Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Игнаточкина, В. Ф. Кириченко, Конформно-инвариантные свойства приближенно келеровых многообразий, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 5, 653–663

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1209>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 06:09:00

УДК 517

КОНФОРМНО-ИНВАРИАНТНЫЕ СВОЙСТВА ПРИБЛИЖЕННО КЕЛЕРОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Л. А. Игнаточкина, В. Ф. Кириченко

Доказано, что у метрики приближенно келеровых многообразий существует два нетривиальных основных конформных инварианта. Доказано, что обращение в нуль одного из них равносильно конформной плоскости многообразия. Получено исчерпывающее описание приближенно келеровых многообразий с нулевым вторым конформным инвариантом. Результаты работы существенно обобщают известные результаты Ватанабэ и Такамацу, касающиеся классификации конформно-плоских приближенно келеровых многообразий.

Библиография: 19 названий.

Изучение конформно-инвариантных свойств римановых многообразий, в том числе и снабженных дополнительной структурой, занимает важное место в современных дифференциально-геометрических исследованиях. Сюда можно отнести, в частности, изучение конформно-инвариантных свойств почти эрмитовых многообразий, начатое в работе Грея и Хервеллы [1]. В этой работе авторы выделили классы почти эрмитовых структур, инвариантные относительно конформных преобразований метрики. Один из таких классов, класс W_4 в классификации Грея–Хервеллы, содержит структуры, локально конформные келеровой структуре и подробно изучавшиеся в работах Вайсмана [2], [3], Грея и Ванхекке [4], В. Ф. Кириченко [5], [6] и других авторов. Эти структуры представляют интерес не только с геометрической, но и с физической точки зрения [7]. Естественным расширением класса W_4 является класс $W_1 \oplus W_4$ в классификации Грея–Хервеллы (класс структур Вайсмана–Грея [8]), содержащий структуры, локально конформные приближенно келеровым структурам (lcN $\mathcal{K}$ -структуры). Однако геометрия этих структур пока изучена недостаточно. Поскольку в конформном классе метрики lcN $\mathcal{K}$ -структуры содержится метрика, которая вместе с почти комплексной структурой многообразия образует приближенно келерову структуру, вопрос об изучении lcN $\mathcal{K}$ -многообразий сводится к вопросу об изучении конформно-инвариантных свойств приближенно келеровых многообразий. Изучению этого вопроса и посвящена настоящая работа. В ней показано, что метрика приближенно келерова многообразия имеет два нетривиальных основных конформных инварианта. Обращение в нуль первого из них равносильно конформной плоскости многообразия. Поэтому наибольший интерес представляет второй инвариант. Получено исчерпывающее описание приближенно келеровых многообразий, для которых этот инвариант обращается в нуль: каждое такое многообразие является либо 2-мерным келеровым многообразием, либо 4-мерным келеровым многообразием нулевой скалярной кривизны, либо риччи-плоским келеровым многообразием размерности выше четырех, либо шестимерным собственным приближенно келеровым многообразием, либо произведением шестимерного собственного

приближенно келерова многообразия и двумерного келерова многообразия постоянной отрицательной кривизны, причем справедливо и обратное.

Пусть M – почти эрмитово многообразие с почти эрмитовой структурой $(J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $J^2 = -\text{id}$, $\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle$, $\dim M = 2n > 2$, $\mathfrak{X}(M)$ – модуль гладких векторных полей на M , ∇ – риманова связность на M , d – оператор внешнего дифференцирования. Все многообразия, тензорные поля и т.п. объекты предполагаются гладкими класса C^∞ . Хорошо известно, что задание почти эрмитовой структуры на M равносильно заданию G -структуры на M со структурной группой $U(n)$, элементами пространства которой являются реперы, состоящие из попарно сопряженных собственных векторов структурного эндоморфизма J и унитарные в естественной эрмитовой метрике комплексификации соответствующего касательного пространства (такие реперы называются *A-реперами*) [9]. Эта G -структура называется *присоединенной*. Будем предполагать, что индексы $i, j, k, \dots$ пробегает значения от 1 до $2n$, а индексы a, b, c, d, f, g, h – значения от 1 до n . Положим $\hat{a} = a + n$. Как обычно, по индексам, заключенным в квадратные (соответственно круглые) скобки, подразумевается альтернирование (соответственно симметризация). Легко проверить, что на пространстве присоединенной G -структуры компоненты тензоров g и J задаются матрицами

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad (J_j^i) = \begin{pmatrix} \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix},$$

где I_n – единичная матрица порядка n .

