Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Г. Хессами Пилеруд, Оценка снизу одной линейной формы, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 4, 617–623

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1202>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 14:10:16

УДК 511.36

ОЦЕНКА СНИЗУ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ФОРМЫ

Т. Г. Хессами Пилеруд

В работе с помощью аппроксимаций Паде первого рода получена оценка снизу для модуля линейной формы с целыми коэффициентами от значений полилогарифмических функций в рациональной точке. Эта оценка учитывает рост всех коэффициентов линейной формы.

Библиография: 2 названия.

Пусть

$$L_j(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^j}, \quad j \geq 1. \quad (1)$$

В данной работе с помощью аппроксимаций Паде первого рода получена оценка снизу для модуля линейной формы с целыми коэффициентами от значений функций (1). Эта оценка учитывает рост всех коэффициентов линейной формы. Ранее линейная независимость значений полилогарифмов изучалась в работе [1]. Там же получена оценка снизу соответствующей линейной формы, зависящая от максимума модуля коэффициентов формы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $z = b/a$, $b \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{N}$, $a^{m+1}e^{m(m-1)\ln(8m)+m^2} < |b|$. Тогда для любых $x_0, x_1, \dots, x_m \in \mathbb{Z}$, в совокупности отличных от нуля, и $\bar{x}_i \geq \max(1, |x_i|)$, $i = 1, \dots, m$, удовлетворяющих условиям $\bar{x}_1 \leq \bar{x}_2 \leq \dots \leq \bar{x}_m$, $\bar{x}_m \geq X_0 = X_0(a, b, m) > 0$, справедливо неравенство

$$\left| x_0 + x_1 \cdot L_m\left(\frac{a}{b}\right) + \dots + x_m \cdot L_1\left(\frac{a}{b}\right) \right| > (\bar{x}_1 \dots \bar{x}_m)^{-1} \cdot \bar{x}_m^{-\delta},$$

$$\delta = \frac{m(m+1)\ln a + m^2\ln(8m) + m^2(m+2)}{\ln|b| - (m+1)\ln a - m(m-1)\ln(8m) - m^2}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $b \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, $|b|^{\varepsilon/(m+\varepsilon)} > a^{m+1}e^{m^2\ln(8m)+m(m+2)}$. Тогда для любых $x_0, x_1, \dots, x_m \in \mathbb{Z}$, в совокупности отличных от нуля, и $\bar{x}_i \geq \max(1, |x_i|)$, $i = 1, \dots, m$, удовлетворяющих условиям $\bar{x}_1 \leq \bar{x}_2 \leq \dots \leq \bar{x}_m$, $\bar{x}_m \geq X_0 = X_0(a, b, m) > 0$, справедливо неравенство

$$\left| x_0 + x_1 \cdot L_m\left(\frac{a}{b}\right) + \dots + x_m \cdot L_1\left(\frac{a}{b}\right) \right| > (\bar{x}_1 \dots \bar{x}_m)^{-1} \cdot \bar{x}_m^{-\varepsilon}.$$

Перейдем к построению приближающих форм. Пусть $n_1, \dots, n_m$ – натуральные числа, $n_1 \leq \dots \leq n_m$, $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m)$, $N + 1 = \sum_{i=1}^m (n_i + 1)$.

Положим

$$R_{\mathbf{n}}(\nu) = \frac{(\nu - 1)(\nu - 2) \cdots (\nu - N)}{(\nu)_{n_1+1} \cdots (\nu)_{n_m+1}}, \quad (2)$$

где $(\nu)_0 = 1$ и $(\nu)_k = \nu(\nu + 1) \cdots (\nu + k - 1)$ при $k \geq 1$.

Рассмотрим функцию

$$F_{\mathbf{n}}(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} R_{\mathbf{n}}(\nu) z^{-\nu}. \quad (3)$$

Так как

$$\prod_{j=1}^m (\nu)_{n_j+1} = \prod_{j=1}^m \prod_{s=0}^{n_j} (\nu + s),$$

для $R_{\mathbf{n}}(\nu)$ имеет место разложение

$$R_{\mathbf{n}}(\nu) = \sum_{j=1}^m \sum_{s=0}^{n_j} \frac{\omega_{j,s}}{(\nu + s)^{m-j+1}}. \quad (4)$$

ЛЕММА 1. *Справедливо равенство*

$$F_{\mathbf{n}}(z) = \sum_{j=1}^m P_{\mathbf{n},j}(z) \cdot L_{m-j+1}\left(\frac{1}{z}\right) - P_{\mathbf{n},0}(z),$$

