Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Филиппов, О сильных возмущениях системы Хаара в пространстве $L_1(0, 1)$, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 4, 596–602

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1201>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 13:25:09

УДК 517.51

О СИЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ СИСТЕМЫ ХААРА В ПРОСТРАНСТВЕ $L_1(0, 1)$

В. И. Филиппов

В работе рассматривается возмущенная, в смысле метрики $L_1(0, 1)$, система Хаара. Показывается, что данное возмущение сильнее, чем при базисной устойчивости или устойчивости полных систем; при этом системы, получающиеся в результате возмущения, полны в $L_1(0, 1)$. Дается алгоритм приближения по этим системам в $L_1(0, 1)$.

Библиография: 6 названий.

В работе исследуются условия, при которых система функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L_1(0, 1)$ является полной в пространстве $L_1(0, 1)$. Рассматриваются системы функций, удовлетворяющие одному из условий:

- 1) $\int_0^1 f_n(t) dt \neq 0, n = 1, 2, \dots;$
- 2) $\int_0^1 f_n(t) dt = 0, n = 1, 2, \dots$

Теорема 1 работы обобщает в $L_1(0, 1)$ теорему 2 (а) из [1]. В теореме 3 рассматриваются системы, получающиеся из системы Хаара более сильным возмущением, чем при базисной устойчивости (см. [2, с. 442]) и устойчивости полных систем (см. [3]). Приводится также алгоритм приближения элементов функциональных пространств по системам, получающимся в результате возмущения системы Хаара.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [4]. Система функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L_1(0, 1)$ называется *системой представления в пространстве L_1* , если для любой функции $f \in L_1$ существует ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ такой, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=1}^n c_k f_k \right\|_1 = 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Систему функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L_1(0, 1)$ назовем *полной в пространстве L_1* , если для любой функции $f \in L_1$ и любого $\varepsilon > 0$ существует сумма $\sum_{k=1}^m c_k f_k$ такая, что

$$\left\| f - \sum_{k=1}^m c_k f_k \right\|_1 < \varepsilon.$$

Повторяя доказательство леммы 1 из работы [1], получим следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть $\varphi \in L_p(0, 1)$, $1 \leq p < \infty$, $\int_0^1 \varphi(t) dt = \delta \neq 0$. Тогда существуют константы $\lambda, l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, $0 \leq l_1 < l_2 \leq 1$, такие, что

$$\sigma \equiv \left(\frac{1}{l_2 - l_1} \right)^{1/p} \|\chi_{(l_1, l_2)}(t) - \lambda \varphi(t)\|_p < 1,$$

где $\chi_{(c, d)}(t)$ – характеристическая функция интервала (c, d) .

Из леммы 1 вытекает, что существуют $\lambda \in \mathbb{R}$ и измеримое множество $Q \subset (0, 1)$, $0 < |Q| < \infty$, такие, что

$$\frac{1}{|Q|} \|\chi_Q(t) - \lambda \varphi(t)\|_1 = \sigma < 1,$$

где $|Q|$ – мера Лебега множества Q . Рассмотрим функциональную систему $\{\varphi_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$, которая удовлетворяет условию

$$\sup_n \sigma_n = \sigma < 1, \quad (1)$$

где

$$\sigma_n = \inf_{\substack{\lambda \in \mathbb{R} \\ Q \subset (0, 1)}} \left\{ \frac{1}{|Q|} \|\chi_Q(t) - \lambda \varphi_n(t)\|_1 \right\}.$$

Очевидно, что условие (1) эквивалентно условию (2), а именно: если $\varepsilon > 0$ такое, что $\sigma + \varepsilon = \sigma' < 1$, то существуют $\lambda_n \in \mathbb{R}$, $Q_n = \bigcup_{i=1}^{i_n} |a_i^n, b_i^n|$ такие, что

$$\sigma'_n = \frac{1}{|Q_n|} \|\chi_{Q_n}(t) - \lambda_n \varphi_n(t)\|_1 \leq \sigma + \varepsilon = \sigma' < 1 \quad (2)$$

и, кроме того, $\sup_n \sigma'_n \leq \sigma' < 1$.

Пусть система $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет следующему условию:

$$\text{mes} \left\{ (0, 1) \setminus \bigcup_{n=N}^{\infty} Q_n \right\} = 0 \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

здесь и далее mes обозначает меру Лебега.

Пусть $x_n = \min_i \{a_i^n\}$, $y_n = \max_i \{b_i^n\}$. Положим $d(\varphi_n) = y_n - x_n$.

