Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. В. Каратаева, В. Д. Кошманенко, Обобщенная сумма операторов, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 5, 671–681

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1211>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 12:44:21

УДК 517.9

ОБОБЩЕННАЯ СУММА ОПЕРАТОРОВ

Т. В. Каратаева, В. Д. Кошманенко

Для полуограниченного снизу самосопряженного оператора A в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и сингулярного оператора V , действующего в A -шкале гильбертовых пространств, введено понятие обобщенной суммы $A\dot{+}V$. Найдены условия самосопряженности $A\dot{+}V$ в $\mathcal{H}$. В частности, показано, что если симметрический оператор V полуограничен или имеет шель в спектре, то существуют такие значения константы α , при которых обобщенная сумма $A\dot{+}\alpha V$ – самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$. Для симметрического сужения $\dot{A} = A \upharpoonright \mathcal{D}$, $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(A)$, с индексами дефекта $(1, 1)$ доказано, что каждое самосопряженное расширение $\tilde{A}$ оператора $\dot{A}$ допускает представление в виде обобщенной суммы $\tilde{A} = A\dot{+}V$.

Библиография: 18 названий.

1. Пусть $A = A^* \geq m_A > -\infty$ – самосопряженный полуограниченный снизу оператор в комплексном сепарабельном пространстве Гильберта $\mathcal{H}$ с нормой $\|\cdot\|$ и скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$.

Ассоциируем с оператором A шкалу гильбертовых пространств, так называемую A -шкалу:

$$\mathcal{H}_{--} \supset \mathcal{H}_- \supset \mathcal{H} \supset \mathcal{H}_+ \supset \mathcal{H}_{++}, \quad (1)$$

где $\mathcal{H}_{++}$ совпадает с областью определения $\mathcal{D}(A)$ оператора A в норме графика, $\mathcal{H}_+$ – пополнение $\mathcal{D}(A)$ относительно любой из эквивалентных норм:

$$\|\varphi\|_+^2 = ((A + mI)\varphi, \varphi), \quad m \geq 1 + |m_A|, \quad \varphi \in \mathcal{D}(A),$$

где I – тождественное преобразование, а $\mathcal{H}_{--}$ и $\mathcal{H}_-$ сопряжены соответственно к $\mathcal{H}_{++}$ и $\mathcal{H}_+$ относительно $\mathcal{H}$; в частности, пространство $\mathcal{H}_-$ совпадает с пополнением $\mathcal{H}$ по норме

$$\|f\|_-^2 = ((A + mI)^{-1}f, f), \quad f \in \mathcal{H}.$$

Очевидно, справедливы неравенства

$$\|\cdot\|_{--} \leq \|\cdot\|_- \leq \|\cdot\| \leq \|\cdot\|_+ \leq \|\cdot\|_{++},$$

где $\|\cdot\|_{ex}$ обозначает норму в соответствующем пространстве. Согласно [1] цепочка (1) образует оснащение пространства $\mathcal{H}$ с непрерывными и плотными вложениями.

Не теряя общности, ниже полагаем $A \geq 1$. Тогда можно считать, что

$$\|\varphi\|_{++} = \|A\varphi\|, \quad \|\varphi\|_+ = \|A^{1/2}\varphi\|, \quad \|f\|_- = \|A^{-1/2}f\|, \quad \|f\|_{--} = \|A^{-1}f\|.$$

При этом A действует как унитарное (изометричное) отображение в каждом из трех случаев:

$$\mathcal{H}_{++} \rightarrow \mathcal{H}, \quad \mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_-, \quad \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_{--}.$$

Пусть $\mathbf{A} \equiv A^{\text{cl}}$ обозначает замыкание оператора A как отображения из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}_{--}$.

Справедливы равенства (см. [1]):

$$(\omega, \mathbf{A}\varphi)_- = \langle \omega, \varphi \rangle = (\mathbf{A}^{-1}\omega, \varphi)_+, \quad \omega \in \mathcal{H}_-, \quad \varphi \in \mathcal{H}_+$$

и

$$\langle f, \varphi \rangle = (f, \varphi), \quad f \in \mathcal{H}, \quad \varphi \in \mathcal{H}_{++},$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – дуальное скалярное произведение.

Рассмотрим в A -шкале линейный сингулярный относительно $\mathcal{H}$ оператор V с областью определения $\mathcal{D}(V)$, плотной в $\mathcal{H}$, и областью значений $\mathcal{R}(V) \subset \mathcal{H}_{--}$. Сингулярность оператора V означает, что $\mathcal{R}(V)$ содержит элементы, не принадлежащие пространству $\mathcal{H}$.

