Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Ежов, А. В. Лобода, Г. Шмальц, Каноническая форма многочлена четвертой степени в нормальном уравнении вещественной гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 4, 624–626

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1203>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 14:33:08

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

КАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМА МНОГОЧЛЕНА ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ В НОРМАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ В $\mathbb{C}^3$

В. В. Ежов, А. В. Лобода, Г. Шмальц

Пусть $M \subset \mathbb{C}^3$ – вещественно-аналитическая гиперповерхность с невырожденной формой Леви. Согласно [1] существуют координаты $z = (z_1, z_2)$, $w = u + iv$ (u, v – соответственно вещественная и мнимая части переменной w) такие, что уравнение M принимает вид

$$v = \langle z, z \rangle + \sum_{k \geq 2, l \geq 2, m \geq 0} F_{klm}(z, \bar{z}, u), \quad (1)$$

где $\langle z, z \rangle$ – эрмитова форма, а $F_{klm}(z, \bar{z}, u)$ – полином степеней k, l, m по $z, \bar{z}, u$ соответственно. Это означает, что F_{220} – слагаемое минимального порядка, которое может быть различным в нормализованных уравнениях двух поверхностей с фиксированной формой Леви.

Ниже мы рассматриваем вопрос о виде, к которому можно привести ненулевой многочлен F_{220} при помощи голоморфных преобразований, сохраняющих начало координат и нормальную форму уравнения M . Подобные результаты оказываются полезными, например, при построении локальной классификации однородных многообразий в терминах их нормальных уравнений.

В зависимости от сигнатуры формы Леви мы различаем два случая:

- а) $\langle z, z \rangle_+ = |z_1|^2 + |z_2|^2$ – строго псевдовыпуклый случай;
- б) $\langle z, z \rangle_- = \operatorname{Im} z_1 \bar{z}_2$ – случай знаконеопределенной формы.

Многочлен F_{220} удовлетворяет условию “гармоничности” $\Delta_{\pm} F_{220} = 0$, где

$$\Delta_+ = \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} + \frac{\partial^2}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2}$$

соответствует строго псевдовыпуклому случаю и

$$\Delta_- = \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{z}_2} - \frac{\partial^2}{\partial z_2 \partial \bar{z}_1}$$

– случаю знаконеопределенной формы Леви.

В обоих случаях будем пользоваться общим обозначением $\mathfrak{H}_{22}$ для пространства “гармонических” полиномов. В рамках единого подхода ниже доказываются следующие два результата.

Работа первого автора выполнена при поддержке Австралийского исследовательского совета (ARC) и Института М. Планка (MPI, Bonn). Работа второго и третьего авторов выполнена при поддержке фонда SFB-256 Боннского университета.

ТЕОРЕМА 1. В случае знаконеопределенной формы Леви ненулевой многочлен $F_{220}(z, \bar{z})$ из нормализованного уравнения (1) можно считать имеющим один из следующих видов:

- 1) $\sigma_2 + a\sigma_0 + \sigma_{-2}$, $a \geq 2$;
- 2) $\sigma_1 + a\sigma_0 + \sigma_{-1}$, $a \geq 0$;
- 3) $\sigma_2 + \sigma_0$;
- 4) σ_2 ;
- 5) σ_1 ;
- 6) σ_0 ,

где

$$\sigma_{-2} = |z_2|^4, \quad \sigma_{-1} = \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) |z_2|^2, \quad \sigma_0 = \frac{2}{3} |z_1|^2 |z_2|^2 + \frac{1}{3} \operatorname{Re} z_1^2 \bar{z}_2^2, \\ \sigma_2 = |z_1|^4, \quad \sigma_1 = \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) |z_1|^2.$$

ТЕОРЕМА 2. В строго псевдовыпуклом случае ненулевой многочлен $F_{220}(z, \bar{z})$ может быть приведен к одному из следующих видов:

- 1) $\pm(\eta_{-2} + a\eta_{-1} - 2\eta_0 + a\eta_1 + \eta_2)$, $a \geq 0$;
- 2) $\pm(\eta_{-1} + \eta_1)$,

где

$$\eta_{-2} = \bar{\eta}_2 = z_1^2 \bar{z}_2^2, \quad \eta_{-1} = \bar{\eta}_1 = \frac{1}{2}(z_1 z_2 \bar{z}_2^2 - z_1^2 \bar{z}_1 \bar{z}_2), \quad \eta_0 = \frac{1}{6}(|z_1|^4 - 4|z_1|^2 |z_2|^2 + |z_2|^4).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ. Согласно [1] любое биголоморфное преобразование Φ , сохраняющее начало координат и нормальный вид уравнения M , действует на многочлен $F_{220}(z, \bar{z})$ матрицей второго порядка $C = \lambda e^{i\theta} J^\varepsilon U$ из своей линейной части. Здесь $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $\theta \in [0, 2\pi)$, U — унитарная (или псевдоунитарная) матрица, имеющая определитель равный 1, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, а параметр ε всегда равен 0 в псевдовыпуклом случае и равен 0 или 1 в случае знаконеопределенной формы Леви. При этом

$$F_{220}(z, \bar{z}) = (-1)^\varepsilon \lambda^2 F_{220}^*(J^\varepsilon U z, \overline{J^\varepsilon U z}). \quad (2)$$

Следовательно, мы должны изучить линейные действия матриц, определяемые формулой (2), на пространстве $\mathfrak{N}_{22}$ гармонических полиномов бистепени $(2, 2)$.

