Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Степанов, Новый сильный лапласиан на дифференциальных формах, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 3, 452–458

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm121>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 11:40:24

УДК 514.76

НОВЫЙ СИЛЬНЫЙ ЛАПЛАСИАН НА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМАХ

С. Е. Степанов

Строится сильный лапласиан D^*D на основе третьего оператора базиса $\{d, d^*, D\}$ пространства естественных операторов первого порядка, действующих на дифференциальных формах риманова многообразия (M, g) . Изучаются свойства лапласиана D^*D . Получена формула Вейценбёка, связывающая три сильных лапласиана dd^* , d^*d и D^*D с кривизной многообразия (M, g) .

Библиография: 16 названий.

1. Введение и основные результаты

1.1. Пусть $\wedge^p M$ – расслоение дифференциальных p -форм над n -мерным римановым многообразием (M, g) и $1 \leq p \leq n - 1$.

Среди всех лапласианов (см. [1, с. 77]), действующих на пространстве $C^\infty \wedge^p M$, выделяется семейство *сильных* или, по другой терминологии, *грубых лапласианов*, представляющих собою выпуклые комбинации операторов вида $A^* \circ A$, где A – естественный дифференциальный оператор первого порядка (см. [2] и [3]) на пространстве $C^\infty \wedge^p M$ и A^* – ему формально сопряженный (см. [1, с. 53] и [4, с. 69–74]). Примером является (см. [1, с. 77]) лапласиан $\nabla^* \circ \nabla$, где ∇ – связность Леви–Чивита, являющаяся (см. [5] и [6, с. 261]) единственной естественной римановой связностью на (M, g) .

Основное свойство операторов данного семейства состоит в следующем: разность любых двух из них естественным образом выражается через кривизну риманова многообразия (M, g) . Поэтому только сильные лапласианы сравниваются в формулах Вейценбёка (см. [1, с. 77–83], [7]–[9]). В результате задача определения всех сильных лапласианов приобретает практическое значение. Решение же ее сводится к исследованию естественных дифференциальных операторов первого порядка на $C^\infty \wedge^p M$.

1.2. В ставшей уже классической монографии [6] было доказано (см. [6, с. 264–265]) существование базиса $\{d, d^*, D\}$ в пространстве естественных дифференциальных операторов первого порядка, действующих на $C^\infty \wedge^p M$, со значениями в пространстве однородных тензоров. Здесь $d: C^\infty \wedge^p M \rightarrow C^\infty \wedge^{p+1} M$ – оператор внешнего дифференцирования, доказательство естественности которого один из самых старых результатов теории (см. [10]), $d^*: C^\infty \wedge^p M \rightarrow C^\infty \wedge^{p-1} M$ – формально сопряженный к d оператор кодифференцирования и, наконец, D – оператор, про который было лишь сказано

(см. [6, с. 265]): “Помимо случая $p = 1$ он не имеет простой геометрической интерпретации”. И далее для случая $p = 1$ уточнялось (см. [6, с. 274]): “Ядро оператора состоит из инфинитезимальных конформных преобразований”.

Из первых двух базисных операторов строится известный лапласиан Ходжа $\Delta = d \circ d^* + d^* \circ d$, ядро которого на замкнутом многообразии (M, g) составляют гармонические формы (см., например, [7, с. 43, 61]). Последние образуют подпространство $\mathbf{H}^p(M, \mathbb{R})$ векторного пространства $\Omega^p(M, \mathbb{R})$ дифференциальных p -форм на (M, g) . При этом сильные лапласианы Δ и $\nabla^* \circ \nabla$ связаны классической формулой Вейценбёка, являющейся основным инструментом изучения гармонических форм (см. [7, с. 52] и [11, с. 393–397]).

1.3. В статье [12] нами был найден третий базисный оператор D и доказано, что его ядро составляют конформно-киллинговы p -формы, образующие подпространство $\mathbf{T}^p(M, \mathbb{R})$ векторного пространства $\Omega(M, \mathbb{R})$. Эти формы были введены в [13] как обобщение инфинитезимальных конформных преобразований за десять лет до известной монографии [6].

