Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Карасев, Бесконечномерное 4-многообразие конечной
когомологической размерности при $\mathbb{C}H$, *Матем. заметки*,
1999, том 66, выпуск 5, 664–670

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1210>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 14:13:30

УДК 515.12

БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЕ 4-МНОГООБРАЗИЕ КОНЕЧНОЙ КОГОМОЛОГИЧЕСКОЙ РАЗМЕРНОСТИ ПРИ СН

А. В. Карасев

В предположении континуум-гипотезы построено дифференцируемое 4-многообразие M размерности $\dim M = \infty$ и когомологической размерности $cA - \dim M = 4$. Пространство M совершенно нормально и наследственно сепарабельно.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. В работе [1] В. В. Федорчуком в предположении континуум-гипотезы (СН) для каждого n, t , удовлетворяющих неравенству $4 \leq n < t$, было построено дифференцируемое, совершенно нормальное, наследственно сепарабельное n -многообразие $M^{n,t}$ размерности $t - 1 \leq \dim M^{n,t} \leq t \leq t + n - 3 \leq \text{Ind } M^{n,t} \leq n + t - 1$. В статье [2] в предположении принципа Йенсена ($\diamond$) построено дифференцируемое, счетно компактное, совершенно нормальное, наследственно сепарабельное n -многообразие $M^{n,t}$ размерности

$$t = cA - \dim M^{n,t} < \dim M^{n,t} = \infty, \quad (1)$$

и был поставлен следующий вопрос: можно ли построить многообразие M^n , удовлетворяющее условию (1) в предположении континуум-гипотезы (СН). В частности, можно ли, используя конструкцию примера [1] с применением идей, изложенных в [2], построить пример такого многообразия.

Результатом данной работы является положительный ответ на поставленный вопрос, а именно:

ТЕОРЕМА. В предположении СН существует дифференцируемое, совершенно нормальное, наследственно сепарабельное 4-многообразие M размерности $4 = cA - \dim M < \dim M = \infty$.

2. Предварительные сведения. Напомним необходимые сведения, которые понадобятся нам в дальнейшем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (см. [1, предложение 1.5]). Пусть $f: X \rightarrow Y$ – монотонное, замкнутое отображение на Y , A и B – замкнутые дизъюнктные подмножества Y . Тогда для любой перегородки C в пространстве X между множествами $f^{-1}A$ и $f^{-1}B$ множество $f(C)$ является перегородкой в пространстве Y между множествами A и B .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-00357.

ТЕОРЕМА 1 (см. [3, гл. 5, теорема 15]). Пусть X – нормальное пространство. Тогда $\dim X \geq n \Leftrightarrow$ существуют пары (A_i, B_i) , $1 \leq i \leq n$, непересекающихся замкнутых подмножеств пространства X такие, что $\cap \{C_i : 1 \leq i \leq n\} \neq \emptyset$ для любых перегородок C_i в пространстве X между множествами A_i и B_i .

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $\dim X \geq n$ для нормального пространства X , то существуют такие пары (A_i, B_i) , $1 \leq i \leq n-1$, непересекающихся замкнутых подмножеств пространства X , что $\dim \cap \{C_i : 1 \leq i \leq n-1\} \geq 1$ для любых перегородок C_i в пространстве X между множествами A_i и B_i .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (см. [4]). Когомологической размерностью $\text{сА} - \dim X$ нормального пространства X называется наибольшее целое число n , для которого найдется такое замкнутое в X множество F , что спектральная группа целочисленных когомологий $H^n(X, F; G)$, основанная на системе всех конечных открытых покрытий, отлична от нуля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (см. [5]). Когомологической размерностью $\text{с} - \dim_G X$ локально бикompактного пространства X относительно абелевой группы коэффициентов G называется наибольшее целое число n , для которого существует такое бикompактное множество $A \subset X$, что $H^n(A, G) \neq 0$, где $H^i(Y, G)$ – i -я группа когомологий локально бикompактного пространства Y с бикompактными носителями.