Введем, следуя [1]–[4], понятие обобщенной суммы операторов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Оператор $A\tilde{+}V$ в $\mathcal{H}$, определенный согласно:

$$(A\tilde{+}V)\varphi := \mathbf{A}\varphi + V\varphi, \quad \varphi \in \mathcal{D}(A\tilde{+}V) := \{\varphi \in \mathcal{D}(V) \mid \mathbf{A}\varphi + V\varphi \in \mathcal{H}\}, \quad (2)$$

назовем *обобщенной суммой* операторов A и V .

Отметим, что область определения $\mathcal{D}(A\tilde{+}V)$ может содержать такие векторы $\varphi \in \mathcal{H}$, на которых оба значения $\mathbf{A}\varphi, V\varphi$ не принадлежат пространству $\mathcal{H}$.

ПРИМЕР 1. (Сингулярное возмущение ранга 1) Пусть вектор $\omega \in \mathcal{H}_- \setminus \mathcal{H}$, $\|\omega\|_- = 1$ и вещественная константа $\alpha \in \mathbb{R}^1$ фиксированы. Рассмотрим в A -шкале (1) ограниченный оператор

$$V\varphi = V_{\alpha, \omega}\varphi = \alpha \langle \varphi, \omega \rangle \omega, \quad \varphi \in \mathcal{H}_+ = \mathcal{D}(V).$$

Понятно, что обычная сумма $A + V_{\alpha, \omega}$ определена в $\mathcal{H}$ лишь на множестве

$$\mathcal{D}_\omega = \{\psi \in \mathcal{D}(A) \mid \langle \psi, \omega \rangle = 0\},$$

на котором эта сумма совпадает с симметрическим оператором

$$\dot{A} = A \mid \mathcal{D}_\omega.$$

В то же время нетрудно проверить, что обобщенная сумма $A\tilde{+}V_{\alpha, \omega}$ определена на области

$$\mathcal{D}(A\tilde{+}V_{\alpha, \omega}) = \left\{ \psi \in \mathcal{H}_+ \mid \psi = \varphi - \frac{\alpha}{1+\alpha} \langle \varphi, \omega \rangle \mathbf{A}^{-1}\omega, \quad \varphi \in \mathcal{D}(A) \right\},$$

на которой $A\tilde{+}V_{\alpha, \omega}$ является самосопряженным оператором в $\mathcal{H}$.

Более того, множество $\{A\tilde{+}V_{\alpha, \omega}\}_{\alpha \in \mathbb{R}^1 \cup \infty}$ совпадает с множеством всех самосопряженных расширений симметрического оператора $\dot{A}$ (см. [4]–[7]).

Таким образом, обобщенная сумма $A\tilde{+}V_{\alpha, \omega}$ придает корректный смысл формальному выражению $A + \alpha(\cdot, \omega)\omega$, $\omega \in \mathcal{H}_- \setminus \mathcal{H}$, $\alpha \in \mathbb{R}^1 \cup \infty$, известному в литературе как сингулярное возмущение ранга 1 (см. [5]–[10]).

2. В общем случае оператор $A\tilde{+}V$ может оказаться даже не плотно определенным в $\mathcal{H}$.

В этой работе исследуется вопрос о самосопряженности обобщенной суммы $A\tilde{+}V$ в пространстве $\mathcal{H}$ при различных ограничениях на V . Преимущественно рассматривается ситуация, когда оператор $V: \mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_-$, действующий в A -шкале, симметричен, $V \subset V^*$, т.е.

$$\langle V\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, V\psi \rangle, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{D}(V) \subset \mathcal{D}(V^*) \subset \mathcal{H}_+.$$

Отметим, что вектор $\psi \in \mathcal{H}_+$ принадлежит $\mathcal{D}(V^*)$, если линейный функционал $l_\psi(\varphi) = \langle V\varphi, \psi \rangle$ непрерывен по $\varphi \in \mathcal{D}(V)$ в $\mathcal{H}_+$. Тогда существует элемент $\omega \in \mathcal{H}_-$ такой, что $l_\psi(\varphi) = \langle \varphi, \omega \rangle$ и $\omega = V^*\psi$.

Если V симметричен, то $A\tilde{+}V$ автоматически эрмитов в $\mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} ((A\tilde{+}V)\varphi, \psi) &= \langle (\mathbf{A} + V)\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, (\mathbf{A} + V)\psi \rangle \\ &= (\varphi, (A\tilde{+}V)\psi), \quad \varphi, \psi \in \mathcal{D}(A\tilde{+}V). \end{aligned}$$

Этот факт систематически используется ниже.

