{\ln_4 x}}\right).$$

Отметим, что если $g(m_2) \leq C_1 l_2$ и $m_2 \geq x^{1/\sqrt[4]{l_2}}$, то, повторяя рассуждения с n_2 равным m_2 , получим, что эта часть также равна

$$O\left(\frac{x}{\sqrt{\ln_2 x}} \frac{1}{\sqrt[4]{\ln_4 x}}\right).$$

Напомним, что все простые делители m_2 не превосходят t_2 , т.е. $p_1, p_2, p_3 \leq t_2 = x^{C/l_2}$.

Пусть $g(m_2) \in [C_1 l_2, C_1 l_1]$ и $n_2 \leq x^{1/\sqrt[4]{l}}$. Так как $g(m_2) = l$, $g(n_3) < l/2$, то $g(n_2) > l/2$. Поэтому эта часть суммы при любом $q > 1$

$$\begin{aligned} &\ll \sum_{k \in I} \sum_{r \leq l_2/C} \sum_{C_1 l_2 \leq l \leq C_1 l_1} \sum_{m_1 \leq \sqrt[10]{x}} \sum_{n_2 \leq x^{1/\sqrt[4]{l}}} \frac{q^{\omega(n_2)}}{q^{l/2}} \\ &\times \sum_{\substack{m'_1 \leq \sqrt[10]{x} \\ (m'_1, m_1)=1}} \left| \left\{ m'_2 : m'_1 m'_2 \leq x, m'_1 m'_2 + a \equiv 0 \pmod{m_1 n_2}, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left(\frac{m'_1 m'_2 + a}{m_1 n_2}, P(x^{2/l}) \right) = 1, g(m'_1 m'_2) = k + b \right\} \right|. \end{aligned}$$

Снова применяя лемму 7 и лемму 6 и проводя предыдущие рассуждения, получим, что оцениваемая сумма

$$\begin{aligned} &\ll \frac{x}{\sqrt{\ln_2 x}} l_2 l_1 q^{-C_1 l_2/2} \exp\left(q \sum_{x^{C/l_1} \leq p \leq x^{C/l_2}} \frac{1}{p}\right) \\ &\ll \frac{x}{\sqrt{\ln_2 x}} l_1^2 \exp\left(\left(-\frac{1}{2} C_1 \ln q + q\right) \ln_4 x\right). \end{aligned}$$

Выберем $q = 2$ и $\frac{1}{2} C_1 \ln 2 - 2 \geq 3$. Тогда оцениваемая часть $\Sigma(a)$ равна

$$O\left(\frac{x}{\sqrt{\ln_2 x}} \frac{1}{\ln_3 x}\right).$$

Выберем

$$C_1 = 2 \max\left(\frac{5}{\ln 2}, \frac{10}{2C_0}\right).$$

Подводя итог, получим

$$\Sigma(a) = \Sigma_1(a) + O\left(\frac{x}{\sqrt{\ln_2 x}} \frac{1}{(\ln_4 x)^{1/4}}\right),$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma_1(a) = |\{n : n = m_1 m_2 \cdots m_{s+1} \leq x, n + a = m'_1 m'_2, (m_1, m'_1) = 1, \\ g(m'_1 m'_2) = g(n) + b, m_1 \leq \sqrt[10]{x}, m_2 \leq x^{1/\sqrt[4]{\ln_4 x}}, m'_2 \leq \sqrt[10]{x}, g(n) \in I\}|. \end{aligned}$$

Повторим предыдущие рассуждения с m_3 вместо m_2 и $m_1 m_2$ вместо m_1 . Отметим, что $m_1 m_2 \leq x^{1/10+1/\sqrt[4]{\ln_4 x}}$.

Если $g(m_3) \in [C_1 l_3, C_1 l_2)$, то представим m_3 в виде $m_3 = n_4 n_5$, где у n_4 все простые делители $\leq x^{2/l}$, а у n_5 они больше $x^{2/l}$, где $l = g(m_3)$. Если $n_4 > x^{1/\sqrt[4]{l}}$, то эта часть равна

$$O\left(\frac{x}{\sqrt{\ln_2 x}} \frac{1}{\sqrt[4]{\ln_5 x}}\right).$$

Затем точно так же, как и ранее, оцениваются части $\Sigma_1(a)$ с $n_4 \leq x^{1/\sqrt[4]{l}}$, $g(m_3) \in [C_1 l_3, C_1 l_2)$ и с $g(m_3) \leq C_1 l_3$, если $m_3 \geq x^{1/\sqrt[4]{\ln_5 x}}$. Следовательно, повторяя предыдущие рассуждения $s-1$ раз, мы получим

$$\Sigma(a) = \Sigma_{s-1}(a) + O\left(\frac{x}{\sqrt{\ln_2 x}} \left(\frac{1}{(\ln_4 x)^{1/4}} + \frac{1}{(\ln_5 x)^{1/4}} + \cdots + \frac{1}{(\ln_s x)^{1/4}}\right)\right),$$

