Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, О сверхтекучести жидкого гелия, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 4, 630–632

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1205>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 13:05:50

О СВЕРХТЕКУЧЕСТИ ЖИДКОГО ГЕЛИЯ

В. П. Маслов

Мы предъявим уравнения, описывающие сверхтекучесть для потенциала взаимодействия [1] вида

$$V(x, y) = V(x - y) = V_0 v\left(\frac{x - y}{a}\right). \quad (1)$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \left[\frac{V_0 a^3}{L^3} \sum_q \tilde{V}\left(\frac{2\pi a}{L}(p - q)\right) R_q \frac{(1 + G_p)^2 + R_p^* R_p}{(1 + G_p)(1 + 2G_p)} + (\mu - \lambda) \frac{2R_p}{\lambda + 2G_p} \cdot \frac{G_p + G_p^2 - R_p^* R_p}{(1 + G_p)^2 - R_p^* R_p} \right] R_p^* \\ & - \left[\frac{V_0 a^3}{L^3} \sum_q \tilde{v}\left(\frac{2\pi a}{L}(p - q)\right) R_q^* \frac{(1 + G_p)^2 + R_p^* R_p}{(1 + G_p)(1 + 2G_p)} \right. \\ & \left. + (\mu - \lambda) \frac{2R_p^*}{\lambda + 2G_p} \cdot \frac{G_p + G_p^2 - R_p^* R_p}{(1 + G_p)^2 - R_p^* R_p} \right] R_p = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & 2R_p \left[\frac{\hbar^2}{2ma^2} \left(\frac{2\pi a}{L} p\right)^2 - \mu + \frac{V_0 a^3}{L^3} \sum_q \left(\tilde{v}(0) + \tilde{v}\left(\frac{2\pi a}{L}(p - q)\right) \right) G_q \right] \\ & + \left[-\frac{V_0 a^3}{L^3} \sum_q \tilde{v}\left(\frac{2\pi a}{L}(p - q)\right) R_q \frac{(1 + G_p)^2 + R_p^* R_p}{(1 + G_p)(1 + 2G_p)} \right. \\ & \left. + (\lambda - \mu) \frac{2R_p}{\lambda + 2G_p} \cdot \frac{G_p + G_p^2 - R_p^* R_p}{(1 + G_p)^2 - R_p^* R_p} \right] (2G_p + 1) = 0; \end{aligned} \quad (3)$$

здесь $p = (p_1, p_2, p_3)$, p_α — целые числа, L — радиус трехмерного тора,

$$\tilde{v}(\eta) = \int d\xi v(\xi) e^{i\eta\xi}, \quad G_p = G_p^*,$$

λ и μ выражаются через R_p и G_p следующим образом:

$$\lambda = \frac{-CI + DI'}{JI' - J'I}, \quad \mu = \frac{CJ - DJ'}{JI' - J'I}, \quad (4)$$

где использованы обозначения

$$\begin{aligned} C = \sum_k & \left[\left(\frac{1}{2m} \left(\frac{2\pi a}{L} k \right)^2 \right. \right. \\ & + \frac{V_0 a^3}{L^3} \sum_l \left(\tilde{v}(0) + \tilde{v}\left(\frac{2\pi a}{L}(k - l)\right) \right) G_l \left(\frac{a_k}{1 - a_k} (1 + G_k) + 2a_k R_k^* R_k \right) \\ & \left. + \frac{V_0 a^3}{L^3} \sum_l \tilde{v}\left(\frac{2\pi a}{L}(k - l)\right) (R_l^* R_k + R_l R_k^*) a_k (1 + G_k) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} D = \sum_k & \left[\left(\frac{1}{2m} \left(\frac{2\pi a}{L} k \right)^2 \right. + \frac{V_0 a^3}{L^3} \left(\tilde{v}(0) + \tilde{v}\left(\frac{2\pi a}{L}(k - l)\right) \right) G_l \right) 2(1 - a_k) R_k^* R_k \\ & \left. + \frac{V_0 a^3}{2L^3} \sum_l \tilde{v}\left(\frac{2\pi a}{L}(k - l)\right) (R_l^* R_k + R_l R_k^*) (1 + 2G_k - 2a_k (1 + G_k)) \right], \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
 I &= 2 \sum_k (1 - a_k)^2 R_k^* R_k, & I' &= 2 \sum_k a_k (1 - a_k) R_k^* R_k, \\
 J &= 2 \sum_k a_k (1 - a_k) R_k^* R_k = I', & J' &= \sum_k \left(\frac{a_k}{1 - a_k} (1 + G_k) + 2a_k^2 R_k^* R_k \right), \\
 a_k &= \frac{G_k + G_k^2 - R_k^* R_k}{(1 + G_k)^2 - R_k^* R_k}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Определим матрицы