Напомним [1], [9], что почти эрмитова структура называется *приближенно келеровой*, (короче, $N\mathcal{K}$ -)структурой, если ее фундаментальная форма $\Omega(X, Y) = \langle X, JY \rangle$ является формой Киллинга или, что равносильно,

$$\nabla_X(J)X = 0, \quad X \in \mathfrak{X}(M).$$

Приближенно келерова структура называется *келеровой*, если $\nabla J = 0$, и *собственной* в противном случае. Хорошо известно [9], что структурные уравнения римановой связности приближенно келеровой структуры на пространстве присоединенной G -структуры (называемые *структурными уравнениями приближенно келеровой структуры*) имеют вид:

$$\begin{aligned} 1) \quad d\omega^a &= \omega_b^a \wedge \omega^b + B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c, \\ 2) \quad d\omega_a &= -\omega_a^b \wedge \omega_b + B_{abc}\omega^b \wedge \omega^c, \\ 3) \quad d\omega_b^a &= \omega_c^a \wedge \omega_b^c + (2B^{adh}B_{hbc} + A_{bc}^{ad})\omega^c \wedge \omega_d, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\omega_a = \omega^{\hat{a}}$, $\{B^{abc}\}$, $\{B_{abc}\}$ и $\{A_{bc}^{ad}\}$ – системы функций на пространстве присоединенной G -структуры, служащие компонентами (комплексных) чистых тензоров на M , называемых *структурными тензорами первого, второго и третьего рода*, соответственно. При этом структурные тензоры первого и второго рода кососимметричны, а структурный тензор третьего рода симметричен по любой паре верхних либо нижних индексов [9]. Кроме того, известно, что компоненты структурных тензоров первого и второго рода удовлетворяют тождествам

$$\begin{aligned} 1) \quad dB^{abc} - B^{hbc}\omega_h^a - B^{ahc}\omega_h^b - B^{abh}\omega_h^c &= 0, \\ 2) \quad dB_{abc} + B_{hbc}\omega_a^h + B_{ahc}\omega_b^h + B_{abh}\omega_c^h &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

что равносильно параллельности этих тензоров в присоединенной связности [10], а компоненты структурного тензора третьего рода удовлетворяют тождеству

$$dA_{bc}^{ad} + A_{hc}^{ad}\omega_b^h + A_{bh}^{ad}\omega_c^h - A_{bc}^{hd}\omega_h^a - A_{bc}^{ah}\omega_h^d = A_{bch}^{ad}\omega^h + A_{bc}^{adh}\omega_h, \quad (3)$$

где $\{A_{bc}^{ad}\}$ и $\{A_{bc}^{adh}\}$ – системы функций на пространстве присоединенной G -структуры, симметричных по любой паре верхних либо нижних индексов и служащих компонентами ковариантного дифференциала структурного тензора третьего рода в присоединенной связности. (Напомним, что *присоединенной связностью* (обобщенного) почти эрмитова многообразия называется связность $\bar{\nabla} = \nabla + T$, где T – композиционный тензор присоединенной Q -алгебры [11]). Напомним также [9], что компоненты структурных тензоров удовлетворяют соотношениям комплексной сопряженности

$$\bar{B}^{abc} = B_{abc}, \quad \bar{A}_{bc}^{ad} = A_{ad}^{bc}. \quad (4)$$

Кроме того, согласно [12] имеет место тождество

$$A_{af}^{ac}B_{gdc} - A_{ag}^{ac}B_{fdc} = 4B^{ahc}B_{ahd}B_{gfc}. \quad (5)$$

Примем для удобства следующие обозначения:

$$B_{bc}^{ad} = B^{adh}B_{hbc}, \quad B_b^a = B_{bc}^{ac}, \quad A_b^a = A_{bc}^{ac}, \quad A_c^{ab} = A_{hc}^{hab}, \quad A_{ab}^c = A_{hab}^{hc}.$$

ЛЕММА 1. Пусть M – $N\mathcal{H}$ -многообразие. Тогда $B = B_h^h$ – неотрицательная константа. При этом $B = 0$ тогда и только тогда, когда M – келерово многообразие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению и (4)

$$B = B^{abc}B_{abc} = \sum_{abc} |B_{abc}|^2 \geq 0, \quad \text{причем } B = 0 \iff B_{abc} = B^{abc} = 0.$$

Остается напомнить, что структурные тензоры первого и второго рода $N\mathcal{H}$ -многообразия – нулевые тогда и только тогда, когда это многообразие является келеровым [13]. Наконец, дифференцируя тождество $B^{abc}B_{abc} = B$ внешним образом, с учетом (2) получаем, что $dB = 0$, и значит, $B = \text{const}$.