В [12], [14] и [15] с помощью трех операторов базиса $\{d, d^*, D\}$ была проведена классификация сечений расслоения $\wedge^p M$, когда к одному классу относились дифференциальные p -формы, принадлежащие ядрам одного, двух или сразу трех операторов.

Так, например, доказано, что киллинговы p -формы (см. [7, с. 55]), которые являются обобщением инфинитезимальных изометрических преобразований и образуют подпространство $\mathbf{K}^p(M, \mathbb{R})$ пространства $\Omega^p(M, \mathbb{R})$, выделяются условием $\omega \in \ker D \cap \ker d^*$. В свою очередь, плоские p -формы (см., например [16]), которые являются обобщением инфинитезимальных конциркулярных преобразований и образуют подпространство $\mathbf{P}^p(M, \mathbb{R})$ пространства $\Omega^p(M, \mathbb{R})$, выделяются условием $\omega \in \ker D \cap \ker d$. При этом на многообразии (M, g) постоянной ненулевой секционной кривизны (см. [15])

$$\ker D = \ker D \cap \ker d^* \oplus \ker D \cap \ker d.$$

Так же в статьях [12], [14] и [15] получены интегральные формулы как на замкнутом, так и компактном с краем ∂M римановых многообразиях (M, g) , которые связали базисные операторы d, d^* и D с кривизной многообразий.

1.4. В настоящей работе будет определен сопряженный к D оператор D^* и доказана следующая

ТЕОРЕМА 1. *Сильный лапласиан D^*D , ассоциированный с третьим оператором базиса $\{d, d^*, D\}$ пространства естественных дифференциальных операторов первого порядка, действующих на пространстве сечений $C^\infty \wedge^p M$ расслоения $\wedge^p M$ дифференциальных p -форм над n -мерным римановым многообразием (M, g) , имеет вид*

$$D^* \circ D = p(p+1)^{-1}(\nabla^* \circ \nabla - (p+1)^{-1}d^* \circ d - (n-p+1)^{-1}d \circ d^*) \quad (1.1)$$

для $1 \leq p \leq n-1$ и удовлетворяет формуле Вейценбека

$$\langle F(\omega), \omega \rangle + \langle D^*D\omega, \omega \rangle = p(p+1)^{-1}\langle d^*d\omega, \omega \rangle + (n-p)(n-p+1)^{-1}\langle dd^*\omega, \omega \rangle, \quad (1.2)$$

где

$$F(\omega)(X_1, \dots, X_p) = \sum_{a=1}^p \text{Ric}(e_j, X_a) \omega(X_1, \dots, X_{a-1}, e_j, X_{a+1}, \dots, X_p) \\ - \sum_{\substack{1, \dots, p \\ a < b}} R(e_j, e_k, X_a, X_b) \omega(X_1, \dots, X_{a-1}, e_j, X_{a+1}, \dots, X_{b-1}, e_k, X_{b+1}, \dots, X_p),$$

для произвольных: $\omega \in C^\infty \wedge^p M$, $X_1, \dots, X_p \in C^\infty TM$, ортонормированного базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$, а также тензоров кривизны R и Риччи Ric многообразия (M, g) .

Дальнейшие усилия будут направлены на изучение свойств сильного лапласиана D^*D ; их результатом будет следующая

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы на n -мерном замкнутом ориентированном римановом многообразии (M, g) форма $\omega \in \mathbf{T}^p(M, \mathbb{R})$, необходимо и достаточно, чтобы*

- 1) для $1 \leq p \leq n-1$ форма $\omega \in \ker(D^* \circ D)$;
- 2) для $n = 2p$ форма $\omega \in \ker(\Delta - (p+1)\nabla^* \circ \nabla)$;
- 3) для $n = 2p$ действие сильного лапласиана $\nabla^* \circ \nabla$ на форме ω определяется равенством $\nabla^* \nabla \omega = p^{-1}F(\omega)$.