Будем обозначать группу $H^i(Y, Z)$ через $H^i(Y)$, $\text{с} - \dim_Z X$ через $\text{с} - \dim X$, где Z – группа целых чисел. Число $\text{с} - \dim X$ будем называть когомологической размерностью локально бикompактного пространства X .

ТЕОРЕМА 2 (см. [6]). Если локально бикompактное пространство X представлено в виде счетной суммы своих локально бикompактных подмножеств X_k , $k \in \omega$, то $\text{с} - \dim X = \sup\{\text{с} - \dim X_k : k \in \omega\}$.

ТЕОРЕМА 3 (см. [4]). Для произвольного нормального пространства X имеем $\text{сА} - \dim X = \text{сА} - \dim \beta X = \text{с} - \dim \beta X$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если X – бикompакт, то $\text{сА} - \dim X = \text{с} - \dim X$.

Заметим, что для n -многообразия M выполняется равенство $\text{с} - \dim M = n$ (см. [2, равенство 4.3]).

ТЕОРЕМА 4 (см. [6, теорема 16]). Пусть X наследственно паракомпактно. Тогда $\text{сА} - \dim Y \leq \text{сА} - \dim X$ для произвольного подмножества Y в X .

3. Пример. Теперь построим многообразие M . Мы будем использовать конструкцию, изложенную в [1], модифицировав ее исходя из идей примера в [2].

Пусть M_1 – универсальная менгеровская кривая, $f: M_1 \rightarrow Q$ – непрерывное отображение M_1 на гильбертов куб Q , все слои которого гомеоморфны M_1 (см. [5], [7], [8]).

Так как M_1 – одномерный континуум, существует вложение M_1 в трехмерную сферу S^3 . Фиксируем такое вложение $M_1 \subset S^3$, сферу S^3 считаем границей замкнутого шара B^4 . Пусть D – бесконечномерный компакт когомологической размерности $\text{с} - \dim D = 3$, построенный А. Н. Дранишниковым [9]. Фиксируем вложение D в Q . Пусть $A = f^{-1}D$. Через $\mathcal{F}_D$ обозначим следующее разбиение шара B^4 : $\mathcal{F}_D = \{f^{-1}(q) : q \in D\} \cup \{\{x\} : x \in B^4 \setminus A\}$. Фактор-отображение $B^4 \rightarrow B^4/\mathcal{F}_D$ обозначим через φ ,

фактор-пространство $B^4/\mathcal{F}_D$ через B_φ^4 . Положим $S_\varphi^3 = \varphi(S^3)$. Заметим, что $D = f(A)$ естественно гомеоморфно $\varphi(A)$ и, следовательно, вложено в S_φ^3 .

Точку $y \in S_\varphi^3$ назовем *точкой первого рода*, если множество $\varphi^{-1}(y)$ состоит из одной точки, назовем точку y *точкой второго рода*, если $\varphi^{-1}(y)$ совпадает с одним из континуумов $f^{-1}(q)$, $q \in D$.

Пусть $\{h_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ – какая-нибудь нумерация точек множества S_φ^3 , существующая в силу континуум-гипотезы.

Теперь совершенно аналогично [1] построим обратный спектр $S = \{X_\beta, \pi_\gamma^\beta : \gamma \leq \beta < \omega_1\}$, удовлетворяющий следующим свойствам (см. [1]).

1. X_β гомеоморфно B_φ^4 для любого $\beta < \omega_1$.
2. Существует $Z_\beta \subset X_\beta$ такое, что Z_β – гладкое 4-многообразие с дифференциальной структурой $\mathcal{D}_\beta$, причем $X_\beta \setminus Z_\beta$ гомеоморфно S_φ^4 .
3. π_γ^β – почти гомеоморфизм при $\gamma < \beta$.
4. Если $\gamma < \omega$, то $(\pi_\gamma^{\gamma+1})^{-1}h_\gamma = h_\gamma \cup J_{\gamma+1} \equiv K_{\gamma+1}$ – гомеоморфно отрезку I , когда h_γ есть точка первого рода, и конусу над произведением $M_1 \times I$, когда h_γ – точка второго рода.