Рассмотрим сначала случай неопределенной формы. Ясно, что $e^{i\theta}$ не изменяет F_{220} ; λ действует на этот многочлен как простое умножение на λ^{-2} ; J переставляет переменные z_1 и z_2 в многочлене F_{220} и изменяет знаки всех его слагаемых.

Группа $SU(1, 1)$ совпадает (при нашем выборе формы Леви) с группой $SL(2, \mathbb{R})$. В связи с этим можно перейти к стандартному представлению $SL(2, \mathbb{R})$ в пространстве $\mathscr{P}_5 = \mathbb{R}^{(4)}[X : Y]$ вещественных однородных полиномов степени 4 от переменных X, Y .

Изоморфизм по равенству координат этого и исходного представлений группы $SL(2, \mathbb{R})$ задается формулами $\sigma_j \mapsto \hat{\sigma}_j = X^{2-j} Y^{2+j}$.

В свою очередь, для рассмотрения $SL(2, \mathbb{R})$ -орбит в пространстве $\mathscr{P}_5$ удобно перейти от элементов $P = \sum \alpha_j \hat{\sigma}_j$ этого пространства к многочленам $\tilde{P} = \sum_{j=0}^4 \alpha_{2-j} \xi^j$ от одной переменной.

Группа $SL(2, \mathbb{R})$ действует на корни последнего полинома дробно-линейными преобразованиями верхней полуплоскости. Переводя вещественные корни (если они есть) многочлена $\tilde{P}$ в нуль и в бесконечность, в зависимости от их кратностей несложно получить случаи 2)–6) из теоремы 1. При наличии у многочлена двух пар комплексно сопряженных корней мы можем перевести пару корней из верхней полуплоскости в мнимую единицу и в другое чисто мнимое число с положительной мнимой частью. Тогда получим

$$P = \hat{\sigma}_2 + a\hat{\sigma}_0 + \hat{\sigma}_{-2}, \quad a \geq 2,$$

т.е. случай 1) теоремы 1.

Обратимся теперь к псевдовыпуклому случаю. Каждый гармонический полином может быть записан в виде

$$F_{220} = a\eta_{-2} + b\eta_{-1} + c\eta_0 + \bar{b}\eta_1 + \bar{a}\eta_2,$$

где $a, b \in \mathbb{C}$ и $c \in \mathbb{R}$.

Через $\mathcal{Q}_5 \subset \mathbb{C}^{(4)}[X : Y]$ мы обозначим подпространство однородных полиномов $Q(X, Y)$ степени 4 от двух переменных вида

$$Q(X, Y) = aX^4 + bX^3Y + cX^2Y^2 - \bar{b}XY^3 + \bar{a}Y^4 \quad (3)$$

со стандартным $SU(2)$ -действием.

Действия группы $SU(2)$ в пространствах $\mathcal{Q}_5$ и $\mathcal{M}_{22}$ описываются в терминах коэффициентов a, b, c тождественно совпадающими формулами.

Рассмотрим $SU(2)$ -орбиты в пространстве $\mathcal{Q}_5$. Пусть Q — многочлен вида (3), а

$$\tilde{Q} = a\xi^4 + b\xi^3 + c\xi^2 - \bar{b}\xi + \bar{a}.$$

Легко проверить, что для каждого корня τ многочлена $\tilde{Q}$ комплексное число $-\bar{\tau}^{-1}$ также является его корнем, причем отличающимся от τ . Группа $SU(2)$ действует на корни полинома $\tilde{Q}$ дробно-линейными преобразованиями вида

$$\eta = \frac{\alpha\xi + \beta}{-\bar{\beta}\xi + \bar{\alpha}}.$$

Поэтому у многочлена $\tilde{Q}$ найдется пара различных корней, которую можно перевести $SU(2)$ -действием в 1 и -1 . Остающаяся свобода в таких действиях позволяет расположить третий корень на отрезке $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Четвертый корень попадает при этом в подмножество $[-\infty, -1]$ вещественной оси. Тогда различные случаи расположения корней приводят к следующему списку представителей орбит (с точностью до ненулевого вещественного множителя).

а) Третий и четвертый корни равны τ и $-\bar{\tau}^{-1}$ с $0 < \tau \leq 1$. Здесь мы получаем представителей $\xi^4 + \gamma\xi^3 - 2\xi^2 - \gamma\xi + 1$ с $\gamma = (1/\tau - \tau) \in [0, \infty)$.

б) Третий и четвертый корни равны 0 и $-\infty$. Тогда соответствующая орбита представляется многочленом $\xi^3 - \xi$.

За счет растяжения $(z, w) \mapsto (\lambda z, \lambda^2 w)$ можно сделать упомянутый множитель равным ± 1 .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chern S. S., Moser J. K. // Acta Math. 1974. V. 133. № 3–4. P. 219–271.

University of Adelaide (South Australia)

Воронежская государственная архитектурно-строительная академия

Mathematisches Institut der Universität Bonn

E-mail: vezhov@maths.adelaide.edu.au,

lob@vgasa.voronezh.su, schmalz@uni-bonn.de

Поступило

02.06.99