Пусть

$$d(\varphi_n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad d(\varphi_n) \neq 0. \quad (4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 (см. [5, с. 231]). Множество $(0, 1)$ покрывается семейством $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ в смысле Витали, если семейство $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям (3), (4) и если существует $\alpha > 0$ такое, что для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{\text{mes}\{(x_n, y_n) \cap Q_n\}}{\text{mes}(x_n, y_n)} \geq \alpha.$$

ТЕОРЕМА 1. Предположим, что система $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L_1(0, 1)$ удовлетворяет свойствам (2)–(4) и для любого $N \in \mathbb{N}$ множество $(0, 1)$ покрывается в смысле Витали семейством $\{Q_n\}_{n=N}^{\infty}$. Тогда для произвольного $N \in \mathbb{N}$ система $\{\varphi_n\}_{n=N}^{\infty}$ является системой представления в $L_1(0, 1)$.

ЛЕММА 2. Пусть для системы $\{\varphi_n\}$ выполнены условия теоремы 1. Тогда для любой ступенчатой функции $R(t)$ и любого $N \in \mathbb{N}$ существуют конечная сумма $P(t) \equiv \sum_{k=N}^m c_k \varphi_k$, $m > N$, и σ'_0 , $\sigma' < \sigma'_0 < 1$, такие, что

$$\begin{aligned} \|R(t) - P(t)\|_1 &\leq \sigma'_0 \|R(t)\|_1, \\ \left\| \sum_{k=N}^n c_k \varphi_k \right\|_1 &\leq 4 \|R\|_1, \quad N \leq n \leq m, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\sigma' < 1$ определяется в (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для простоты обозначим $p_k = \lambda_k \varphi_k$, где λ_k берется из (2). Пусть

$$R(t) = \sum_{k=1}^M d_k \chi_{(\alpha_k, \beta_k)}(t)$$

есть ступенчатая функция, а $\{(\alpha_k, \beta_k)\}$ — система взаимно не пересекающихся интервалов из $(0, 1)$. Из теоремы Витали (см. [5, с. 232]) вытекает, что для каждого интервала $E_k = (\alpha_k, \beta_k)$, $1 \leq k \leq M$, и произвольного $\varepsilon > 0$ существуют L и множества Q_{n_l} такие, что $\text{mes}\{E_k \setminus \bigcup_{l=1}^L Q_{n_l}\} < \varepsilon$, где $Q_{n_l} \subset E_k$, $Q_{n_l} \cap Q_{n_i} = \emptyset$, если $l \neq i$. Выберем множества Q_{n_l} такие, что

$$\left\| R(t) - \sum_{k=1}^M d_k \sum_{l=r_k}^{l_k} \chi_{Q_{n_l}}(t) \right\|_1 \leq (\sigma'_0 - \sigma') \|R(t)\|_1.$$

Зафиксируем эти номера и элементы. Тогда

$$\begin{aligned} \left\| R(t) - \sum_{k=1}^M d_k \sum_{l=r_k}^{l_k} p_{n_l} \right\|_1 &\leq \left\| R(t) - \sum_{k=1}^M d_k \sum_{l=r_k}^{l_k} \chi_{Q_{n_l}}(t) \right\|_1 \\ &\quad + \left\| \sum_{k=1}^M d_k \sum_{l=r_k}^{l_k} \chi_{Q_{n_l}}(t) - \sum_{k=1}^M d_k \sum_{l=r_k}^{l_k} p_{n_l}(t) \right\|_1 \\ &\leq (\sigma'_0 - \sigma') \|R(t)\| + \sum_{k=1}^M |d_k| \sum_{l=r_k}^{l_k} \sigma'_{n_l} |Q_{n_l}| \\ &\leq \sigma'_0 \|R(t)\|_1. \end{aligned}$$

Докажем теперь (5). Пусть $N \leq n \leq m$. Тогда существует i , $1 \leq i \leq M$, такое, что $r_i \leq n \leq l_i$ или $l_i < n < r_{i+1}$ и

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{l=N}^n c_l p_{n_l} \right\|_1 &= \left\| \sum_{k=1}^{i-1} d_k \sum_{l=r_k}^{l_k} p_{n_l} + \sum_{l=r_i}^n c_l p_{n_l} \right\|_1 \\ &\leq \left\| \sum_{k=1}^{i-1} d_k \sum_{l=r_k}^{l_k} p_{n_l} - \sum_{k=1}^{i-1} d_k \sum_{l=r_k}^{l_k} \chi_{Q_{n_l}} \right\|_1 + \left\| d_i \sum_{l=r_i}^n \chi_{Q_{n_l}} - d_i \sum_{l=r_i}^n p_{n_l} \right\|_1 \\ &\quad + \left\| \sum_{k=1}^{i-1} d_k \sum_{l=r_k}^{l_k} \chi_{Q_{n_l}} \right\|_1 + \left\| d_i \sum_{l=r_i}^n \chi_{Q_{n_l}} \right\|_1 \\ &\leq 4 \|R(t)\|_1. \end{aligned}$$