5. $\pi_\gamma^{\gamma+1}|_{(\pi_\gamma^{\gamma+1})^{-1}(Z_\gamma)}$ – гомеоморфизм.

6. Если $\delta < \gamma < \beta$ и h_γ – предельная точка множества $\pi_0^\beta(A_\delta)$, то всякая точка $x \in K_{\gamma+1}$ является предельной точкой множества счетных подмножеств множества $Z = \cup\{Z_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ таких, что каждое счетное подмножество множества Z занумеровано несчетным множеством индексов (эта нумерация существует в силу СН).

7. $(Z_\beta, \mathcal{D}_\beta)$ диффеоморфно $\mathbb{R}^4$, т.е. атлас $\mathcal{D}_\beta$ содержит такую карту (Z_β, φ_β) , что $\varphi_\beta(Z_\beta) = \mathbb{R}^4$.

8. Если $\gamma < \beta$, то $(Z_\gamma, \varphi_\gamma) \in \mathcal{D}_\beta$.

9. $\pi_\alpha^\beta|_{(S_\varphi^3)}$ – тождественно при любых $\alpha \leq \beta < \omega_1$.

Пусть X – предел обратного спектра S . Положим $M = (Z, D)$, где $Z = \cup Z_\alpha$, $D = \cup\{\mathcal{D}_\beta : \beta < \omega_1\}$. Тогда X – бикompакт, а дифференцируемое 4-многообразие M является его открытым всюду плотным подмножеством, причем разность $X \setminus M$ гомеоморфна компакту S_φ^3 .

Из свойства 9 спектра S следует, что

$$\pi_\alpha|_{S_\varphi^3} \text{ – тождественное отображение.} \quad (2)$$

4. Свойства многообразия M . Пусть $\pi_\alpha : X \rightarrow X_\alpha \equiv B_\varphi^4$ – сквозная проекция спектра S .

Тогда верно следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. 1. Если $x \in X_\alpha \setminus S_\varphi^3$, то $\pi_\alpha^{-1}x$ состоит из одной точки.

2. Если $h \in S_\varphi^3$ – точка первого рода, то множество $\pi_\alpha^{-1}h$ гомеоморфно отрезку I .

3. Если $h \in S_\varphi^3$ – точка второго рода, то $\pi_\alpha^{-1}h$ гомеоморфно конусу над произведением $M_1 \times I$.

В статье [1] приведено доказательство этого предложения в случае, когда $\alpha = 0$, однако нетрудно видеть, что это доказательство дословно переносится на случай произвольного $\alpha < \omega_1$.

Положим $p_\alpha = \pi_\alpha|_M$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 (Следствие из п. 1 в предложении 2). *Имеем $p_\alpha|p_\alpha^{-1}(X_\alpha \setminus S_\varphi^3) = p_\alpha^{-1}(Z_\alpha)$ – гомеоморфизм.*

Пусть $f: X \rightarrow Y$ – отображение; тогда для $A \subset X$ положим $f^\#A = \{y \in Y : f^{-1}y \subset A\} = Y \setminus f(X \setminus A)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4 (Основное свойство отображения p_α). *Для всякого замкнутого множества $F \subset M$ и открытого множества $U \subset M$ множества $\overline{p_\alpha(F)}_\alpha^X \setminus p_\alpha^\#(F)$ и $p_\alpha(U) \setminus \text{Int } p_\alpha^\#U$ не более чем счетны для любого $\alpha < \omega_1$.*

(Доказательство для $\alpha = 0$ легко обобщается на случай произвольного $\alpha < \omega_1$, см. [1].)