$$\mathbf{A}_p = \begin{pmatrix} G_p + \frac{1}{2} & R_p^* \\ -R_p & -G_p - \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}_p = \begin{pmatrix} A_p & -B_p^* \\ B_p & -A_p \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned}
 A_p &= \frac{1}{2m} \left(\frac{2\pi a}{L} p \right)^2 - \mu + \frac{V_0 a^3}{L^3} \sum_q \left(\tilde{v}(0) + \tilde{v} \left(\frac{2\pi a}{L} (p - q) \right) \right) G_q, \\
 B_p &= -\frac{V_0 a^3}{L^3} \sum_q \tilde{v} \left(\frac{2\pi a}{L} (p - q) \right) R_q \frac{(1 + G_p)^2 + R_p^* R_p}{(1 + G_p)(1 + 2G_p)} + (\lambda - \mu) \frac{2R_p}{1 + 2G_p} \cdot \frac{G_p + G_p^2 - R_p^* R_p}{(1 + G_p)^2 - R_p^* R_p}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

(10)

Несложно убедиться, что коммутатор $\mathbf{A}_p$ и $\mathbf{L}_p$ имеет вид

$$[\mathbf{A}_p, \mathbf{L}_p] = \begin{pmatrix} \alpha_p & -\beta_p^* \\ -\beta_p & \alpha_p^* \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где α_p – левая часть уравнения (2), а β_p – левая часть уравнения (3).

Таким образом, $\mathbf{A}_p = f(\mathbf{L}_p)$, где

$$f(\xi) = \frac{1}{e^{\xi/\theta} - 1} + \frac{1}{2} \tag{12}$$

– распределение Боза-Энштейна.

Поскольку матрица $\mathbf{L}_p^2 = \lambda_p^2 \mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ – единичная матрица,

$$\lambda_p = \sqrt{A_p^2 - |B_p|^2}, \tag{13}$$

а функция $f(\xi)$ нечетна, имеем $f(\mathbf{L}_p) = f(\lambda_p) \mathbf{L}_p / \lambda_p$. Приравнявая элементы матриц $\mathbf{A}_p$ и $f(\lambda_p) \mathbf{L}_p / \lambda_p$, получим уравнения

$$G_p = \frac{f(\lambda_p)}{\lambda_p} A_p - \frac{1}{2}, \tag{14}$$

$$R_p = -\frac{f(\lambda_p)}{\lambda_p} B_p \tag{15}$$

при условии $A_p^2 > |B_p|^2$.

Первый член разложения по R_p дает температуру фазового перехода из сверхтекучего состояния в нормальное, а второй – скачок теплоемкости. Условие на λ и μ дает соотношение между средним числом одиночных бозонов $\bar{k}$ и спаренных бозонов $\bar{M}$. Действительно, средние числа пар $\bar{M}$ и “холостых” бозонов $\bar{k}$ выражаются через G_p и R_p следующим образом:

$$\bar{M} = \frac{1}{2} \sum_k \frac{R_k^* R_k}{1 + G_k} (1 - a_k), \tag{16}$$

$$\bar{k} = \sum_p a_p (1 + G_p). \tag{17}$$

Легко убедиться, что

$$\bar{k} + 2\bar{M} = \sum_p G_p. \quad (18)$$

Таким образом, константы λ и μ функционально связаны с $\bar{M}$ и $\bar{k}$. В частности, отсюда следует, что при температуре равной 0 число холостых бозонов не равно 0, а связано соотношениями, приведенными выше.

Автор выражает благодарность Г. В. Ковалю за помощь в вычислениях.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маслов В. П. Операторные методы. М.: Наука, 1973.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
05.08.99