Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Немировский, Штейновы области с Леви-плоскими границами на компактных комплексных поверхностях, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 4, 632–635

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1206>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 17:41:06

ШТЕЙНОВЫ ОБЛАСТИ С ЛЕВИ-ПЛОСКИМИ ГРАНИЦАМИ НА КОМПАКТНЫХ КОМПЛЕКСНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

С. Ю. Немировский

Введение. Рассмотрим компактную комплексную алгебраическую поверхность V . Если $C \subset V$ — гиперплоское сечение, то многообразие $V \setminus C$, очевидно, допускает вложение в $\mathbb{C}^n$, т.е. является многообразием Штейна. Взяв в $V \setminus C$ относительно компактную штейнову область с гладкой границей, мы получим разрезание поверхности V на две части, одна из которых штейнова и псевдовыпукла, а другая представляет собой псевдовогнутую окрестность комплексной кривой.

Имеется также другая геометрическая конструкция штейновых областей в V . Рассмотрим на поверхности V вложенную вещественную поверхность S , гомологичную неособому гиперплоскому сечению C и имеющую род $g(S) = g(C) + \max\{0, c_1(V) \cdot C\}$. При этих условиях поверхность S можно пошевелить (C^0 -малой изотопией) так, что у нее появится фундаментальная система штейновых строго псевдовыпуклых окрестностей $U_\varepsilon \supset S$ (см., например, [1]). Снова получается разрезание поверхности V на штейнову и псевдовогнутую части, но теперь ни одна из них не содержит компактных комплексных кривых. (Области U_ε пересекают все такие кривые, поскольку для любой комплексной кривой $L \subset V$ индекс пересечения $L \cdot S = L \cdot C > 0$.)

Возникает вопрос: можно ли сделать такое разрезание вдоль гладкой вещественной гиперповерхности полностью “симметричным”, т.е. добиться, чтобы обе получившиеся области были штейновыми?

Ясно, что в этом случае граница должна быть Леви-плоской (поскольку она псевдовыпукла с обеих сторон). Однако для классических примеров Леви-плоских гиперповерхностей на комплексных поверхностях ограничиваемые ими области как раз *не являются* штейновыми (см. [2]). Заметим, впрочем, что если отказаться от требования гладкости гиперповерхности, то пример появляется тут же: замыкание стандартного $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{C}^2$ в $\mathbb{CP}^2$ делит проективную плоскость на две штейновы области.

В настоящей заметке мы указываем конструкцию компактных комплексных поверхностей, допускающих разрезание на две (изоморфные) штейновы части вдоль гладкой Леви-плоской гиперповерхности. Среди этих поверхностей есть как алгебраические (например, прямое произведение любой компактной римановой поверхности на некоторый тор), так и неалгебраические (поверхность Хопфа).

Работа организована следующим образом. Основная конструкция разрезаемых поверхностей и ее многомерный вариант приведены в п. 1. Затем в п. 2 мы рассматриваем частный случай поверхности Хопфа, а в п. 3 изучаем свойства определяющих функций для получившихся штейновых областей с Леви-плоской границей.

Работа выполнена при частичной поддержке Международного научного фонда, грант а98-1785.

1. Разрезание эллиптических поверхностей. Наша конструкция основана на следующем классическом наблюдении. Для вещественного $r > 1$ рассмотрим факторпространство проколотой комплексной плоскости $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ по отношению эквивалентности $z \sim rz$. Это некоторый комплексный одномерный тор T . Образ любой вещественной прямой $l \subset \mathbb{C}$, проходящей через 0, делит тор T на две половинки, биголоморфно эквивалентные некоторому кольцу A .

Теперь осуществим это построение в “относительной ситуации”. Пусть $L \rightarrow \Sigma$ – голоморфное линейное расслоение на компактной римановой поверхности. Пусть $s: \Sigma \rightarrow L$ – мероморфное сечение расслоения L , имеющее простые нули в точках $N_1, \dots, N_k \in \Sigma$ и простые полюсы в точках $P_1, \dots, P_m \in \Sigma$. Мы предполагаем, что $k + m > 0$.

Обозначим $L^* = L \setminus \{\text{нулевое сечение}\}$ и рассмотрим в L^* замыкание множества

$$\mathbb{R}s := \{\lambda \cdot s(z) \mid z \in \Sigma \setminus \{N_1, \dots, N_k, P_1, \dots, P_m\}, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

ЛЕММА. *Подмножество $M = \overline{\mathbb{R}s} \subset L^*$ есть гладкая Леви-плоская гиперповерхность.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение достаточно проверить только в окрестности нулей и полюсов сечения s . Выберем в окрестности такой точки координаты (z, w) в L таким образом, что $s(z) = (z, z)$ или $s(z) = (z, 1/z)$, если $z = 0$ – это нуль или полюс s соответственно. Тогда множество M задается соотношением $\text{Im } w\bar{z} = 0$ или $\text{Im } wz = 0$. Оба уравнения определяют Леви-плоские гиперповерхности, гладкие вне начала координат в $\mathbb{C}^2$.