Для открытого множества $U \subset M$ положим $\tilde{U} = X \setminus \overline{(M \setminus U)}^X$. Тогда из основного свойства отображения p_α вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3. *Множество $p_\alpha(\tilde{U}) \setminus p_\alpha^\#(\tilde{U})$ счетно.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5 (см. предложение 2.2 в [1]). *Многообразие M совершенно нормально и наследственно сепарабельно.*

5. Размерностные свойства многообразия M .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Имеет место равенство $\dim M = \infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам достаточно показать, что $\dim M \geq n$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Заметим, что компакт Дранишников $\mathcal{D}$ вложен в S_φ^3 (см. раздел 3). Следовательно, $\dim S_\varphi^3 = \infty$, поэтому, так как $S_\varphi^3 \subset B_\varphi^4$, $\dim B_\varphi^4 = \infty$.

Поэтому согласно следствию 1 для любого $n \in \mathbb{N}$ найдутся (A_i^1, A_i^2) , $1 \leq i \leq n+1$, – такие пары дизъюнктивных замкнутых подмножеств компакта $X_0 = B_\varphi^4$, что

$$\dim \cap \{B_i : 1 \leq i \leq n\} \geq 1 \quad (3)$$

для любых перегородок B_i между A_i^1 и A_i^2 .

Пусть U_i^j , $j = 1, 2$, – такие окрестности множеств A_i^j , что $\overline{U}_i^1 \cap \overline{U}_i^2 = \emptyset$ для всех i , и пусть $F_i^j = M^4 \cap \pi_0^{-1}\overline{U}_i^j = p_0^{-1}\overline{U}_i^j$.

Согласно теореме 1 для проверки неравенства $\dim M \geq n$ нам достаточно показать, что $\cap \{C_i : 1 \leq i \leq n\} \neq \emptyset$ для любых перегородок C_i между множествами F_i^1 и F_i^2 .

Пусть $M \setminus C_i = V_i^1 \cup V_i^2$, где V_i^1 и V_i^2 являются дизъюнктивными окрестностями множеств F_i^1 и F_i^2 . Положим $\mathcal{D}_i = X \setminus (\tilde{V}_i^1 \cup \tilde{V}_i^2)$. Так как $\pi_0^{-1}U_i^j \subset \tilde{V}_i^j$, множество $\mathcal{D}_i$ является перегородкой в бикompакте X между $\pi_0^{-1}A_i^1$ и $\pi_0^{-1}A_i^2$.

Заметим, что отображение π_0 удовлетворяет условию предложения 1 в силу бикompактности X и X_0 , а также свойствам 1–3 проекций p_α (см. предложение 2). Поэтому $\pi_0\mathcal{D}_i$ – перегородка в X_0 между A_i^1 и A_i^2 ; следовательно, согласно (3) $\dim \cap \{\pi_0(\mathcal{D}_i) : 1 \leq i \leq n\} \geq 1$.

Таким образом, нам достаточно показать что множество $\cap_i \pi_0(\mathcal{D}_i) \setminus \cap_i P_0^\#C_i$ счетно. Отсюда будет вытекать, что $\cap \{C_i : 1 \leq i \leq n\} \neq \emptyset$.

Легко проверить следующие теоретико-множественные включения:

$$\bigcap_\alpha P_\alpha \setminus \bigcap_\alpha Q_\alpha \subset \bigcup_\alpha (P_\alpha \setminus Q_\alpha), \quad (4)$$

$$\bigcup_\alpha P_\alpha \setminus \bigcup_\alpha Q_\alpha \subset \bigcup_\alpha (P_\alpha \setminus Q_\alpha). \quad (5)$$

