Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Д. Тюрина, О формулах типа Ланна и Виро–Поляка для инвариантов конечного порядка, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 4, 635–640

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1207>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:
IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 12:02:19

О ФОРМУЛАХ ТИПА ЛАННА И ВИРО–ПОЛЯКА ДЛЯ ИНВАРИАНТОВ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

С. Д. Тюрин

В теории инвариантов Васильева узлов до последнего времени преобладали результаты, описывающие структуру всего пространства этих инвариантов или аналитическую и комбинаторную структуру универсального инварианта Васильева. Эффективных формул, позволяющих вычислять базисные инварианты заданного порядка по простым исходным данным, например по диаграмме узла, до сих пор очень мало. Первые комбинаторные формулы для инвариантов второго и третьего порядков были получены Ланном [1]. Виро и Поляк анонсировали в [2] более наглядные диаграммные формулы для этих инвариантов, а также для аддитивного четного инварианта четвертого порядка. Однако, их формула для базисного инварианта третьего порядка имеет рациональные коэффициенты, хотя описываемый инвариант является целочисленным. Мы указываем диаграммную формулу с целыми коэффициентами для этого инварианта и доказываем, что диаграммное выражение действительно представляет инвариант, совпадающий с инвариантом Ланна $V_3(K)$.

1. Инварианты Васильева конечного порядка. Мы будем рассматривать ориентированные узлы $K: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – гладкие вложения окружности S^1 в пространство $\mathbb{R}^3$ – и сингулярные узлы $K^{\text{sing}}: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – погружения, допускающие конечное число двойных точек трансверсального самопересечения. Любой инвариант узла можно распространить индуктивно на сингулярные узлы по формуле

$$f\left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array}\right) = f\left(\begin{array}{c} \nearrow \nwarrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array}\right) - f\left(\begin{array}{c} \nwarrow \nearrow \\ \nearrow \nwarrow \end{array}\right). \quad (1)$$

Инвариант f , принимающий значение 0 на любом сингулярном узле с числом двойных точек, превышающем некоторое натуральное число n , называется *инвариантом Васильева порядка не выше n* .

2. Весовые системы. Пусть K_n^{sing} – некоторый ориентированный сингулярный узел с n двойными точками и $\mathcal{K}_n^{\text{sing}}$ – пространство таких узлов. Сопоставим узлу K_n^{sing} хордовую диаграмму D_n , которая является ориентированной окружностью S^1 с отмеченными на ней прообразами сингулярных точек, причем прообразы каждой двойной точки соединены хордой.

Работа выполнена при поддержке фонда INTAS, грант № 97-1644.

Пусть $\mathcal{D}_n$ – свободная абелева группа, порожденная всеми возможными диаграммами D_n с n хордами. Каждому инварианту f порядка n со значениями в абелевой группе A можно сопоставить гомоморфизм $W_f: \mathcal{D}_n \rightarrow A$ по формуле $W_f = f|_{\mathcal{K}_n^{\text{sing}}}$.

Весовой функцией (весовой системой) называется гомоморфизм W , удовлетворяющий двум линейным соотношениям: одночленному

$$W\left(\bigcirc \bigcirc\right) = 0 \quad (2)$$

и четырехчленному

$$W\left(\bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc\right) - W\left(\bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc\right) + W\left(\bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc\right) - W\left(\bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc\right) = 0,$$

где диаграмма в (2) обозначает элемент $\mathcal{D}_n$ с уединенной хордой, а остальные диаграммы – элементы $\mathcal{D}_n$ с указанными отличиями.

Определенный выше гомоморфизм W_f является весовой функцией.

ПРИМЕР 1. Весовые системы порядка 2 и 3:

$$\begin{aligned} W_2\left(\bigcirc \bigcirc\right) &= 1, & W_2\left(\bigcirc \bigcirc\right) &= 0, \\ W_3\left(\bigcirc \bigcirc \bigcirc\right) &= 2, & W_3\left(\bigcirc \bigcirc \bigcirc\right) &= 1, & W_3 &= 0 \text{ в остальных случаях.} \end{aligned}$$

3. “Координаты” на узле. Пусть D – диаграмма узла K , определяемая проекцией, причем в окрестности каждой двойной точки линия, проходящая снизу (*переход*), изображается дугой с разрывом, а линия, проходящая сверху (*проход*), изображается сплошной дугой.