При этом для киллинговых и плоских форм будут справедливы следующие утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для того чтобы на замкнутом ориентированном римановом многообразии (M, g) форма $\omega \in \mathbf{K}^p(M, \mathbb{R})$, необходимо и достаточно выполнения одного из следующих трех условий:*

- 1) $\omega \in \ker(D^* \circ D) \cap \ker d^*$;
- 2) $\omega \in \ker(\Delta - (p+1)\nabla^* \nabla) \cap \ker d^*$;
- 3) $\omega \in \ker d^*$ и действие сильного лапласиана $\nabla^* \circ \nabla$ на форме ω определяется равенством $\nabla^* \nabla \omega = p^{-1}F(\omega)$.

Здесь необходимо отметить, что в части пунктов 2 и 3 следствие повторяет формулировки теорем 2.2 и 2.3 главы IV монографии [8].

СЛЕДСТВИЕ 2. *Для того чтобы на замкнутом ориентированном римановом многообразии (M, g) форма $\omega \in \mathbf{P}^p(M, \mathbb{R})$, необходимо и достаточно выполнения одного из следующих трех условий:*

- 1) $\omega \in \ker(D^* \circ D) \cap \ker d$;
- 2) $\omega \in \ker(\Delta - (n-p+1)\nabla^* \circ \nabla) \cap \ker d$;
- 3) $\omega \in \ker d$ и действие сильного лапласиана $\nabla^* \circ \nabla$ на форме ω определяется равенством $\nabla^* \nabla \omega = (n-p)^{-1}F(\omega)$.

2. Сильный лапласиан D^*D

2.1. В любой точке x риманова многообразия (M, g) квадратичная форма g_x определяет канонический изоморфизм $g_x: T_x^{(p,q)}M \rightarrow T_x^{(r,s)}M$ между тензорными пространствами с $r + s = p + q$, соответствующий в классических тензорных обозначениях опусканию и подниманию индексов, которым мы по умолчанию будем пользоваться. Та же g_x задает положительно определенную квадратичную форму на $T_x^{(p,q)}M$, а значит, и на его подпространствах таких, как $\wedge_x^p M$ и $T_x^*M \otimes \wedge_x^p M$.

Пусть E, F – тензорные расслоения над замкнутым римановым многообразием (M, g) и $A: C^\infty(E) \rightarrow C^\infty(F)$ – линейный дифференциальный оператор; тогда формально сопряженный к A оператор A^* определяется из равенства $\langle Ae, f \rangle = \langle e, A^*f \rangle$, где, например, $\langle e, e' \rangle = \int_M g(e, e') dV$ для любых сечений $e, e' \in C^\infty(E)$, $f \in C^\infty(F)$. Так для оператора связности Леви–Чивита $\nabla: C^\infty \wedge^p M \rightarrow C^\infty(T^*M \otimes \wedge^p M)$ формально сопряженный оператор $\nabla^* = -\text{trace} \circ \nabla$ или, подробнее (см. [1, с. 53]),

$$(\nabla^* \varphi)(X_1, \dots, X_p) = - \sum_{k=1}^n (\nabla_{e_k} \varphi)(e_k, X_1, \dots, X_p) \quad (2.1)$$

для произвольных $\varphi \in C^\infty(T^*M \otimes \wedge^p M)$, $X_1, \dots, X_p \in C^\infty TM$ и ортонормированного базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$. Для оператора внешнего дифференцирования d формально сопряженным оператором является (см. [1, с. 54] и [4, с. 77]) оператор d^* , который представляет ограничение оператора ∇^* на подрасслоение $\wedge^{p+1}M$.

Рассмотрим третий оператор $D: C^\infty \wedge^p M \rightarrow C^\infty(T^*M \otimes \wedge^p M)$ из базиса $\{d, d^*, D\}$. Согласно [12] и [15] имеем

$$D = \nabla - (p+1)^{-1}d - (n-p+1)^{-1}g \wedge d^*,$$

где

$$\begin{aligned} (g \wedge d^* \omega)(X_0, X_1, \dots, X_p) \\ = \sum_{a=1}^p (-1)^{p+1} g(X_0, X_a) (d^* \omega)(X_1, \dots, X_{a-1}, X_{a+1}, \dots, X_p) \end{aligned}$$

для произвольных $\omega \in C^\infty \wedge^p M$ и $X_0, \dots, X_p \in C^\infty TM$.