где

$$P_{\mathbf{n},j}(z) = \sum_{s=0}^{n_j} \omega_{j,s} z^s, \quad 1 \leq j \leq m,$$

$$P_{\mathbf{n},0}(z) = \sum_{j=1}^m \sum_{s=0}^{n_j} \sum_{\nu=1}^s \frac{\omega_{j,s}}{\nu^{m-j+1}} z^{s-\nu}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3) и (4) имеем

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{n}}(z) &= \sum_{j=1}^m \sum_{s=0}^{n_j} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\omega_{j,s}}{(\nu + s)^{m-j+1}} z^{-\nu} = \sum_{j=1}^m \sum_{s=0}^{n_j} \omega_{j,s} z^s \cdot \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^{-\nu-s}}{(\nu + s)^{m-j+1}} \right) \\ &= \sum_{j=1}^m P_{\mathbf{n},j}(z) \cdot L_{m-j+1}\left(\frac{1}{z}\right) - P_{\mathbf{n},0}(z), \end{aligned}$$

и лемма доказана.

ЛЕММА 2. *При $|z| > 1$ с некоторой константой $c_1 = c_1(m) > 0$ имеет место неравенство*

$$|F_{\mathbf{n}}(z)| \leq \frac{c_1 |z|^{-N-1}}{1 - |z|^{-1}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2) и (3) имеем

$$F_{\mathbf{n}}(z) = \sum_{\nu=N+1}^{\infty} \frac{\Gamma^{m+1}(\nu)}{\Gamma(\nu-N) \prod_{i=1}^m \Gamma(\nu+n_i+1)} z^{-\nu}. \quad (5)$$

Далее по формуле Стирлинга

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma^{m+1}(\nu)}{\Gamma(\nu-N) \prod_{i=1}^m \Gamma(\nu+n_i+1)} &\leq c_2 \exp \left\{ -\ln \nu - \left(\nu - N - \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 - \frac{N}{\nu} \right) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^m (\nu + n_i + 1) \ln \left(1 + \frac{n_i + 1}{\nu} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Так как

$$\ln \left(1 + \frac{n_i + 1}{\nu} \right) \geq \frac{n_i + 1}{\nu} - \frac{(n_i + 1)^2}{2\nu^2},$$

имеем

$$\begin{aligned} -(\nu + n_i + 1) \ln \left(1 + \frac{n_i + 1}{\nu} \right) &\leq -(\nu + n_i + 1) \left(\frac{n_i + 1}{\nu} - \frac{(n_i + 1)^2}{2\nu^2} \right) \\ &= -n_i - 1 + \frac{(n_i + 1)^2}{2\nu} \left(-1 + \frac{n_i + 1}{\nu} \right) \leq -n_i - 1. \end{aligned}$$

С учетом того, что

$$\begin{aligned} -\left(\nu - N - \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 - \frac{N}{\nu} \right) &= \left(\nu - N - \frac{1}{2} \right) \sum_{r=1}^{\infty} \frac{N^r}{r\nu^r} \leq \sum_{r=1}^{\infty} \frac{N^r}{r\nu^{r-1}} - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{N^{r+1}}{r\nu^r} \\ &= N - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{N^{r+1}}{r(r+1)\nu^r} < N, \end{aligned}$$

окончательно получаем

$$\frac{\Gamma^{m+1}(\nu)}{\Gamma(\nu-N) \prod_{i=1}^m \Gamma(\nu+n_i+1)} < \frac{c_3}{\nu},$$

и утверждение леммы теперь следует из (5).

ЛЕММА 3. Пусть $D = \text{НОК}[1, 2, \dots, n_m]$. Тогда

$$(j-1)! D^{j-1} P_{\mathbf{n},j}(z) \in \mathbb{Z}[z], \quad 1 \leq j \leq m, \quad m! D^m P_{\mathbf{n},0}(z) \in \mathbb{Z}[z].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что $(j-1)! D^{j-1} \omega_{j,s} \in \mathbb{Z}$; тогда утверждение леммы будет следовать из определения многочленов $P_{\mathbf{n},j}(z)$, $0 \leq j \leq m$.