Каждой двойной точке x проекции узла сопоставим два целых числа δ_x и ε_x по следующим правилам:

- 1) если при движении от отмеченной точки в направлении ориентации узла сначала проходим точку x по переходу, а затем по проходу, то $\delta_x = 0$; в противном случае $\delta_x = 1$;
- 2) двойной точке x проекции узла D сопоставим $\varepsilon_x = \pm 1$ в зависимости от типа перекрестка (*local writh number*)

$$\varepsilon_x \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \right) = 1, \quad \varepsilon_x \left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \swarrow \end{array} \right) = -1.$$

Рис. 1

ПРИМЕР 2. “Координаты” на трилистнике (см. рис. 1): $\delta_x = 1$, $\varepsilon_x = 1$, $\delta_y = 0$, $\varepsilon_y = 1$, $\delta_z = 1$, $\varepsilon_z = 1$.

4. Формулы Ланна. Пусть K^* – произвольный пунктированный узел (т.е. узел с отмеченной точкой), D – его проекция общего положения на плоскость и X – множество всех двойных точек D . Рассмотрим всевозможные неупорядоченные пары точек $\{x, y\}$ из X .

Будем считать, что $x < y$, если при движении вдоль узла от отмеченной точки в направлении обхода сначала проходим точку x , затем y . Обозначим через P_2 (соответственно через P_3) всевозможные пары (тройки) двойных точек $\{x, y\}$ (соответственно $\{x, y, z\}$) из X такие, что $x < y$ (соответственно $x < y < z$).

Инвариант узла f , принимающий значения в некоторой абелевой группе, будем называть *четным* (соответственно *нечетным*), если для любого узла K и его зеркального образа K^* имеет место равенство $f(K) = f(K^*)$ (соответственно $f(K) = -f(K^*)$).

ТЕОРЕМА 1 [1, теорема 4.2.9]. *Базисный четный целочисленный инвариант Васильева второго порядка, принимающий значения 0 на тривиальном узле и 1 на трилистнике, задается следующей формулой:*

$$V_2(K) = \frac{1}{2} \sum_{\{x,y\} \in P_2} (-1)^{\delta_x + \delta_y} W_2(\{x,y\}) \varepsilon_x \varepsilon_y [\delta_x(1 - \delta_y) + \delta_y(1 - \delta_x)], \quad (3)$$

где $W_2(\{x,y\})$ – значение весовой системы W_2 (из примера 1) на диаграмме с двумя хордами, отвечающими двойным точкам x и y .

В модифицированном виде представим базисный инвариант V_3 из [1].

ТЕОРЕМА 2. *Базисный нечетный целочисленный инвариант третьего порядка, принимающий значения 0 на тривиальном узле и 1 на трилистнике, задается следующей формулой:*

$$V_3(K) = \frac{1}{2} \sum_{\{x,y,z\} \in P_3} (-1)^{\delta_x + \delta_y + \delta_z} W_3(\{x,y,z\}) \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z [\delta_y(1 - \delta_x)(1 - \delta_z) - \delta_x \delta_z(1 - \delta_y)], \quad (4)$$

где $W_3(\{x,y,z\})$ – значение весовой системы W_3 из примера 1 на хордовой диаграмме, отвечающей двойным точкам x, y, z .

Далее отметим следующий результат Ланна.

ТЕОРЕМА 3 [1, теорема 4.3.10]. *Для любого нечетного инварианта Васильева третьего порядка со значениями в некоторой абелевой группе имеет место равенство*

$$f(K) = V_3(K)[f(T) + f(H)] - V_2(K)f(H), \quad (5)$$

где T и H – соответственно узлы трилистник и восьмерка (узел 4_1).

ЗАМЕЧАНИЕ. По аналогии с формулами (3) и (4) можно рассмотреть следующую формулу для базисных инвариантов четвертого порядка:

$$\alpha_4^{1,2,3}(K) = \frac{1}{2} \sum_{\{x,y,z,t\} \in P_4} W_4^{1,2,3}(\{x,y,z,t\}) \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z \varepsilon_t [\delta_x \delta_z(1 - \delta_y)(1 - \delta_t) + \delta_y \delta_t(1 - \delta_x)(1 - \delta_z)].$$

Здесь α_4^i не является инвариантом, но при подходящем выборе базисных весовых функций W_4^i и “хорошем” выборе отмеченной точки на каждом узле $\alpha_4^{1,2,3}$ совпадают с $V_4^{1,2,3}$ (см. [3, таблица 5.1]).