Пусть R , r и $\varkappa$ – тензор Римана–Кристоффеля, тензор Риччи и скалярная кривизна метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle$ $N\mathcal{H}$ -многообразия M соответственно. С учетом (1) нетрудно вычислить выражение компонент тензора R на пространстве присоединенной G -структуры (т.е. в A -репере):

$$R_{\hat{a}bcd} = B_{bc}^{ad} + A_{bc}^{ad}, \quad R_{\hat{a}\hat{b}cd} = -2B_{cd}^{ab}, \quad (6)$$

плюс соотношения, полученные с учетом классических свойств симметрии этого тензора. Остальные его компоненты равны нулю. С учетом этих соотношений нетрудно найти выражение компонент тензора r и скалярной кривизны $\varkappa$ многообразия M в A -репере:

$$1) \ r_{\hat{a}b} = r_{b\hat{a}} = 3B_b^a - A_b^a, \quad 2) \ r_{ab} = r_{\hat{a}\hat{b}} = 0, \quad 3) \ \varkappa = 6B - 2A_c^c. \quad (7)$$

Теперь нетрудно найти выражение компонент основного конформного инварианта риманова многообразия – тензора Вейля C конформной кривизны. Этот тензор канонически

представляется в виде суммы восьми элементов своего спектра, т.е. тензоров того же типа $(3, 1)$, комплексно линейных либо комплексно антилинейных по различным аргументам [11]. В силу конформной инвариантности структурного эндоморфизма J эти тензоры также конформно инвариантны, и их совокупность образует систему основных конформных инвариантов почти эрмитова многообразия. Покажем, что $N\mathcal{H}$ -многообразие имеет не более двух (с точностью до свойств симметрии тензора Вейля) ненулевых основных конформных инварианта. Напомним [14], что тензор C многообразия M^{2n} определяется формулой

$$C_{ijkl} = R_{ijkl} + \frac{1}{2(n-1)}(r_{ik}g_{jl} + r_{jl}g_{ik} - r_{il}g_{jk} - r_{jk}g_{il}) + \frac{\varkappa(g_{jk}g_{il} - g_{jl}g_{ik})}{(2n-1)(2n-2)}.$$

С учетом (6) находим, что на пространстве присоединенной G -структуры эти соотношения принимают вид:

$$\begin{aligned} 1) \quad C_{\hat{a}bcd} &= B_{bc}^{ad} + A_{bc}^{ad} - \frac{1}{2(n-1)}(r_c^a \delta_b^d + r_b^d \delta_c^a) + \frac{\varkappa}{(2n-1)(2n-2)}\delta_c^a \delta_b^d, \\ 2) \quad C_{\hat{a}\hat{b}cd} &= -2B_{cd}^{ab} + \frac{2}{n-1}r_{[c}^{[a} \delta_{d]}^{b]} - \frac{\varkappa}{(2n-1)(2n-2)}\delta_{cd}^{ab} \end{aligned} \quad (8)$$

(где $\delta_{cd}^{ab} = \delta_c^a \delta_d^b - \delta_d^a \delta_c^b$), плюс соотношения, полученные с учетом классических свойств симметрии этого тензора, аналогичных свойствам симметрии тензора R . Именно эти выражения (и им сопряженные) и задают компоненты основных конформных инвариантов $N\mathcal{H}$ -многообразия.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Очевидно, остальные компоненты тензора Вейля, а значит, и остальные основные конформные инварианты $N\mathcal{H}$ -многообразия равны нулю.

Исследуем геометрический смысл обращения в нуль основных конформных инвариантов.

В силу тождества Риччи (верного, как хорошо известно, и для тензора Вейля) обращение в нуль инварианта $\mathcal{C}_1 = \{C_{\hat{a}bcd}\}$ влечет обращение в нуль инварианта $\mathcal{C}_2 = \{C_{\hat{a}\hat{b}cd}\}$ и, следовательно, обращение в нуль тензора Вейля, т.е. конформную плоскость многообразия. Поэтому самостоятельный интерес имеет рассмотрение именно инварианта $\mathcal{C}_2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Конформный инвариант $\mathcal{C}_2$ вычисляется по формуле

$$\mathcal{C}_2(X, Y)Z = \frac{1}{2}(C(X, Y)Z - C(JX, JY)Z), \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом замечания 1 имеем:

$$(C(X, Y)Z)^a = C^a{}_{ijk}X^jY^kZ^i = C_{\hat{a}\hat{b}cd}X^cY^dZ^{\hat{b}} + C_{\hat{a}bcd}X^cY^dZ^b + C_{\hat{a}bcd}X^cY^dZ^{\hat{b}}.$$