Заметим, что наибольшая из степеней $\nu + s$, присутствующих справа в (4), равна $m - l + 1$, где l – наименьшее с условием $n_l \geq s$. Отсюда с учетом (4) находим

$$\omega_{j,s} = \frac{1}{(j-l)!} \cdot \frac{d^{j-l}}{d\zeta^{j-l}} (R_{\mathbf{n}}(\zeta)(\zeta+s)^{m-l+1})(-s). \quad (6)$$

Справедливо равенство

$$R_{\mathbf{n}}(\zeta)(\zeta+s)^{m-l+1} = \frac{(\zeta-1)(\zeta-2)\cdots(\zeta-N)}{\prod_{k=1}^m \prod_{i=0, i \neq s}^{n_k} (\zeta+i)}.$$

Степень многочлена, стоящего в числителе, равна N , в знаменателе – равна $N + l - m$. Поэтому дробь можно представить в виде

$$R_{\mathbf{n}}(\zeta)(\zeta+s)^{m-l+1} = P_0(\zeta) \cdot \prod_{k=1}^m g_k(\zeta),$$

где $P_0(\zeta) = (\zeta - N)_{m-1}$ – многочлен степени $m-1$,

$$g_k(\zeta) = \frac{(\zeta - a_k)(\zeta - a_k - 1) \cdots (\zeta - a_k - n_k + 1)}{\prod_{i=0, i \neq s}^{n_k} (\zeta + i)}, \quad a_k = 1 + n_1 + \cdots + n_{k-1}.$$

Тогда

$$\frac{d^{j-l}}{d\zeta^{j-l}} (R_{\mathbf{n}}(\zeta) \cdot (\zeta+s)^{m-l+1}) = \sum_{\alpha_0 + \cdots + \alpha_m = j-l} \frac{(j-l)!}{\alpha_0! \cdots \alpha_m!} P_0^{(\alpha_0)}(\zeta) \cdot \prod_{k=1}^m g_k^{(\alpha_k)}(\zeta).$$

Далее аналогично доказательству леммы 2 из работы [1] получаем

$$\begin{aligned} D^{\alpha_k+1} \cdot g_k^{(\alpha_k)}(-s) &\in \mathbb{Z}, \text{ если } s \notin [0, n_k], \\ D^{\alpha_k} \cdot g_k^{(\alpha_k)}(-s) &\in \mathbb{Z}, \text{ если } s \in [0, n_k]. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$D^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_m + m - (m-l+1)} \cdot \prod_{k=1}^m g_k^{(\alpha_k)}(-s) \in \mathbb{Z}.$$

Поэтому с учетом (6) выполнено $(j-1)! D^{j-1} \cdot \omega_{j,s} \in \mathbb{Z}$, что завершает доказательство леммы.

ЛЕММА 4. При $|z| > 1$ справедливо неравенство

$$|P_{\mathbf{n},j}(z)| \leq N^{c_4} e^{N \ln(8m)} |z|^{n_j}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (6) следует, что

$$\omega_{j,s} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta+s|=1/2} R_{\mathbf{n}}(\zeta) \cdot (\zeta+s)^{m-j} d\zeta, \quad 1 \leq j \leq m, \quad 0 \leq s \leq n_j. \quad (7)$$

Оценивая $|R_{\mathbf{n}}(\zeta)|$ сверху на контуре интегрирования, имеем

$$|R_{\mathbf{n}}(\zeta)| \leq \frac{(|\zeta|+1)(|\zeta|+2) \cdots (|\zeta|+N)}{|(\zeta)_{n_1+1}| \cdots |(\zeta)_{n_m+1}|}.$$

Согласно [2, лемма 7.7, с. 108] находим

$$|(\zeta)_{n_i+1}| \geq \frac{1}{2} n_i! \cdot 2^{-n_i} n_i^{-1},$$

откуда

$$|R_{\mathbf{n}}(\zeta)| \leq N^{c_5} \frac{2^{n_1+\cdots+n_m}}{n_1! \cdots n_m!} \cdot \frac{(s+N)!}{s!} \leq N^{c_6} \cdot m^N \cdot 2^{2N+n_j} \leq N^{c_6} \cdot e^{N \ln(8m)},$$

отсюда и из (7) следует утверждение леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Заметим, что при $n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_{j-1} < n_j$ выполнено $\omega_{j,n_j} \neq 0$ для $j = 1, 2, \dots, m$, так как $m-j+1$ является максимальной степенью вхождения $\nu + n_j$ в знаменатель $R_{\mathbf{n}}(\nu)$.