5. Диаграммы Гаусса. Сопоставим несингулярному узлу K диаграмму Гаусса следующим образом.

Под *диаграммой Гаусса G пунктированного узла K* будем понимать ориентированную окружность S^1 с отмеченными на ней прообразами начала обхода узла и двойных точек его проекции. Прообразы каждой двойной точки соединены ориентированной хордой (стрелкой), направленной от прообраза прохода к прообразу перехода. При этом каждая стрелка наделяется знаком (*local writh number*) в зависимости от типа перекрестка в двойной точке диаграммы узла, отвечающего этой стрелке. Знак диаграммы определяется как произведение знаков ее стрелок.

Рис. 2

ПРИМЕР 3. Пример гауссовой диаграммы показан на рис. 2.

6. Формулы Виро–Поляка для инвариантов Васильева второго и третьего порядков. Пусть K – некоторый пунктированный узел и G – его диаграмма Гаусса. Зафиксируем A – поддиаграмму G . Обозначим через $\langle A, G \rangle$ сумму знаков всех поддиаграмм G , имеющих комбинаторный тип A . Положим, что для целочисленной формальной линейной комбинации поддиаграмм $\sum_{i=1}^k n_i A_i$ по определению выполняется равенство

$$\left\langle \sum_{i=1}^k n_i A_i, G \right\rangle = \sum_{i=1}^k n_i \langle A_i, G \rangle.$$

ТЕОРЕМА 4 [2, теорема 1]. Если G – диаграмма Гаусса узла K , то

$$v_2(K) = \left\langle \bigcirc \otimes, G \right\rangle,$$

где $v_2(K)$ – базисный целочисленный четный инвариант Васильева второго порядка, который принимает значения 0 на тривиальном узле и 1 на трилистнике.

ТЕОРЕМА 5 [2, теорема 2]. Если G – диаграмма Гаусса узла K , то

$$v_3(K) = \left\langle \frac{1}{2} \left[\bigcirc \otimes \right] + \left[\bigcirc \oplus \right], G \right\rangle,$$

где $v_3(K)$ – базисный нечетный инвариант Васильева третьего порядка, который принимает значения 0 на тривиальном узле и 1 на трилистнике.

Покажем, что базисный целочисленный инвариант Васильева третьего порядка выражается формулой с целыми коэффициентами.

ТЕОРЕМА 6. Пусть v_3 – базисный целочисленный нечетный инвариант Васильева третьего порядка, принимающий значения 0 на тривиальном узле и 1 на трилистнике. Тогда имеет место равенство

$$v_3(K) = \left\langle \bigcirc \otimes + \bigcirc \otimes + \bigcirc \oplus + \bigcirc \oplus + \bigcirc \oplus, G \right\rangle, \quad (6)$$

где правая часть рассматривается в классе пунктированных диаграмм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать независимость правой части при движениях Рейдемейстера и обосновать, что полученный инвариант имеет третий порядок.

Первое движение Рейдемейстера. Добавление (уничтожение) петли при первом движении Рейдемейстера выражается в добавлении (уничтожении) уединенной стрелки в диаграмме Гаусса, что не влияет на количество и знаки поддиаграмм, вносящих вклад в формулу. Переход отмеченной точки через уединенную стрелку также не изменит значение v_3 .

Второе движение Рейдемейстера. На диаграммах Гаусса второе движение Рейдемейстера соответствует добавлению (уничтожению) двух стрелок с разными знаками, между концами и началами которых не начинаются и не заканчиваются другие стрелки:

$$\begin{array}{c} \varepsilon \quad -\varepsilon \\ \bigcirc \end{array} \longleftrightarrow \bigcirc \longleftrightarrow \begin{array}{c} \varepsilon \quad -\varepsilon \\ \bigcirc \otimes \end{array}.$$

Обе стрелки одновременно с какой-либо третьей дают поддиаграмму, не входящую в доказываемую формулу. А количество поддиаграмм, содержащих одну из стрелок, совпадает с количеством поддиаграмм, содержащих другую.

Третье движение Рейдемейстера. В зависимости от порядка и направления прохождения линий возможны две принципиально различные ситуации на диаграммах Гаусса:

а) диаграмма, вносящая вклад в формулу, переходит в диаграмму, не входящую в формулу:

б) обе диаграммы не встречаются в формуле:

Для доказательства достаточно показать независимость формулы при третьем движении Рей-демейстера для случая а).