Проводя аналогичное вычисление для тензора $C(JX, JY)Z$ с учетом того, что в A -перепере справедливы соотношения $J_b^a = i\delta_b^a$, $J_{\hat{b}}^{\hat{a}} = -i\delta_{\hat{b}}^{\hat{a}}$, и почленно вычитая найденные выражения, получим, что

$$(C(X, Y)Z - C(JX, JY)Z)^a = 2C_{\hat{a}\hat{b}cd}X^cY^dZ^{\hat{b}}.$$

Таким образом, функции $C_{\hat{a}\hat{b}cd}$ и им комплексно сопряженные являются компонентами тензора $\frac{1}{2}(C(X, Y)Z - C(JX, JY)Z)$, а следовательно, этот тензор совпадает с тензором $\mathcal{C}_2(X, Y)Z$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Приближенно келерово многообразие, для которого $\mathcal{C}_2 = 0$, назовем $\mathcal{N}\mathcal{K}$ -многообразием класса $\mathcal{C}_2$ или *конформно-паракелеровым* многообразием. В силу предложения 1, такое $\mathcal{N}\mathcal{K}$ -многообразие определяется тождеством

$$C(JX, JY)Z = C(X, Y)Z, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Пусть M – конформно-паракелерово многообразие. В силу 2) из (8) это равносильно тому, что

$$B_{cd}^{ab} = \frac{1}{4(n-1)}(r_c^a \delta_d^b + r_d^b \delta_c^a - r_d^a \delta_c^b - r_c^b \delta_d^a) - \frac{\varkappa}{2(2n-1)(2n-2)} \delta_{cd}^{ab}. \quad (10)$$

Сворачивая это соотношение сначала по индексам b и d , а затем по индексам a и c , получим, что

$$B = \frac{n-1}{4(2n-1)} \varkappa. \quad (11)$$

С учетом леммы 1 получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. *Конформно-паракелерово многообразие M является римановым многообразием постоянной неотрицательной скалярной кривизны. При этом его скалярная кривизна равна нулю тогда и только тогда, когда M – келерово многообразие.*

Найдем теперь аналитический критерий принадлежности $\mathcal{N}\mathcal{K}$ -многообразия M классу $\mathcal{C}_2$ в терминах структурных тензоров.

ТЕОРЕМА 2. *Приближенно келерово многообразие M размерности выше четырех является конформно-паракелеровым тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G -структуры*

$$1) \quad B_{bc}^{ad} = t_{[b}^{[a} \delta_{c]}^d], \quad 2) \quad r_b^a = \frac{4(n-1)}{n-2} B_b^a - \frac{2}{(n-1)(n-2)} B \delta_b^a, \quad (12)$$

где t – подходящий тензор типа $(1, 1)$ на M , причем с необходимостью

$$t_b^a = \frac{4}{n-2} B_b^a - \frac{2}{(n-1)(n-2)} B \delta_b^a. \quad (13)$$

Для такого многообразия

$$A_b^a = -\frac{n+2}{n-2} B_b^a + \frac{2}{(n-1)(n-2)} B \delta_b^a. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – конформно-паракелерово многообразие размерности выше четырех. Сворачивая (10) по индексам b и d , выразим отсюда r_c^a :

$$r_c^a = \frac{4(n-1)}{n-2} B_c^a - \frac{1}{2(n-2)(2n-1)} \varkappa \delta_c^a.$$

С учетом (11) отсюда получается 2) из (12). Подставляя его и (11) в (10), получим, что

$$B_{cd}^{ab} = \frac{4}{n-2} B_{[c}^{[a} \delta_{d]}^b] - \frac{1}{(n-1)(n-2)} B \delta_{cd}^{ab}.$$

Очевидно, это соотношение можно записать в форме (12), приняв за t_b^a выражение (13). Более того, последовательно свертывая 1) из (12) сначала по индексам a и c , а потом по индексам b и d , легко получить, что (13) с необходимостью следует из (12). Наконец, (14) непосредственно следует из (7) и (12).

Обратно, пусть M – $N\mathcal{K}$ -многообразии размерности выше четырех, на котором выполняются тождества (12). Как уже отмечалось, (13) с необходимостью следует из (12). Кроме того, сворачивая 2) из (12), получим соотношение (11). Теперь непосредственная проверка показывает, что (10) выполняется тождественно в силу (11), (12) и (13). Следовательно, M – конформно-паракелерово многообразие.

СЛЕДСТВИЕ. *Келерово многообразие размерности выше четырех конформно-паракелерово тогда и только тогда, когда оно риччи-плоско.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, для келеровых многообразий соотношение 1) из (12) выполняется тождественно. Соотношение же 2) из (12) для них принимает вид $r_b^a = 0$, что ввиду (7) равносильно тому, что многообразие риччи-плоско.