Пусть $\mathbf{n}_i = (n_1, \dots, n_i, n_{i+1}+1, \dots, n_m+1)$, $i = 0, 1, \dots, m$. Рассмотрим

$$\Delta_{\mathbf{n}}(z) = \begin{vmatrix} P_{\mathbf{n}_0,0}(z) & P_{\mathbf{n}_0,1}(z) & \cdots & P_{\mathbf{n}_0,m}(z) \\ P_{\mathbf{n}_1,0}(z) & P_{\mathbf{n}_1,1}(z) & \cdots & P_{\mathbf{n}_1,m}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{\mathbf{n}_m,0}(z) & P_{\mathbf{n}_m,1}(z) & \cdots & P_{\mathbf{n}_m,m}(z) \end{vmatrix}.$$

ЛЕММА 5. *Выполнено*

$$\Delta_{\mathbf{n}}(z) \equiv \text{const} \neq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Delta_{\mathbf{n},j}(z)$, $0 \leq j \leq m$, – алгебраическое дополнение элемента $P_{\mathbf{n}_j,0}(z)$:

$$\Delta_{\mathbf{n},j}(z) = (-1)^j \begin{vmatrix} P_{\mathbf{n}_0,1}(z) & \cdots & P_{\mathbf{n}_0,m}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{\mathbf{n}_{j-1},1}(z) & \cdots & P_{\mathbf{n}_{j-1},m}(z) \\ P_{\mathbf{n}_{j+1},1}(z) & \cdots & P_{\mathbf{n}_{j+1},m}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{\mathbf{n}_m,1}(z) & \cdots & P_{\mathbf{n}_m,m}(z) \end{vmatrix}.$$

Заметим, что $\deg \Delta_{\mathbf{n},m}(z) = N+1$, $\deg \Delta_{\mathbf{n},j}(z) < N+1$ при $j < m$. Из леммы 1 получаем следующие равенства при $j = 0, 1, \dots, m$:

$$P_{\mathbf{n}_j,1}(z)L_m\left(\frac{1}{z}\right) + \cdots + P_{\mathbf{n}_j,m}(z)L_1\left(\frac{1}{z}\right) - P_{\mathbf{n}_j,0}(z) = \frac{d_{\mathbf{n}_j}}{z^{N+1+(m-j)}} + \cdots. \quad (8)$$

Умножая обе части равенства (8) на $\Delta_{\mathbf{n},j}(z)$ и суммируя по j от 0 до m , получим

$$\Delta_{\mathbf{n}}(z) = \sum_{j=0}^m \Delta_{\mathbf{n},j}(z) \cdot P_{\mathbf{n}_j,0}(z) = \pm d_{\mathbf{n}_m} \prod_{j=1}^m \rho_j + \frac{d_1}{z} + \cdots,$$

где ρ_j – старший коэффициент многочлена $P_{\mathbf{n}_{j-1},j}$. Из последнего равенства и следует утверждение леммы, так как $d_{\mathbf{n}_m} \neq 0$.

ЛЕММА 6. Для любых натуральных $n_1, \dots, n_m$, $n_1 \leq \dots \leq n_m$, $N+1 = \sum_{i=1}^m (n_i+1)$, и рационального $z = b/a$, $|z| > 1$, существуют $m+1$ линейно независимых форм от чисел $1, L_1(a/b), \dots, L_m(a/b)$ с целыми коэффициентами,

$$\sum_{i=1}^m T_{j,i} \cdot L_{m+1-i}\left(\frac{a}{b}\right) - T_{j,0} = E_j, \quad j = 0, 1, \dots, m, \quad (9)$$

удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} |T_{j,i}| &\leq T_i = (n_m + 1)^{c_7} D_1^m e^{m \ln(8m) \cdot n_m} a^{n_m+1} \left(\frac{|b|}{a}\right)^{n_i+1}, \\ |E_j| &\leq (n_m + 1)^{c_8} D_1^m a^{n_m+1} \left(\frac{|b|}{a}\right)^{-N-1} \left(1 - \frac{a}{|b|}\right)^{-1}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $D_1 = \text{НОК}[1, 2, \dots, n_m + 1]$, $c_7 = c_7(m) > 0$, $c_8 = c_8(m) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое утверждение следует из лемм 1–5, если положить

$$\begin{aligned} T_{j,i} &= m! D_1^m a^{n_m+1} P_{\mathbf{n}_j, i}\left(\frac{b}{a}\right), \quad i = 0, 1, \dots, m, \\ E_j &= m! D_1^m a^{n_m+1} F_{\mathbf{n}_j}\left(\frac{b}{a}\right), \quad j = 0, 1, \dots, m. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Пусть

$$|b| > a^{m+1} e^{m(m-1) \ln(8m) + m^2}. \quad (11)$$

Рассмотрим форму

$$l = x_1 L_m\left(\frac{a}{b}\right) + \dots + x_m L_1\left(\frac{a}{b}\right) - x_0$$