Рис. 3

При замыкании линий в соответствии с указанным порядком прохождения ветвей (рис. 3) возникнет, по крайней мере, еще одна двойная точка. Можно проверить, что количества существенных поддиаграмм в исходной диаграмме до и после движения находятся в однозначном соответствии и знаки этих поддиаграмм совпадают, т.е. совпадают алгебраические суммы поддиаграмм, входящих в (6). Аналогично рассматривается ситуация с большим числом “новых” двойных точек.

Докажем теперь, что порядок инварианта $v_3(K)$ равен 3.

Пусть K^{sing} – сингулярный узел с двойной точкой x . Значение инварианта f на нем вычисляется по индуктивному правилу (1), которое на языке стрелочно-хордовых диаграмм выглядит следующим образом:

$$\langle A, \bigcirc \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle A, \bigcirc^+ \rangle - \langle A, \bigcirc^- \rangle. \quad (7)$$

Это правило индуктивно распространяется на стрелочно-хордовые диаграммы Гаусса с любым конечным числом хорд без стрелок.

ЛЕММА. Пусть инвариант задан стрелочной диаграммной формулой $\langle A, G \rangle$, в которой поддиаграммы, входящие в A , содержат не более n стрелок. Тогда инвариант $\langle A, G \rangle$ имеет порядок не выше n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K^{sing} – сингулярный узел с $n + 1$ двойными точками и G – его стрелочно-хордовая диаграмма. Покажем, что $\langle A, G \rangle = 0$.

По индуктивному правилу преобразуем стрелочно-хордовую диаграмму G в линейную комбинацию стрелочных (их получится 2^{n+1}). В каждом слагаемом берем поддиаграммы комбинаторного типа A . Сразу все потомки исходных $n + 1$ хорд без стрелок в них входить не могут по условию леммы. Та $(n + 1)$ -я хорда, которая не входит в поддиаграмму, по индуктивному правилу (7) “преобразуется” в две стрелки, а диаграммы, которые ее содержат, имеют противоположные знаки. Таким образом, суммарный вклад этих поддиаграмм равен 0. Отсюда следует, что $\langle A, G \rangle$ имеет порядок не выше n .

В соответствии с этой леммой наш инвариант имеет третий порядок. В силу формулы (5), поскольку $v_3(T) = 1$, $v_3(H) = 0$, наш инвариант совпадает с инвариантом Ланна.

7. Модули Васильева. Модуль Васильева n -го порядка – это модуль над кольцом $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Q}$, порожденный изотопическими классами ориентированных и сингулярных узлов со следующими соотношениями:

- 1) $E = 0$, где E – тривиальный узел;
- 2) соотношение Васильева (1);
- 3) $K_m^{\text{sing}} = 0$, если $m > n$.

ТЕОРЕМА О РАЗЛОЖЕНИИ. *Любой узел K в модуле Васильева n -го порядка ($n > 1$) имеет следующее разложение:*

$$K = \sum_{i=1}^{r+s} v_i(K) K_i,$$

где r – размерность пространства инвариантов Васильева порядка меньшего или равного $n-1$; s – размерность пространства весовых систем порядка n ; v_i – инварианты Васильева порядка меньшего или равного n ; K_i – фиксированные (базисные) узлы.

Примеры разложений: в случае $n = 2$ (Ланн) $K = V_2(K)T$; в случае $n = 3$ см. теорему 3; в случае $n = 4$

$$\begin{aligned} K = & \left[\frac{V_2}{2} + \frac{V_3}{2} - 3V_4^1 + 4V_4^2 + V_4^3 \right] (K)T + \left[\frac{V_2}{2} - \frac{V_3}{2} + V_4^3 \right] (K)T^* \\ & + [-V_4^1 + V_4^2 + 2V_4^3](K)H + [V_4^1 - 3V_4^2](K)F + V_4^2(K)P. \end{aligned}$$

Автор выражает благодарность В.П. Лексину за руководство работой, В.А. Голубевой и Е.Е. Петрову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lannes J. // Enseign. Math. (2). 1993. V. 39. P. 295–316. 2. Polyak M., Viro O. // Internat. Math. Res. Notices. 1994. V. 11. P. 445–453. 3. Васильев В.А. Топология дополнений к дискриминантам. М.: ФАЗИС, 1997.

Коломенский педагогический институт

E-mail: ktti@kolomna.ru

Поступило

20.05.98

Исправленный вариант

14.12.98