ТЕОРЕМА 3. *Четырехмерное приближенно келерово многообразие M является конформно-паракелеровым тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих равносильных условий:*

$$1) \quad A_c^c = 0, \quad 2) \quad \varkappa = 0. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, структурные тензоры четырехмерного $N\mathcal{K}$ -многообразия в силу своей кососимметричности нулевые и в силу леммы 1 такое многообразие – келерово. Но тогда с учетом (7) $r_c^a = -A_c^a$, в силу чего (а также в силу леммы 1) соотношение (10), равносильное обращению в нуль инварианта $\mathcal{C}_2$, примет вид:

$$A_c^a \delta_b^d + A_b^d \delta_c^a - A_b^a \delta_c^d - A_c^d \delta_b^a = 0.$$

Поскольку все индексы в этом соотношении пробегают лишь два значения, непосредственная проверка показывает, что оно равносильно условию 1) из (15). С другой стороны, соотношение 3) из (7) показывает, что в случае келерова многообразия соотношения 1) и 2) из (15) равносильны.

С учетом теоремы 4 в [15] немедленно получаем

СЛЕДСТВИЕ. *Четырехмерное келерово многообразие является конформно-паракелеровым тогда и только тогда, когда оно антиавтотуально.*

Пусть M – конформно-плоское $N\mathcal{K}$ -многообразие. Как уже отмечалось, это равносильно обращению в нуль инварианта $\mathcal{C}_1$, что в силу 1) из (8) равносильно соотношению

$$B_{bc}^{ad} + A_{bc}^{ad} = \frac{1}{2(n-1)}(r_c^a \delta_b^d + r_b^d \delta_c^a) + \frac{\varkappa}{(2n-1)(2n-2)} \delta_c^a \delta_b^d.$$

Альтернируя и симметризуя это соотношение по индексам a и d , получим соответственно:

$$\begin{aligned} B_{bc}^{ad} &= \frac{1}{n-1} r_{[b}^{[a} \delta_{c]}^{d]} - \frac{\varkappa}{2(2n-1)(2n-2)} \delta_{bc}^{ad}, \\ A_{bc}^{ad} &= -\frac{1}{n-1} r_{(b}^{(a} \delta_{c)}^{d)} + \frac{\varkappa}{2(2n-1)(2n-2)} \tilde{\delta}_{bc}^{ad}, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\tilde{\delta}_{bc}^{ad} = \delta_b^a \delta_c^d + \delta_c^a \delta_b^d$. Далее, рассуждая так же, как и при доказательстве теорем 2 и 3, получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 4. *Приближенно келерово многообразие M размерности свыше четырех является конформно-плоским тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G -структуры*

$$B_{bc}^{ad} = t \begin{bmatrix} a & d \\ b & c \end{bmatrix}, \quad A_{bc}^{ad} = -t \begin{bmatrix} a & d \\ b & c \end{bmatrix},$$

где t – подходящий тензор типа $(1, 1)$ на M , причем с необходимостью

$$t_b^a = \frac{4}{n-2} B_b^a - \frac{2}{(n-1)(n-2)} B \delta_b^a.$$

СЛЕДСТВИЕ. *Конформно-плоское келерово многообразие размерности свыше четырех локально голоморфно изометрично многообразию $\mathbb{C}^n$, снабженному канонической келеровой структурой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это непосредственно следует из того, что в силу теоремы 4 для такого многообразия $A_{bc}^{ad} = 0$, а в силу соотношений (6) такое многообразие локально плоско, в частности, является комплексной пространственной формой нулевой голоморфной секционной кривизны, а значит, локально голоморфно изометрично $\mathbb{C}^n$.

ТЕОРЕМА 5. *Четырехмерное приближенно келерово многообразие является конформно-плоским тогда и только тогда, когда*

$$A_{bc}^{ad} = \frac{1}{2} (A_c^a \delta_b^d + A_b^d \delta_c^a).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – 4-мерное конформно-плоское келерово многообразие. В силу теоремы 1 его скалярная кривизна равна нулю, а в силу соотношений (7) имеем: $r_b^a = -A_b^a$. Поэтому соотношения (16) примут вид:

$$1) \quad A_c^a \delta_b^d + A_b^d \delta_c^a - A_b^a \delta_c^d - A_c^d \delta_b^a = 0, \quad (17a)$$

$$2) \quad A_{bc}^{ad} = \frac{1}{4} (A_c^a \delta_b^d + A_b^d \delta_c^a + A_b^a \delta_c^d + A_c^d \delta_b^a). \quad (17b)$$

Подставляя (17a) в (17b), получим, что $A_{bc}^{ad} = \frac{1}{2} (A_c^a \delta_b^d + A_b^d \delta_c^a)$. Обратно, пусть для 4-мерного келерова многообразия M имеет место это соотношение. Свертывая его по индексам d и b , получим, что $A_c^c = 0$ и в силу (7), $\kappa = 0$. С другой стороны, в силу свойств симметрии третьего структурного тензора это соотношение влечет (17a), а значит, и (17b). Следовательно, многообразие M конформно-плоско.