С учетом сказанного выше для построения формально сопряженного к D оператора D^* осталось найти оператор, формально сопряженный к $(n-p+1)^{-1}g \wedge d^*$. Последний представляет композицию дифференциального d^* и алгебраического $g\wedge: C^\infty \wedge^{p-1}M \rightarrow C^\infty(T^*M \otimes \wedge^p M)$ операторов.

Прежде, чем решать эту общую задачу, рассмотрим более простой алгебраический оператор $u \otimes v\wedge: \wedge_x^p M \rightarrow T_x^p M \otimes \wedge_x^p M$, который ставит в соответствие произвольной p -форме $\omega \in \wedge_x^p M$ тензор $u \otimes v \wedge \omega$ для некоторых фиксированных $u, v \in T_x^*M$, и найдем к нему сопряженный.

Определим операцию внутреннего произведения $i_{U \otimes V}: T_x^*M \otimes \wedge_x^p M \rightarrow \wedge_x^{p-1}M$ следующей формулой:

$$(i_{U \otimes V} \varphi)(X_2, \dots, X_p) = \varphi(U, V, X_2, \dots, X_p)$$

для произвольных $\varphi \in T_x^* M \otimes \wedge_x^p M$; $U, V, X_2, \dots, X_p \in T_x M$. Проверим равенство $g_x(u \otimes v \wedge \omega, \varphi) = g_x(\omega, i_{U \otimes V} \varphi)$, означающее сопряженность алгебраических операторов $u \otimes v \wedge$ и $i_{U \otimes V}$ для 1-форм u, v и дуальных им векторов U, V . Для этого перейдем к локальным координатам и тогда

$$\begin{aligned} g_x(u \otimes v \wedge \omega, \varphi) &= \frac{1}{p!} u_i (v_j \omega_{k_2 \dots k_p} - v_{k_2} \omega_{j k_3 \dots k_p} - \dots - v_{k_p} \omega_{k_2 \dots k_{p-1} j}) \varphi^{i j k_2 k_3 \dots k_{p-1} k_p} \\ &= \frac{1}{(p-1)!} \omega_{k_2 \dots k_p} (u_i v_j \varphi^{i j k_2 \dots k_p}) = \frac{1}{(p-1)!} \omega^{k_2 \dots k_p} (U^i V^j \varphi_{i j k_2 \dots k_p}) \\ &= g_x(\omega, i_{U \otimes V} \varphi), \end{aligned}$$

что и доказывает наше равенство.

Теперь нетрудно найти выражение оператора $(g\wedge)^*$, сопряженного к $g\wedge$. Таким будет оператор

$$(g\wedge)^*(X_2, \dots, X_p) = (\text{trace } \varphi)(X_2, \dots, X_p) = \sum_{k=1}^p \varphi(e_k, e_k, X_2, \dots, X_p).$$

На этом основании заключаем, что оператор $(n-p+1)^{-1}d \circ \text{trace}$ будет искомым сопряженным к $(n-p+1)^{-1}(g\wedge) \circ d^*$ оператором.

Подводя итог рассуждениям этого пункта, мы можем выписать сопряженный к D оператор D^* в следующей форме:

$$D^* = \nabla^* - (p+1)^{-1}d^* - (n-p+1)^{-1}d \circ \text{trace}.$$

2.2. Полагаем U окрестностью на (M, g) с локальной системой координат $x^1, \dots, x^n$ и $\nabla_k = \nabla_{\partial/\partial x^k}$ для $i, j, k, \dots = 1, \dots, n$. Пусть далее $\omega_{j_1 \dots j_p}$ — компоненты p -формы $\omega \in C^\infty \wedge^p M$ в локальной системе координат; тогда

$$\begin{aligned} (D\omega)_{k j_1 j_2 \dots j_{p-1} j_p} &= \nabla_k \omega_{j_1 j_2 \dots j_{p-1} j_p} - \frac{1}{p+1} (d\omega)_{k j_1 j_2 \dots j_{p-1} j_p} \\ &+ \frac{1}{n-p+1} (g_{k j_1} (d^* \omega)_{j_2 \dots j_{p-1} j_p} - g_{k j_2} (d^* \omega)_{j_1 \dots j_p} - \dots - g_{k j_p} (d^* \omega)_{j_2 \dots j_{p-1} i_1}). \end{aligned}$$