Заметим, что вещественная гиперповерхность M содержит слои расслоения L^* над точками $N_1, \dots, N_k, P_1, \dots, P_m$ и пересекает все остальные слои по вещественным прямым.

Рассмотрим теперь на L^* отношение эквивалентности $Z \sim rZ$. Факторпространство $X = \pi(L^*)$ представляет собой эллиптическую поверхность, а точнее говоря, локально тривиальное расслоение с базой Σ и слоем T . Поскольку гиперповерхность M , очевидно, замкнута относительно введенной эквивалентности, ее образ $Y = \pi(M)$ является гладкой Леви-плоской гиперповерхностью в X и делит компактную поверхность X на две области $X_{\pm}$, каждая из которых расслоена над проколотой римановой поверхностью $\Sigma' = \Sigma \setminus \{N_1, \dots, N_k, P_1, \dots, P_m\}$ со слоем A . В действительности, это расслоение является прямым произведением, потому что ограничение $L \rightarrow \Sigma'$ тривиально (имеет голоморфное сечение s без нулей). Таким образом, доказано следующее основное

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Леви-плоская гиперповерхность Y делит компактную комплексную поверхность X на две штейновы области $X_{\pm}$, биголоморфно эквивалентные прямому произведению $\Sigma' \times A$ проколотой римановой поверхности на кольцо.*

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае, когда $\Sigma = \mathbb{CP}^1$, а s – сечение тривиального расслоения с одним нулем и одним полюсом, мы получаем, по существу, область в $X = \mathbb{CP}^1 \times T$, построенную Осавой [3]. Наша конструкция в каком-то смысле объединяет его пример со случаем поверхности Хопфа, на котором мы подробнее остановимся в следующем пункте.

Приведенное выше построение можно аналогичным образом осуществить в многомерной ситуации. Пусть V – проективное многообразие и $L \rightarrow V$ – очень обильное линейное расслоение. Тогда для общего сечения $s: V \rightarrow L$ его дивизор $D = \{s = 0\}$ является гладкой комплексной гиперповерхностью, а многообразие $V \setminus D$ – аффинным и потому штейновым многообразием.

Повторяя доказательство предложения 1, мы получаем, что вещественная гиперповерхность $\overline{\mathbb{R}s} \subset L^*$ определяет разрезание факторпространства $L^*/(Z \sim rZ)$ на две штейновы области, биголоморфно эквивалентные прямому произведению $V \setminus D$ на кольцо A .

2. Разрезание поверхности Хопфа. Поверхность Хопфа получается из конструкции п. 1, если $\Sigma = \mathbb{CP}^1$ и s – сечение тавтологического линейного расслоения с единственным полюсом. Удобно взглянуть на эту ситуацию “с другой стороны”.

Представим поверхность Хопфа как $X = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}/(Z \sim rZ)$. Тогда $\pi: \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow X$ – естественная проекция, а $M = \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{C}^2$ – это проходящая через начало координат вещественная гиперплоскость.

Введем в $\mathbb{C}^2$ координаты (z, w) так, что $M = \{\text{Im } w = 0\}$. Гиперповерхность $Y = \pi(M)$ делит поверхность Хопфа на две биголоморфно эквивалентные части $X_{\pm}$, соответствующие $\mathbb{C}_{\pm}^2 = \{\pm \text{Im } w > 0\}$. Можно явно описать голоморфные функции на $X_{\pm}$ и убедиться, что области $X_{\pm}$ штейновы.

Рассмотрим для определенности область X_+ . Голоморфной функции на X_+ соответствует голоморфная функция на $\{(z, w) \mid \operatorname{Im} w > 0\}$, инвариантная относительно умножения координат на g . Разложим такую функцию в ряд по z с коэффициентами, голоморфными в верхней полуплоскости по переменной w :

$$f(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(w) z^n, \quad f_n \in \mathcal{O}(\{\operatorname{Im} w > 0\}).$$

Условие инвариантности записывается в виде

$$f_n(w) = r^n \cdot f_n(rw), \quad n \geq 0.$$

Пусть теперь голоморфные в верхней полуплоскости $\{\operatorname{Im} w > 0\}$ инвариантные функции $g_1, \dots, g_N$ задают собственное голоморфное вложение штейнова многообразия A в $\mathbb{C}^N$. Тогда отображение

$$(z, w) \mapsto \left(g_1(w), \dots, g_N(w), \frac{z}{w} \right) \in \mathbb{C}^{N+1}$$

определяет собственное вложение X_+ в $\mathbb{C}^{N+1}$.