Заметим, что мы положили $c_l = 0$ для тех l , которые не были использованы при конструировании $P(t)$. В частности, если $l_i < n < r_{i+1}$, то

$$\sum_{l=N}^n c_l p_{n_l} = \sum_{l=N}^{l_i} c_l p_{n_l}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $1/2 \leq \sigma'_0 < 1$. Воспользуемся леммой 2 и индукцией. Пусть $f \in L_1(0, 1)$, $f_0 = f$. Найдем по индукции последовательность ступенчатых функций $\{R_k\}$, $k \geq 1$, номеров $N \leq N_1 < m_1 < \dots < N_k < m_k < \dots$, функций f_k , $k \geq 1$, и линейных комбинаций $\sum_{l=N_k}^{m_k} c_l p_{n_l}$, $k \geq 1$, по системе $\{p_l\}$ так, что справедливо следующее:

$$\begin{aligned} f_k &= f_{k-1} - \sum_{l=N_k}^{m_k} c_l p_{n_l}, \\ \|f_{k-1} - R_k\|_1 &< \frac{1}{2^{k+1}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Для каждого R_k линейная комбинация $\sum_{l=N_k}^{m_k} c_l p_{n_l}$ конструируется так же, как в доказательстве леммы 2. Тогда

$$\left\| R_k - \sum_{l=N_k}^{m_k} c_l p_{n_l} \right\|_1 \leq \sigma'_0 \|R_k\|_1, \quad \left\| \sum_{l=N_k}^n c_l p_{n_l} \right\|_1 \leq 4 \|R_k\|_1, \quad N_k \leq n \leq m_k.$$

Чтобы доказать теорему 1, проверим, что ряд $\sum_{l=1}^{\infty} c_l p_{n_l}$ представляет функцию f в L_1 (заметим, что мы положили $c_l = 0$ для неиспользованных индексов l). Завершая доказательство, рассмотрим какое-либо достаточно большое $n > 0$ и определим индекс $k \geq 1$ так, что $N_{k-1} \leq n \leq m_{k-1}$, $k \geq 2$. Тогда

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{l=N_1}^n c_l p_{n_l} \right\|_1 &\leq \left\| f - \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{l=N_i}^{m_i} c_l p_{n_l} \right\|_1 + \left\| \sum_{l=N_{k-1}}^n c_l p_{n_l} \right\|_1 \\ &\leq \|f_{k-2}\|_1 + \left\| \sum_{l=N_{k-1}}^n c_l p_{n_l} \right\|_1 \leq \|f_{k-2}\|_1 + 4 \|R_{k-1}\|_1 \\ &\leq 5 \|f_{k-2}\|_1 + \frac{4}{2^k}. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \|f_{k-1}\|_1 &\leq \frac{1}{2^{k-1}} + \sigma'_0 \|f_{k-2}\|_1 \leq \frac{1}{2^{k-1}} + \sigma'_0 \left(\frac{1}{2^{k-2}} + \sigma'_0 \|f_{k-3}\|_1 \right) \\ &\leq \frac{1}{2^{k-1}} + \sigma'_0 \frac{1}{2^{k-2}} + (\sigma'_0)^2 \frac{1}{2^{k-3}} + \dots + (\sigma'_0)^{k-2} \|f\|_1 \\ &\leq k(\sigma'_0)^{k-1} + (\sigma'_0)^{k-2} \|f\|_1. \end{aligned} \quad (7)$$

Легко видеть, что $\|f_{k-1}\|_1 \rightarrow 0$ для $k \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для произвольного $N \in \mathbb{N}$ система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ является системой представления в $L_1(0, 1)$ в смысле сходимости почти всюду.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На самом деле достаточно обосновать, что построенный при доказательстве теоремы 1 ряд сходится также почти всюду. Из соотношения (2) получаем

$$\|\lambda_n \varphi_n\|_1 \leq (1 + \sigma') \|\chi_{Q_n}\|_1 \leq 2 \|\chi_{Q_n}\|_1.$$