И далее, поскольку $\text{trace}(D\omega) = 0$, имеем

$$(D^* D\omega)_{j_1 \dots j_p} = -\frac{p}{p+1} \left(\nabla^k \nabla_k \omega_{i_1 \dots j_p} + \frac{1}{p+1} (d^* d\omega)_{j_1 \dots j_p} + \frac{1}{n-p+1} (dd^* \omega)_{j_1 \dots j_p} \right),$$

откуда и выводится инвариантная форма записи (1.1) лапласиана $D^* \circ D$. При $n = 2p$ она легко приводится к форме

$$D^* \circ D = p(p+1)^{-2} ((p+1)\nabla^* \circ \nabla - \Delta).$$

3. Доказательство утверждений

3.1. Пусть (M, g) является замкнутым римановым многообразием. Из равенства $\langle D\omega, \varphi \rangle = \langle \omega, D^*\varphi \rangle$, где $\varphi \in C^\infty(T^*M \otimes \wedge^p M)$ и $\omega \in C^\infty \wedge^p M$, выражающего условие сопряженности операторов D и D^* , путем замены тензорного поля φ на $D\omega$, который по определению является сечением расслоения $T^*M \otimes \wedge^p M$, получаем

$$\langle D^*D\omega, \omega \rangle = \langle D\omega, D\omega \rangle \geq 0. \quad (3.1)$$

С другой стороны, используя поточечную ортогональность тензорных полей $D\omega$, $d\omega$ и $g \wedge d^*\omega$ в метрике расслоения $T^*M \otimes \wedge^p M$ (см. [6, с. 264] и [12]), имеем

$$\langle D\omega, D\omega \rangle = \langle \nabla\omega, \nabla\omega \rangle - (p+1)^{-1} \langle d\omega, d\omega \rangle - (n-p+1)^{-1} \langle d^*\omega, d^*\omega \rangle. \quad (3.2)$$

Сравнивая равенства (3.1) и (3.2), убеждаемся в том, что

$$\langle D^*D\omega, \omega \rangle = \langle \nabla\omega, \nabla\omega \rangle - (p+1)^{-1} \langle d\omega, d\omega \rangle - (n-p+1)^{-1} \langle d^*\omega, d^*\omega \rangle. \quad (3.3)$$

С получением равенств (3.1)–(3.3) необходимые и достаточные условия, сформулированные в первых пунктах теоремы 2 и ее следствий, становятся очевидными. Очевидным будет и условие второго пункта теоремы 2.

3.2. Для произвольной формы $\omega \in C^\infty \wedge^p M$ на замкнутом римановом многообразии (M, g) справедливо равенство (см. [4, с. 77])

$$\langle \Delta\omega, \omega \rangle = \langle d\omega, d\omega \rangle + \langle d^*\omega, d^*\omega \rangle, \quad (3.4)$$

которое является следствием сопряженности операторов d и d^* . В предположении, что $d^*\omega = 0$, на основе равенства (3.4) выражение (3.2) допускает следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \langle D\omega, D\omega \rangle &= \langle \nabla\omega, \nabla\omega \rangle - (p+1)^{-1} (\langle d\omega, d\omega \rangle + \langle d^*\omega, d\omega \rangle) \\ &= -(p+1)^{-1} \langle \Delta\omega - (p+1)\nabla^*\nabla\omega, \omega \rangle. \end{aligned}$$