где в $\Sigma_{s-1}(a)$ имеем $m_1 \leq x^{1/10}$, $m_2 \leq x^{1/\sqrt[4]{l_2}}$, ..., $m_s \leq x^{1/\sqrt[4]{l_s}}$. Таким образом, $m_1 m_2 \cdots m_s \leq x^\alpha$, где

$$\alpha \leq \frac{1}{10} + \frac{1}{\sqrt[4]{l_2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[4]{l_s}}.$$

Напомним, что s – наибольшее число с условием $1/\sqrt[4]{l_s} \leq 1/100$. Но при $2 \leq j \leq s$ имеем $l_{j-1} = e^{l_j}$,

$$\frac{1}{\sqrt[4]{l_{j-1}}} = \frac{1}{e^{l_j/4}} \leq \frac{1}{1/3! \cdot (1/4)^3 l_j^3} \leq \frac{1}{l_j^2},$$

так как $l_j \geq l_s \geq 100^4 \geq 3! \cdot 4^3$. Поэтому

$$\alpha \leq \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{(100)^2} + \cdots \leq \frac{1}{5}$$

и

$$\begin{aligned} \Sigma(a) \leq |\{n : n = n_6 n_7 \leq x, n + a = m'_1 m'_2, (n_6, m'_1) = 1, n_6 \leq x^{1/5}, m'_1 \leq x^{1/10}, \\ g(m'_1 m'_2) = g(n) + b, g(n) \in I\}| + O\left(\frac{x}{\sqrt{\ln_2 x}}\right), \end{aligned}$$

где все простые делители n_6 не превосходят x^β , $\beta = C/l_s$, C – постоянная и все простые делители n_7 больше x^β . Используя леммы 7 и 6, получим, что первое слагаемое в правой части

$$\begin{aligned} &\ll \frac{x}{\ln x \ln x^\beta} \sum_{k \in I} \sum_{\substack{n_6 \leq x^{1/5} \\ k-1/\beta \leq g(n_6) \leq k}} \frac{1}{\varphi(n_6)} \frac{(\ln_2 x)^{k+b-1}}{(k+b-1)!} \\ &\ll \frac{x}{\ln^2 x} \sum_{k \in I} \frac{(\ln_2 x + O(1))^k}{k!} \frac{(\ln_2 x)^{k+b-1}}{(k+b-1)!} \ll \frac{x}{\sqrt{\ln_2 x}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\Sigma(a) = O\left(\frac{x}{\sqrt{\ln_2 x}}\right).$$

Отсюда и из (10) мы получаем оценку сверху для $N(x, b)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Heath-Brown D. R. The divisor function at consecutive integers // *Mathematika*. 1984. V. 31. P. 141–149.
- [2] Kan I. On the number-theoretic functions $\nu(n)$ and $\Omega(n)$ // *Acta Arith.* 1996. V. 78. № 1. P. 91–97.
- [3] Erdős P., Pomerance C., Sárközy A. On locally repeated values of certain arithmetic function. II // *Acta Math. Hungar.* 1987. V. 49. P. 251–259.
- [4] Тимофеев Н. М. Оценка сумм мультипликативных функций со сдвинутыми аргументами // *Матем. заметки*. 1993. Т. 54. № 5. С. 84–98.
- [5] Halberstam H., Richert H. E. *Sieve Methods*. London–New York: Acad. Press, 1974.
- [6] Тимофеев Н. М. Неравенства Харди–Рамануджана и Холоса для сдвинутых простых чисел // *Матем. заметки*. 1995. Т. 57. № 5. С. 747–764.
- [7] Hall R., Tenenbaum G. *Divisors*. Cambridge–New York: Cambridge Univ. Press, 1990.
- [8] Кубилюс Й. П. *Вероятностные методы в теории чисел*. Вильнюс: ГИПНЛ Литовской ССР, 1962.
- [9] Тимофеев Н. М., Хрипунова М. Б. Распределение чисел с заданным числом простых делителей в прогрессиях // *Матем. заметки*. 1994. Т. 55. № 2. С. 144–156.
- [10] Selberg A. Note on a paper by L. G. Sathe // *J. Indian Math. Soc.* 1954. V. 18. P. 83–87.

Владимирский государственный педагогический университет
E-mail: timofeev@vgpu.elcom.ru

Поступило
12.11.98