В силу построения ступенчатых функций R_k легко видеть, что

$$\left\| \sum_{l=N_k}^{m_k} c_l p_{n_l} \right\|_1 \leq \sum_{l=N_k}^{m_k} \|c_l p_{n_l}\|_1 \leq 2 \sum_{l=N_k}^{m_k} |c_l| \cdot \|\chi_{Q_l}\|_1 \leq 2 \sum_{l=N_k}^{m_k} \int_{Q_l} |c_l| dt \leq 2 \|R_k\|_1.$$

Из неравенств (6), (7) получаем

$$\|R_k\|_1 \leq \frac{1}{2^{k+1}} + \|f_{k-1}\|_1 \leq \frac{1}{2^{k+1}} + k(\sigma'_0)^{k-1} + (\sigma'_0)^{k-2} \|f\|_1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=N_k}^{m_k} c_l p_{n_l} \right\|_1 &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \sum_{l=N_k}^{m_k} c_l p_{n_l} \right\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=N_k}^{m_k} \int_0^1 |c_l| \cdot |p_{n_l}| dt \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \|R_k\|_1 \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{k+1}} + k(\sigma'_0)^{k-1} + (\sigma'_0)^{k-2} \|f\|_1 \right) < +\infty. \end{aligned}$$

Таким образом, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=N_k}^{m_k} |c_l p_{n_l}|$ сходится (по следствию из теоремы Б. Леви) почти всюду. Значит, по теореме Ф. Рисса ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=N_k}^{m_k} c_l p_{n_l}$ сходится почти всюду к той же самой функции, к которой сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=N_k}^{m_k} c_l p_{n_l}$ по норме пространства $L_1(0, 1)$.

Пусть

$$\chi_n^i(t) = \begin{cases} +1, & t \in \left(\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right), \\ -1, & t \in \left(\frac{i+1}{2^n}, \frac{i+2}{2^n}\right), \\ 0 & \text{в остальных точках,} \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots, \quad i = 0, 2, \dots, 2^n - 2, \quad \chi_0^0(t) \equiv 1.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\{\varphi_0^0(t)\} \cup \{\varphi_n^i(t)\}$, $n = 1, 2, \dots$, $i = 0, 2, \dots, 2^n - 2$, система функций из $L_1(0, 1)$ такая, что

$$\begin{aligned} \inf_{\lambda_0^0 \in \mathbb{R}} \|\chi_0^0(t) - \lambda_0^0 \varphi_0^0(t)\|_1 &= \sigma_0, \\ 2^{n-1} \cdot \inf_{\lambda_n^i \in \mathbb{R}} \|\chi_n^i(t) - \lambda_n^i \varphi_n^i(t)\|_1 &= \sigma_n^i, \quad n = 1, 2, \dots, \quad i = 0, 2, \dots, 2^n - 2. \end{aligned}$$

Если

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n = \sigma < 1,$$

где $\sigma_n = \max_i \{\sigma_n^i\}$, $n = 1, 2, \dots$, $i = 0, 2, \dots, 2^n - 2$, то система $\{\varphi_0^0(t)\} \cup \{\varphi_n^i(t)\}$, $n = 1, 2, \dots$, $i = 0, 2, \dots, 2^n - 2$, является полной в $L_1(0, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим следующие выражения:

$$P_{n,i} = \chi_{(i/2^n, (i+1)/2^n)}(t) - \frac{1}{2} (\chi_{([i/2]/2^{n-1}, ([i/2]+1)/2^{n-1})}(t) + (-1)^i \lambda_n^{[i/2]} \varphi_n^{[i/2]}(t)) \\ + \frac{1}{2} P_{n-1, [i/2]}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad i = 0, 1, \dots, 2^n - 1, \\ P_{0,0} = 1 - \lambda_0^0 \varphi_0^0,$$

где $[i/2]$ – целая часть числа $i/2$. Для $n = 1$

$$P_{1,0}(t) = \chi_{(0,1/2)}(t) - \frac{1}{2} (1 + \lambda_1^0 \varphi_1^0(t)) + \frac{1}{2} P_{0,0}, \\ P_{1,1}(t) = \chi_{(1/2,1)}(t) - \frac{1}{2} (1 - \lambda_1^0 \varphi_1^0(t)) + \frac{1}{2} P_{0,0}.$$

Очевидно, что

$$P_{n,i}(t) = \chi_{(i/2^n, (i+1)/2^n)}(t) - Q_{n,i}(t), \quad n = 0, 1, \dots, \quad i = 0, 1, \dots, 2^n - 1,$$