Вернемся к рассмотрению конформно-паракелеровых $N\mathcal{K}$ -многообразий.

ТЕОРЕМА 6. *Приближенно келерово многообразие M конформно-паракелерово тогда и только тогда, когда оно является многообразием одного из следующих классов:*

- 1) *риччи-плоским келеровым многообразием размерности свыше четырех;*
- 2) *4-мерным келеровым многообразием нулевой скалярной кривизны;*
- 3) *2-мерным келеровым многообразием;*
- 4) *6-мерным собственным приближенно келеровым многообразием;*
- 5) *многообразием, локально голоморфно изометричным произведению 6-мерного собственного приближенно келерова многообразия и 2-мерного келерова многообразия постоянной отрицательной кривизны $-\frac{1}{3}B$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если M – келерово многообразие размерности выше четырех, утверждение теоремы совпадает со следствием теоремы 2. Если M – 4-мерное келерово многообразие, утверждение теоремы совпадает с утверждением теоремы 3. Если M – двумерное келерово многообразие, то хорошо известно, что оно (локально) конформно-плоско, что выражается в существовании на нем атласа, состоящего из изотермических координатных карт. В частности, такое многообразие конформно-паракелерово. Таким образом, теорема справедлива в случае келеровых многообразий.

Пусть теперь M – собственное $N\mathcal{K}$ -многообразие (с необходимостью размерности выше четырех). Заметим, что эндоморфизм $\mathfrak{b}$, задаваемый в A -репере матрицей (B_b^a) , эрмитово-симметричен в силу (4) и, значит, диагонализуем в подходящем A -репере, т.е. в этом репере

$$B_b^a = B_b \delta_b^a, \quad (18)$$

где $\{B_a\}$ – собственные значения этого эндоморфизма. Более того, эрмитова форма $\mathfrak{B}(X, Y) = B_b^a X^b Y_a$, отвечающая этому эндоморфизму, положительно полуопределена, поскольку

$$\mathfrak{B}(X, X) = B_b^a X^b X_a = B^{cda} B_{cdb} X^b X_a = \sum_{c,d} |B_{cda} X^a|^2 \geq 0.$$

Следовательно, $B_a \geq 0$, $a = 1, \dots, n$. Если M – конформно-паракелерово многообразие, то подставляя (14) и (18) в (5), получим, что

$$\left(\frac{n+2}{n-2} (B_g + B_f) - 4B_d - \frac{4}{(n-1)(n-2)} B \right) B_{fdg} = 0. \quad (19)$$

Поскольку M – собственное $N\mathcal{K}$ -многообразие, его структурные тензоры первого и второго рода ненулевые, и значит, существует тройка индексов f, d и g такая, что $B_{fdg} \neq 0$. Для нее соотношение (19) можно записать в виде системы

$$\begin{aligned} (n+2)(B_g + B_f) - 4(n-2)B_d &= \frac{4}{n-1} B, \\ (n+2)(B_d + B_g) - 4(n-2)B_f &= \frac{4}{n-1} B, \\ (n+2)(B_f + B_d) - 4(n-2)B_g &= \frac{4}{n-1} B. \end{aligned}$$

Поскольку эта система имеет ненулевой детерминант, система имеет единственное решение, и так как неизвестные B_d, B_f и B_g входят в систему симметрично, $B_d = B_f = B_g$, и в силу уравнений системы

$$(6-n)B_d = \frac{2}{n-1} B. \quad (20)$$

Выражение в правой части этого тождества положительно, а значит, оно положительно и в его левой части и в силу сделанного выше замечания $6-n > 0$, т.е. $n < 6$. С другой стороны, поскольку M – собственное $N\mathcal{K}$ -многообразие, $n > 2$, и значит, $n = 3$ либо $n = 4$, либо $n = 5$. Заметим, что третий случай невозможен, поскольку в нем (20) принимает вид $2B_d = B$, что противоречит тому, что $B = \sum_{d=1}^n B_d \geq 3B_d$. Далее, в первом случае M – 6-мерное собственное $N\mathcal{K}$ -многообразие. Во втором случае согласно [16] M локально голоморфно изометрично произведению 6-мерного собственного $N\mathcal{K}$ -многообразия M_1 на двумерное келерово многообразие M_2 . Тогда модуль $\mathfrak{X}(M)$