Поэтому нам достаточно показать, что $\pi_0(\mathcal{D}_i) \setminus P_0^\# C_i$ счетно, а для этого согласно основному свойству отображения p_α достаточно показать, что $\pi_0(\mathcal{D}_i) \setminus p_0(C_i)$ счетно. Имеем: $X_0 \setminus p_0(C_i) \subset p_0(V_i^1) \cup p_0(V_i^2)$ и $\pi_0(\mathcal{D}_i) \subset X_0 \setminus p_0^\# \tilde{V}_i^1 \cup p_0^\# \tilde{V}_i^2$. Следовательно, $\pi_0(\mathcal{D}_i) \setminus p_0(C_i) \subset p_0(V_i^1) \cup p_0(V_i^2) \setminus \pi_0^\# \tilde{V}_i^1 \cup \pi_0^\# \tilde{V}_i^2 \cup \tilde{V}_i^2 \subset_{(5)} (p_0(V_i^1) \setminus \pi_0^\# \tilde{V}_i^1) \cup (p_0(V_i^2) \setminus \pi_0^\# \tilde{V}_i^2) \subset (\pi_0(\tilde{V}_i^1) \setminus \pi_0^\# V_i^1) \cup (\pi_0(\tilde{V}_i^2) \setminus \pi_0^\# \tilde{V}_i^2)$.

Но последнее множество счетно в силу следствия из основного свойства отображений p_α .

Итак, $\dim M \geq n$ для всех $n \in \mathbb{N}$; следовательно, $\dim M = \infty$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Имеем $cA - \dim B_\varphi^4 = 4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу следствия 2 и теоремы 2 $cA - \dim B_\varphi^4 = c - \dim B_\varphi^4 = \sup\{c - \dim \mathcal{D}, c - \dim B_\varphi^4 \setminus \mathcal{D}\} = \max\{3, 4\} = 4$. Предложение доказано.

Пусть X – нормальное пространство, F – его замкнутое подмножество, $u = \{U_i : 1 \leq i \leq k\}$ – открытое покрытие X . Тогда через K_u мы будем обозначать симплициальный комплекс, являющийся нервом покрытия u , а через $K_{u,F}$ – подкомплекс в K_u , являющийся нервом покрытия u , ограниченного на множество F .

Если дано другое открытое покрытие $v = \{V_i : 1 \leq i \leq k\}$, которое комбинаторно вписано в u , т.е. $V_i \subseteq U_i$ для любого i , то через $\mu_{u,v}$ мы будем обозначать гомоморфизм группы когомологий $H^n(K_u, K_{u,F}; G)$ в группу когомологий $H^n(K_v, K_{v,F}; G)$, индуцированный вписанностью покрытия v в покрытие u .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Имеем $cA - \dim M = 4$.

Для доказательства этого предложения нам потребуется следующая

ЛЕММА 1. Для любого открытого подмножества U в M найдется $\alpha < \omega_1$ такое, что для всех $\beta \geq \alpha$ выполняется равенство $p_\beta^\#(U) = p_\beta(U)$, причем $p_\beta(U)$ открыто в X_β .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно основному свойству отображения p_0 разность $p_0 U \setminus \text{Int } p_0^\# U$ – не более чем счетна. Нетрудно видеть, что $p_0(U) \setminus \text{Int } p_0^\# U \subset S_\varphi^3$. Пусть $p_0(U) \setminus \text{Int } p_0^\# U = \{h_{\alpha_i} : i < \omega\}$. Положим $\alpha = \sup\{\alpha_i\}$ и проверим, что α удовлетворяет требуемому свойству. Покажем сначала, что $p_\alpha^\# U = p_\alpha U$. Действительно, предположим, что существует $x \in p_\alpha U \setminus p_\alpha^\# U$. Тогда $\pi_0^\alpha x \in p_0 U \setminus p_0^\# U \subseteq p_0^\# U \setminus \text{Int } p_0^\# U$, т.е.

$$\pi_0^\alpha x = h_{\alpha_i} \quad \text{для некоторого } i. \quad (6)$$

Так как $x \in p_\alpha U$, существует $y \in U$ такая, что $p_\alpha y = x$.

Согласно (6) $y \in p_0^{-1} h_{\alpha_i}$. Заметим, что $p_0^{-1}(h_{\alpha_i}) = p_0^{-1}((\pi_0^\alpha)^{-1} h_{\alpha_i})$ и в силу свойств 3, 5, 9 спектра S , а также определения многообразия M отображение $p_\alpha|_{p_0^{-1}((\pi_0^\alpha)^{-1} h_{\alpha_i})}$ является гомеоморфизмом; следовательно, $x = p_\alpha y \in p_\alpha^\# U$, что противоречит выбору x .