с целыми коэффициентами, и пусть числа $\bar{x}_i \geq \max(1, |x_i|)$, $i = 1, \dots, m$, таковы, что $\bar{x}_1 \leq \dots \leq \bar{x}_m$.

Определим натуральное число n_m как наименьшее, удовлетворяющее условию

$$(m+1)! \cdot \bar{x}_m \cdot (n_m + 1)^{c_7(m-1) + c_8} D_1^{m^2} \left(\frac{e^{m(m-1) \ln(8m)} \cdot a^{m+1}}{|b|} \right)^{n_m+1} < \frac{1}{4}.$$

В силу (11) такое n_m всегда существует, так как $D_1 = e^{n_m + o(n_m)}$. Для каждого i , $1 \leq i < m$, определим натуральное n_i как наименьшее, удовлетворяющее условию

$$(m+1)! \cdot \bar{x}_i \cdot (n_m + 1)^{c_7(m-1) + c_8} D_1^{m^2} (e^{m(m-1) \ln 8m} a^m)^{n_m+1} \left(\frac{a}{|b|}\right)^{n_i+1} < \frac{1}{4}.$$

Легко видеть, что $n_i \leq n_{i+1}$ для каждого $1 \leq i < m$.

По лемме 6 среди линейных форм (9) существуют m форм линейно независимых с l . Не ограничивая общности, можно считать, что это формы $E_1, \dots, E_m$. Тогда

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_m \\ T_{1,0} & T_{1,1} & \dots & T_{1,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{m,0} & T_{m,1} & \dots & T_{m,m} \end{vmatrix}$$

– целое число, отличное от 0. Вычитая из первого столбца определителя остальные, умноженные соответственно на $L_m(a/b), \dots, L_1(a/b)$, и раскладывая полученный таким способом определитель по первому столбцу, получим неравенство

$$1 \leq |\Delta| \leq |l| \cdot m! \cdot T_1 \cdots T_m + m! \sum_{i=1}^m |x_i| \frac{T_1 \cdots T_m}{T_i} |E_m|.$$

После подстановки значений T_i из (10) находим

$$\begin{aligned} 1 &\leq |l| (n_m + 1)^{c_9} D_1^{m^2} e^{m^2 \ln(8m) n_m} a^{m(n_m+1)-N-1} |b|^{N+1} \\ &+ 2 \cdot m! \sum_{i=1}^m \bar{x}_i \cdot (n_m + 1)^{c_7(m-1)+c_8} D_1^{m^2} e^{m(m-1) \ln(8m) n_m} \frac{a^{m(n_m+1)+n_i+1}}{|b|^{n_i+1}}. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом выбора чисел $n_1, \dots, n_m$ при достаточно большом n_m (т.е. при $\bar{x}_m > X_0(a, b, m)$) получаем

$$\begin{aligned} |l| &\geq \frac{1}{2} N^{-c_{10}} D_1^{-m^2} e^{-m^2 \ln(8m) n_m} a^{-m(n_m+1)+N+1} |b|^{-N-1} \\ &\geq N^{-c_{10}} D_1^{-m^2} (a^m e^{m^2 \ln(8m)})^{-n_m-1} \left(\frac{|b|}{a} \right)^{-N-1} \\ &> (\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_m)^{-1} (e^{m^3+m^3 \ln(8m)+1.5m^2} a^{m^2+m})^{-n_m-1} \\ &> (\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_m)^{-1} \cdot \bar{x}_m^{-\delta}, \end{aligned}$$

и теорема доказана.

Автор выражает благодарность профессору Ю. В. Нестеренко за научное руководство.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Никишин Е. М. Об иррациональности значений функций $F(x, s)$ // Матем. сб. 1979. Т. 109 (151). № 3 (7). С. 410–417.
- [2] Фельдман Н. И. Седьмая проблема Гильберта. М.: Изд. МГУ, 1982.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: pogtan@nw.math.msu.su

Поступило
16.12.98