распадается в прямую сумму распределений $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$ размерностей 6 и 2 соответственно, инвариантных относительно структурного эндоморфизма и параллельных в римановой связности. Интегральные многообразия этих распределений локально голоморфно изометричны многообразиям M_1 и M_2 соответственно [16]. Рассмотрим редукцию присоединенной G -структуры по подгруппе $U(3) \times U(1)$, тотальное пространство которой состоит из A -реперов, адаптированных указанному разложению модуля $\mathfrak{X}(M)$. В силу (14) в таком A -репере $A_4^4 = (1/3)B\delta_4^4$ и в силу (6)

$$R_{4444} = -A_{44}^{44} = -A_{4c}^{4c} = -A_4^4 = -\frac{1}{3}B = -\frac{1}{3}B(g_{44}g_{44} - g_{44}g_{44}).$$

Это означает, что M_2 – многообразие постоянной отрицательной кривизны $k = -B/3$.

Обратно, если собственное $N\mathcal{K}$ -многообразие M шестимерно, то оно является $N\mathcal{K}$ -многообразием ненулевого постоянного типа $B/6$ и, следовательно, $B_{bc}^{ad} = (B/6)\delta_{bc}^{ad}$ (см. [13]). Но тогда $B_b^a = (1/3)B\delta_b^a$ и в силу (13) $t_b^a = (1/3)B\delta_b^a$, а в силу формулы (12) в [13] $A_b^a = -2B_b^a/3$. Наконец, в силу (7) $r_b^a = (5/3)B\delta_b^a$, откуда следует, что соотношения (12) выполняются тождественно, и значит, M – конформно-паракелерово многообразие.

Пусть, наконец, собственное $N\mathcal{K}$ -многообразие M восьмимерно. Как уже упоминалось, в этом случае согласно [16] M локально голоморфно изометрично произведению 6-мерного собственного $N\mathcal{K}$ -многообразия M_1 на двумерное келерово многообразие M_2 . Как и выше, ограничимся рассмотрением A -реперов такого многообразия, адаптированных разложению $\mathfrak{X}(M) = \mathfrak{D}_1 \oplus \mathfrak{D}_2$ в принятых выше обозначениях. Пусть греческие индексы пробегает значения от 1 до 3. Тогда, как и выше,

$$B_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} = \frac{1}{6}B\delta_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}, \quad B_{\beta}^{\alpha} = \frac{1}{3}B\delta_{\beta}^{\alpha}, \quad B_4^4 = 0$$

и для тензора t , построенного согласно (13), имеем:

$$t_{\beta}^{\alpha} = \frac{1}{3}B\delta_{\beta}^{\alpha}, \quad t_4^4 = -\frac{1}{3}B.$$

Кроме того, согласно формуле (12) в [13] $A_{\beta}^{\alpha} = -(2/3)B\delta_{\beta}^{\alpha}$. Наконец, по предположению M_2 – многообразие постоянной кривизны $k = -B/3$ и в силу (6)

$$A_4^4 = A_{4c}^{4c} = A_{44}^{44} = -R_{4444} = \frac{1}{3}B(g_{44}g_{44} - g_{44}g_{44}) = \frac{1}{3}B.$$

Согласно (7) $r_{\beta}^{\alpha} = (5/3)B\delta_{\beta}^{\alpha}$, $r_4^4 = -(1/3)B$. Теперь справедливость соотношений (12) для M проверяется непосредственно. Следовательно, M – конформно-паракелерово многообразие.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Легко видеть, что эндоморфизм $\mathfrak{b}$ определен внутренним образом как сужение комплексификации K -оператора $\mathfrak{k}$ присоединенной K -алгебры на собственные распределения структурного эндоморфизма J (см. [17]).

В заключение покажем, как, используя теорему 6, несложно получить полную классификацию конформно-плоских $N\mathcal{K}$ -многообразий.

ТЕОРЕМА 7. *Приближенно келерово многообразие M конформно-плоско тогда и только тогда, когда оно локально голоморфно изометрично одному из следующих многообразий:*

- 1) *комплексному евклидову пространству $\mathbb{C}^n$;*
 - 2) *многообразию $S_k^2 \times S_{-k}^2$, $k > 0$;*
 - 3) *2-мерному келерову многообразию;*
 - 4) *многообразию S_k^6 , $k > 0$;*
 - 5) *многообразию $S_k^6 \times S_{-k}^2$, $k > 0$, снабженных канонической $N\mathcal{H}$ -структурой.*
- Здесь символ S_k^m обозначает m -мерное пространство постоянной кривизны k .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – конформно-плоское $N\mathcal{H}$ -многообразие. Тогда оно, в частности, конформно-паракелерово, и следовательно, к нему применима теорема 6. Если M – келерово многообразие размерности свыше четырех, утверждение теоремы 7 вытекает из следствия к теореме 4. Если M – конформно-плоское четырехмерное келерово многообразие, то оно, в частности, является автодуальным многообразием постоянной (нулевой) скалярной кривизны и согласно теореме 3 в [15] M локально голоморфно изометрично многообразию вида $S_k^2 \times S_{-k}^2$. Если M – двумерное келерово многообразие, то, как уже упоминалось, оно всегда конформно-плоско. Если M – шестимерное собственное $N\mathcal{H}$ -многообразие, то согласно теореме 3 в [13] оно является многообразием Эйнштейна с космологической константой $\varepsilon = 5B/3$ и, значит,

$$0 \equiv C_{ijkl} = R_{ijkl} + \frac{1}{3}B(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}),$$