Теперь мы покажем, что $p_\alpha U$ открыто, а именно, $p_\alpha U = p_\alpha(U \cap Z_\alpha) \cup (\pi_0^\alpha)^{-1}(\text{Int } p_0^\# U)$.

Заметим, что $p_\alpha(U \cap Z_\alpha)$ открыто, так как согласно определению многообразия M Z_α является одной из открытых карт в атласе M и $p_\alpha|_{Z_\alpha}$ – гомеоморфизм (см. определение многообразия M и свойство 5 спектра S). Поэтому нам необходимо проверить включение

$$p_\alpha U \subset p_\alpha(U \cap Z_\alpha) \cup (\pi_0^\alpha)^{-1}(\text{Int } p_0^\# U). \quad (7)$$

Обратное включение очевидно.

Пусть $x \in p_\alpha U$. Предположим, что $x \notin (\pi_0^\alpha)^{-1}(\text{Int } p_0^\# U)$. Тогда $\pi_0^\alpha x = h_{\alpha_i}$ для некоторого i . В силу выбора α , свойств 3, 5, 9 спектра S и определения многообразия M $p_\alpha^{-1}(x) \subset p_\alpha^{-1}((\pi_0^\alpha)^{-1}h_{\alpha_i}) = p_\alpha^{-1}((\pi_0^\alpha)^{-1}h_{\alpha_i}) \setminus h_{\alpha_i} \subseteq p_\alpha^{-1}(Z_\alpha) = Z_\alpha$.

Таким образом, $p_\alpha^{-1}x \subseteq Z_\alpha \cap U$. Следовательно, $x \in p_\alpha(Z_\alpha \cap U)$. Включение (7) проверено. Очевидно, что требуемому условию удовлетворяет также и любое $\beta \geq \alpha$. Это завершает доказательство леммы.

Переходим к доказательству предложения 8.

В силу того, что M является 4-многообразием, $\text{сА} - \dim M \geq 4$. Покажем, что $\text{сА} - \dim M \leq 4$.

Пусть $u = \{U_i : 1 \leq i \leq k\}$ – произвольное конечное открытое покрытие многообразия M , F – его произвольное замкнутое подмножество. Для доказательства неравенства $\text{сА} - \dim M \leq 4$ нам согласно определению 1 надо показать, что группы $H^n(M, F; \mathbb{Z})$ тривиальны при $n > 4$. В свою очередь, для этого согласно определению группы $H^n(M, F; \mathbb{Z})$ нам достаточно показать, что для любого элемента z группы $H^n(K_u, K_{u,F}; \mathbb{Z})$ найдется такое покрытие $v = \{V_i : 1 \leq i \leq k\}$, комбинаторно вписанное в покрытие u , что образ элемента z при гомоморфизме μ_{uv} когомологичен нулю, т.е. $\mu_{uv}(z) = 0$ в группе $H^n(K_v, K_{v,F}; \mathbb{Z})$ при $n > 4$.

Используя лемму 1, для каждого U_i найдем $\alpha_i < \omega_1$ такое, что $p_\beta U_i = p_\beta^\# U_i$ открыто в пространстве X_β для каждого $\beta \geq \alpha_i$. Положим $\alpha' = \max\{\alpha_i : 1 \leq i \leq k\}$.

Далее, согласно основному свойству отображения p_α разность $\overline{p_{\alpha'} F}^{X_{\alpha'}} \setminus p_{\alpha'}^\# F$ не более чем счетна. Легко видеть, что $\overline{p_{\alpha'} F}^{X_{\alpha'}} \setminus p_{\alpha'}^\# F \subset S_\varphi^3$. Пусть $\overline{p_\alpha F}^{X_{\alpha'}} \setminus p_{\alpha'}^\# F = \{\beta_i : i < \omega\}$.