Отметим одну особенность разрезания поверхности Хопфа. Возникающее на Леви-плоской гиперповерхности Y слоение – это классическое слоение Рибба на $S^2 \times S^1$. Оно имеет единственный замкнутый слой – комплексный тор, соответствующий комплексной прямой $w = 0$. Этот слой разделяет $S^2 \times S^1$ на два полнотория. Все остальные слои суть комплексные прямые, “наматывающиеся” на этот тор. Полноторие, заполненное слоением такого вида, называется *рибовской компонентой слоения*.

Заметим, что на Леви-плоской гиперповерхности в *кэлеровой* комплексной поверхности слоение с рибовской компонентой возникнуть не может. Действительно, замкнутый слой слоения Рибба гомотогичен нулю, что невозможно для комплексной кривой в кэлеровой поверхности.

3. Определяющие функции. Цель этого пункта – показать, что построенные штейновы области с Леви-плоской границей существенно отличаются от строго псевдовыпуклых областей.

Пусть U – область с гладкой границей ∂U на гладком многообразии. Гладкая вещественнозначная функция ψ , определенная в некоторой окрестности $V \supset \partial U$, называется *определяющей функцией* для области U , если $U \cap V = \{x \in V \mid \psi(x) < 0\}$ и, кроме того, $d\psi(x) \neq 0, x \in V$.

Хорошо известно, что если U – строго псевдовыпуклая область на комплексном многообразии, то существует строго плюрисубгармоническая определяющая функция для U . Если же граница области не является строго псевдовыпуклой, то естественно рассмотреть плюрисубгармонические определяющие функции.

Оказывается, что для области с Леви-плоской границей множества уровня плюрисубгармонической определяющей функции никогда не являются строго псевдовыпуклыми. Мы рассмотрим только случай $\dim_{\mathbb{C}} U = 2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть ψ – плюрисубгармоническая определяющая функция области U с гладкой Леви-плоской границей на комплексной поверхности. Тогда гиперповерхности $\{\psi = t\}$ также Леви-плоские при малых $t \leq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $U_t = \{\psi < t\}$. При малых $t \leq 0$ эта подобласть в U имеет гладкую границу ∂U_t . Рассмотрим функцию $F = F(t)$, $-\varepsilon < t \leq 0$, задаваемую формулой

$$F(t) = \int_{\partial U_t} d^c \psi \wedge dd^c \psi.$$

Заметим, что в силу плюрисубгармоничности ψ функция $F(t)$ неотрицательна.

Кроме того, из плюрисубгармоничности ψ и формулы Стокса следует, что

$$F(t) - F(s) = \int_{\partial U_t} d^c \psi \wedge dd^c \psi - \int_{\partial U_s} d^c \psi \wedge dd^c \psi = \int_{U_t \setminus U_s} dd^c \psi \wedge dd^c \psi \geq 0 \quad \text{при } t \geq s.$$

Таким образом, $F(t)$ – неубывающая функция при $-\varepsilon < t \leq 0$.

Остается заметить, что $F(t) = 0$ тогда и только тогда, когда ∂U_t – Леви-плоская гиперповерхность уровня функции ψ .

СЛЕДСТВИЕ. Двумерная штейнова область U с компактной Леви-плоской границей не допускает плюрисубгармонических определяющих функций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует плюрисубгармоническая определяющая функция области U . Тогда согласно предложению 2 найдется компактная Леви-плоская гиперповерхность $M \subset U$. Пусть φ – строго плюрисубгармоническая функция в U . Ограничение $\varphi|_M$ достигает максимума в некоторой точке $x \in M$. В частности, φ достигает максимума на проходящем через эту точку листе слоения M на комплексные кривые, что невозможно.

Эта заметка появилась в результате обсуждений затрагиваемых в ней вопросов с С. Оревковым, которому автор глубоко признателен за ценные советы и наблюдения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Немировский С. Ю. // Матем. заметки. 1998. Т. 63. № 4. С. 599–606.
2. Grauert H. // Math. Z. 1963. V. 81. P. 377–392.
3. Ohsawa T. // Publ. Res. Inst. Math. Sci. 1982. V. 18. P. 1185–1186.