Это позволяет заключить, что условие $\omega \in \ker d^* \cap \ker(\Delta - (p+1)\nabla^* \circ \nabla)$ влечет условие $\omega \in \ker D \cap \ker d^*$. Обратно, пусть $\omega \in \ker D \cap \ker d^*$; это означает, что $d\omega = (p+1)\nabla\omega$, и тогда $\Delta\omega - (p+1)\nabla^*\nabla\omega = d^*d\omega - d^*d\omega = 0$. Аналогичным образом в предположении, что $d\omega = 0$, доказывается равенство $\langle D\omega, D\omega \rangle = -(n-p+1)^{-1} \langle \Delta\omega - (n-p+1)\nabla^*\nabla\omega, \omega \rangle$. Оно позволяет заключить, что условие $\omega \in \ker d \cap \ker(\Delta - (n-p+1)\nabla^*\nabla)$ влечет условие $\omega \in \ker D \cap \ker d$. Обратно, пусть $\omega \in \ker D \cap \ker d$. Последнее означает, что $g \wedge d^*\omega = (n-p+1)\nabla\omega$, и тогда

$$\Delta\omega - (n-p+1)\nabla^*\nabla\omega = dd^* - dd^*\omega = 0.$$

3.3. Требования, сформулированные в третьих пунктах теоремы 2 и обеих ее следствий, становятся очевидными, если принять во внимание формулу Вейценбека (см. [7, с. 52] и [11, с. 393–397])

$$\Delta\omega = \nabla^*\nabla\omega + F(\omega). \quad (3.5)$$

3.4. Для доказательства формулы Вейценбека (1.2) надо умножить левую и правую части равенства (3.5) на ω и принять во внимание равенства (3.3) и (3.4), а также равенства $\langle d\omega, d\omega \rangle = \langle d^*d\omega, \omega \rangle$ и $\langle d^*\omega, d^*\omega \rangle = \langle dd^*\omega, \omega \rangle$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бессе А. Многообразия Эйнштейна. Т. 1. М.: Мир, 1990.
- [2] Коларж И. Естественные расслоения и операторы // Итоги науки и техн. Пробл. геометрии. Т. 23. М.: ВИНТИ, 1990. С. 67–98.
- [3] Kolar I., Michor P.W., Slovák J. Natural Operations in Differential Geometry. Berlin–New York: Springer–Verlag, 1993.
- [4] Пале Р. Семинар по теореме Атьи–Зингера об индексе. М.: Мир, 1970.
- [5] Slovak J. On natural connections on Riemannian manifolds // Comm. Math. Univ. Carol. 1989. V. 30. № 2. P. 389–393.
- [6] Бессе А. Четырехмерная риманова геометрия. М.: Мир, 1985.
- [7] Яно К., Бохнер С. Кривизна и числа Бетти. М.: ИЛ, 1957.
- [8] Yano K. Integral Formulas in Riemannian Geometry. New York: Marcel Dekker, 1970.
- [9] Wu H. The Bochner Technique in Differential Geometry. London: Harwood Acad. Publ., 1987.
- [10] Palais R. Natural operators on differential forms // Trans. Amer. Math. Soc. 1959. V. 92. № 1. P. 125–141.
- [11] Weitzenböck R. Invariantentheorie. Groningen: Noordhoff, 1923.
- [12] Stepanov S. E. A class of closed forms and special Maxwell's equations // Tensor (N. S.). 1997. V. 58. P. 233–242.
- [13] Kashiwada T. On conformal Killing tensor // Natural Science Report (Ochanomizu University). 1968. V. 19. № 2. P. 67–74.
- [14] Stepanov S. E., Tsyganok I. I. On a generalization of Kashiwada's theorem // Webs & Quasigroups. 1998–1999. P. 162–167.
- [15] Степанов С. Е. Векторное пространство конформно-киллинговых форм на римановом многообразии // Зап. научн. сем. ПОМИ РАН. 1999. Т. 261. С. 240–265.
- [16] Степанов С. Е. О применении одной теоремы П. А. Широкова в технике Бохнера // Изв. вузов. Матем. 1996. № 9. С. 53–59.

Владимирский государственный педагогический университет
E-mail: stepanov@vtsnet.ru

Поступило
16.03.2000
Исправленный вариант
25.03.2004