Положим $\beta = \sup \beta_i$, $\alpha = \max\{\alpha', \beta\}$, $X'_\alpha = \cup\{p_\alpha U_i : 1 \leq i \leq k\}$, $\Phi = p_\alpha F$, $O_i = p_\alpha U_i$.

Нетрудно видеть, что в силу выбора α пространство X'_α и множество Φ обладают следующими свойствами:

- 1) $\Phi = p_\alpha^\# F$, $\Phi \subset X'_\alpha$;
- 2) Φ замкнуто в пространстве X'_α ;
- 3) $p_\alpha^{-1} X'_\alpha = M$.

Положим $\omega = \{O_i : 1 \leq i \leq k\}$ – открытое покрытие X'_α . Тогда по построению множеств O_i и Φ симплициальный комплекс K_u совпадает с комплексом K_ω , а подкомплекс $K_{u,F}$ совпадает с подкомплексом $K_{\omega,\Phi}$.

Согласно свойству 1 спектра S X_α гомеоморфно B_φ^4 . Согласно предложению 7 $\text{сА} - \dim X_\alpha = \text{сА} - \dim B_\varphi^4 = 4$. Поскольку B_φ^4 – метризуемый компакт, мы находимся в условиях теоремы 4, поэтому $\text{сА} - \dim X'_\alpha = 4$. Следовательно, для любого элемента $z \in H^n(K_\omega, K_{\omega,\Phi}; \mathbb{Z}) = H^n(K_u, K_{u,F}; \mathbb{Z})$ найдется покрытие $\tilde{v} = \{\tilde{V}_i : 1 \leq i \leq k\}$ пространства X'_α , комбинаторно вписанное в ω , такое, что $\mu_{\tilde{v}\omega}(z) = 0$ в группе $H^n(K_{\tilde{v}}, K_{\tilde{v},\Phi}; \mathbb{Z})$ (где $n > 4$). Положим теперь $V_i = p_\alpha^{-1}(\tilde{V}_i)$, $v = \{V_i : 1 \leq i \leq k\}$. Тогда v является конечным открытым покрытием многообразия M , комбинаторно вписанным в u , причем комплекс K_v совпадает с комплексом $K_{\tilde{v}}$, подкомплекс $K_{v,F}$ – с подкомплексом $K_{\tilde{v},\Phi}$ и гомоморфизм $\mu_{\tilde{v}\omega}$ – с гомоморфизмом μ_{vu} . Следовательно, $\mu_{vu}(z) = 0$ в группе $H^n(K_v, K_{v,F}; \mathbb{Z})$.

Предложение 8 доказано.

Утверждение теоремы теперь следует из предложений 5, 6 и 8.

Автор выражает признательность В. В. Федорчуку за постановку задачи и помощь в работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Федорчук В. В. Дифференцируемое многообразие с несовпадающими размерностями при СН // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 1. С. 149–160.
- [2] Федорчук В. В. О трансфинитной и когомологической размерностях 4-многообразий // Тр. МИАН. 1996. Т. 212. С. 193–212.
- [3] Александров П. С., Пасынков Б. А. Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973.
- [4] Alexandroff P. S. On the dimension of normal spaces // Proc. Roy. Soc. London. A. 1947. V. 189. P. 11–39.
- [5] Anderson R. D. Monotone interior dimension-raising mappings // Duke Math. J. 1952. V. 19. P. 359–366.
- [6] Кузьминов В. И. Гомологическая теория размерности // УМН. 1968. Т. 23. № 5 (142).
- [7] Anderson R. D. A continuous curve admitting monotone open maps onto all locally connected metric continua // Bull. Amer. Math. Soc. 1956. V. 62. P. 265.
- [8] Wilson D. C. Open mappings of the universal curve onto continuous curves // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 168. P. 497–515.
- [9] Дранишников А. Н. О проблеме П. С. Александрова // Матем. сб. 1988. Т. 135. С. 551–557.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: akarasev@academy.ru

Поступило
22.06.1998