где $Q_{n,i}$ – многочлен, построенный определенным образом, по системе $\{\varphi_0^0(t)\} \cup \{\varphi_n^i(t)\}$, $n = 1, 2, \dots, i = 0, 2, \dots, 2^n - 2$. Для наглядности приведем многочлен $P_{2,0}$:

$$P_{2,0}(t) = \chi_{(0/2^2, 1/2^2)}(t) - \frac{1}{2} (\chi_{(0/2^{2-1}, 1/2^{2-1})}(t) + (-1)^0 \lambda_2^0 \varphi_2^0(t)) + \frac{1}{2} P_{1,0}(t).$$

Легко видеть, что

$$\|P_{1,0}(t)\|_1 \leq (\sigma_1 + \sigma_0) \|\chi_{(0,1/2)}(t)\|_1, \quad \|P_{1,1}(t)\|_1 \leq (\sigma_1 + \sigma_0) \|\chi_{(1/2,1)}(t)\|_1.$$

Для простоты дальнейших вычислений положим $i = 0$. По индукции легко доказать, что верно неравенство

$$\|P_{n,0}\|_1 = \|\chi_{(0/2^n, 1/2^n)}(t) - Q_{n,0}(t)\|_1 \leq \sigma_n \|\chi_{(0/2^n, 1/2^n)}(t)\|_1 + \frac{1}{2} \|P_{n-1,0}(t)\|_1 \\ \leq \sigma_n \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2} \left(\sigma_{n-1} \|\chi_{(0,1/2^{n-1})}(t)\|_1 + \frac{1}{2} \|P_{n-2,0}(t)\|_1 \right) \\ \leq \sigma_n \frac{1}{2^n} + \sigma_{n-1} \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^2} \|P_{n-2,0}\|_1 \leq \sigma_n \frac{1}{2^n} + \sigma_{n-1} \frac{1}{2^n} + \sigma_{n-2} \frac{1}{2^n} + \dots + \sigma_0 \frac{1}{2^n} \\ \leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \sigma_k \leq \sigma \|\chi_{(0/2^n, 1/2^n)}(t)\|_1.$$

Таким образом, для произвольных $n = 0, 1, \dots, i = 0, 1, \dots, 2^n - 1$ существует многочлен $Q_{n,i}(t)$ по системе $\{\varphi_0^0\} \cup \{\varphi_n^i\}$, $n = 1, 2, \dots, i = 0, 2, \dots, 2^n - 2$, такой, что

$$\|\chi_{(i/2^n, (i+1)/2^n)}(t) - Q_{n,i}(t)\|_1 \leq \sigma \|\chi_{(i/2^n, (i+1)/2^n)}(t)\|_1,$$

где $\sigma < 1$.

Так как система интервалов $\{(i/2^n, (i+1)/2^n)\}$, $n = 0, 1, \dots, i = 0, 1, \dots, 2^n - 1$, удовлетворяет условию (3), то, очевидно, выполнены все условия теоремы 1 для системы $\{Q_{n,i}\}$, $n = 0, 1, \dots, i = 0, 1, \dots, 2^n - 1$. Итак, получили, что $\{Q_{n,i}\}$ является системой представления в $L_1(0, 1)$, а система $\{\varphi_0^0\} \cup \{\varphi_n^i\}$, $n = 1, 2, \dots, i = 0, 2, \dots, 2^n - 2$, полна в $L_1(0, 1)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда $\{Q_{n,i}\}$, $n = 0, 1, \dots$, $i = 0, 1, \dots, 2^n - 1$, является системой представления в $L_1(0, 1)$ в смысле сходимости почти всюду.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема 4 следует из теоремы 2, примененной к системе $\{Q_n^i\}$, $n = 0, 1, \dots$, $i = 0, 1, \dots, 2^n - 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В работе [6] приведены результаты о представлении измеримых функций почти всюду абсолютно сходящимися рядами по системам $\{\varphi_{jk}(x)\}$, где $\varphi_{jk}(x) = 2^{j/2}\varphi(2^jx - k)$, а на функцию φ наложены определенные условия.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Filippov V., Oswald P. Representation in L_p by series of translates and dilates of one function // J. Approx. Theory. 1995. V. 82. № 1. P. 15–29.
- [2] Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М.: ГИФМЛ, 1958.
- [3] Олевский А. М. Об устойчивости оператора ортогонализации Шмидта // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1970. Т. 34. С. 803–826.
- [4] Талалаян А. А. О системах, ряды по которым представляют произвольные измеримые функции // Матем. сб. 1968. Т. 76. № 1. С. 39–51.
- [5] Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962.
- [6] Gevorkian G. Representation of measurable functions by absolutely convergent series of translates and dilates of one function // East J. Approx. 1996. V. 2. № 4. P. 439–458.

Саратовский государственный университет

Поступило
19.05.98