т.е. M – многообразие постоянной кривизны $B/3$, в частности, $N\mathcal{H}$ -многообразие постоянной голоморфной кривизны, и в силу [12] локально голоморфно изометрично многообразию вида S_k^6 , $k > 0$. Наконец, если M – конформно-плоское восьмимерное собственное $N\mathcal{H}$ -многообразие, то его шестимерная составляющая, очевидно, также конформно-плоская и по доказанному локально голоморфно изометрична многообразию вида S_k^6 , $k > 0$, где $k = B/3$. В то же время, согласно теореме 6 его двумерная составляющая локально голоморфно изометрична многообразию вида S_{-k}^2 .

Обратно, как хорошо известно [18], многообразия каждого из пяти типов, перечисленных в теореме 7, конформно плоски.

Заметим, что результат, полученный в теореме 7, из совершенно других соображений был получен Ватанабэ и Такамацу [19]. Таким образом, теорему 6 можно рассматривать как существенное обобщение результатов этих авторов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Gray A., Hervella L. M. The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants // Ann. Math. Pure Appl. 1980. V. 123. P. 35–58.
- [2] Vaisman I. On locally and globally conformal Kähler manifold // Trans. Amer. Math. Soc. 1980. V. 262. P. 533–542.
- [3] Vaisman I. Some curvature properties of locally conformal Kähler manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1980. V. 259. P. 439–447.
- [4] Gray A., Vanhecke L. Almost Hermitian manifolds with constant holomorphic sectional curvature // Cas. Pestov. Mat. 1979. V. 104. P. 170–179.
- [5] Кириченко В. Ф. Локально конформно-келеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 3. С. 354–363.
- [6] Кириченко В. Ф. Конформно плоские локально конформно-келеровы многообразия // Матем. заметки. 1992. Т. 51. № 5. С. 57–66.

- [7] Janus S., Visinescu M. Kaluza–Klein theory with scalar fields on generalized Hopf manifolds // *Clas. Quantum Grav.* 1987. V. 4. P. 1317–1325.
- [8] Кириченко В. Ф., Ежова Н. А. Конформные инварианты многообразий Вайсмана–Грея // *УМН.* 1996. Т. 51. № 2. С. 163–164.
- [9] Кириченко В. Ф. Дифференциальная геометрия K -пространств. // *Итоги науки и техн.* Т. 8. Проблемы геометрии. М.: ВИНТИ АН СССР, 1977. С. 139–161.
- [10] Кириченко В. Ф. K -пространства максимального ранга // *Матем. заметки.* 1977. Т. 22. № 3. С. 465–476.
- [11] Кириченко В. Ф. Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // *Итоги науки и техники. Проблемы геометрии.* Т. 18. М.: ВИНТИ АН СССР, 1986. С. 25–72.
- [12] Кириченко В. Ф. K -пространства постоянной голоморфной секционной кривизны // *Матем. заметки.* 1976. Т. 19. № 6. С. 805–814.
- [13] Кириченко В. Ф. K -пространства постоянного типа // *Сиб. матем. ж.* 1976. Т. 17. № 2. С. 282–289.
- [14] Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1976.
- [15] Арсеньева О. Е. Автодуальная геометрия обобщенных келеровых многообразий // *Матем. сб.* 1993. Т. 184. № 2. С. 137–148.
- [16] Кириченко В. Ф. Голоморфные подмногообразия обобщенных приближенно келеровых многообразий // *Изв. ВУЗов. Матем.* 1986. № 1. С. 43–48.
- [17] Kirichenko V. F. Generalized quasi-Kaehlerian manifolds and axioms of CR -submanifolds in generalized Hermitian geometry, II // *Geom. Dedicata.* 1994. V. 51. P. 53–85.
- [18] Бесце А. Многообразия Эйнштейна. 1, 2. М.: Мир, 1990.
- [19] Takamatsu K., Watanabe Y. Classification of a conformally flat K -space // *Tôhoku Math. J.* 1972. V. 24. P. 435–440.

Московский педагогический государственный университет

Поступило

06.02.1998

Исправленный вариант

05.01.1999