Пусть γ_A – квадратичная форма, порожденная оператором A , т.е. γ_A – замыкание в $\mathcal{H}$ формы $(A\varphi, \psi)$, $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(A)$, и, следовательно, $\gamma_A(\varphi, \psi) = \langle \mathbf{A}\varphi, \psi \rangle$, $\varphi, \psi \in \mathcal{H}_+$. Пусть ν обозначает эрмитову квадратичную форму, порожденную симметрическим оператором V , т.е.

$$\nu(\varphi, \psi) = \langle V\varphi, \psi \rangle, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{D}(V).$$

Хорошо известная КЛМН-теорема [11] утверждает, что если форма ν подчинена форме γ_A :

$$|\nu[\varphi]| \leq b\gamma_A[\varphi] + a\|\varphi\|^2, \quad 0 \leq b < 1, \quad 0 \leq a, \quad (3)$$

то сумма форм $\tilde{\gamma} = \gamma_A + \nu$ ограничена снизу и замыкаема в $\mathcal{H}$ и с ее замыканием ассоциирован в $\mathcal{H}$ самосопряженный оператор $A_{\tilde{\gamma}}$.

ТЕОРЕМА 1. Если квадратичная форма $\nu[\varphi] = \langle V\varphi, \varphi \rangle$, порожденная симметрическим оператором $V: \mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_-$, удовлетворяет условию (3), то самосопряженный оператор $\tilde{A}_{\gamma}$, ассоциированный с замыканием в $\mathcal{H}$ формы $\tilde{\gamma} = \gamma_A + \nu$, совпадает с обобщенной суммой $\tilde{A} = A\tilde{+}V$, т.е. $A_{\tilde{\gamma}} = \tilde{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3) следует, что форма ν как и оператор V ограничены в $\mathcal{H}_+$. Поэтому можно считать, что область определения $\mathcal{D}(V) = \mathcal{H}_+$. По определению ассоциированного с квадратичной формой оператора (см., например, [11], [12]) имеем:

$$\begin{aligned} (A_{\tilde{\gamma}}\varphi, \psi) &= \tilde{\gamma}(\varphi, \psi) = \gamma_A(\varphi, \psi) + \nu(\varphi, \psi) \\ &= \langle \mathbf{A}\varphi, \psi \rangle + \langle V\varphi, \psi \rangle = \langle (\mathbf{A} + V)\varphi, \psi \rangle, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{D}(A_{\tilde{\gamma}}) \subset \tilde{\mathcal{H}}_+ \subset \mathcal{H}_+, \end{aligned}$$

где пространство $\tilde{\mathcal{H}}_+$ построено по норме $\|\varphi\|_+ = (\gamma_A[\varphi] + \nu[\varphi] + a\|\varphi\|^2)^{1/2}$, $\varphi \in \mathcal{D}(V)$. Таким образом, $\mathcal{D}(A_{\tilde{\gamma}}) \subset \mathcal{D}(A\tilde{+}V)$ и $A_{\tilde{\gamma}} \subset A\tilde{+}V$. Но оператор $A_{\tilde{\gamma}}$ самосопряжен, а $A\tilde{+}V$ по построению симметричен в $\mathcal{H}$. Поэтому

$$A_{\tilde{\gamma}} = A\tilde{+}V = \tilde{A}.$$

Оператор $A_{\tilde{\gamma}}$, определенный выше с помощью КЛМН-теоремы, часто называют *суммой* A и V в смысле форм. Теорема 1 показывает, что сумма операторов в смысле форм совпадает с обобщенной суммой операторов. В действительности понятие обобщенной суммы операторов значительно шире суммы в смысле форм. Ниже мы приводим ряд теорем, когда условие (3) не выполняется, а обобщенная сумма приводит к самосопряженному оператору.

3. Пусть оператор $V: \mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_-$, самосопряжен, $V = V^*$, т.е.

$$\langle V\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, V\psi \rangle, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{D}(V) = \mathcal{D}(V^*) \subset \mathcal{H}_+.$$

ТЕОРЕМА 2 (ср. [4], [13]). *Для каждого положительного самосопряженного оператора $V: \mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_-$, $\langle V\varphi, \varphi \rangle \geq 0$, $\varphi \in \mathcal{D}(V) \subset \mathcal{H}_+$, обобщенная сумма $\tilde{A} = A\tilde{+}V$ – самосопряженный в $\mathcal{H}$ оператор. При этом сумма квадратичных форм $\tilde{\gamma} = \gamma_A + \nu$ замыкаема в $\mathcal{H}$ и ассоциированный с ее замыканием самосопряженный в $\mathcal{H}$ оператор $A_{\tilde{\gamma}}$ совпадает с $\tilde{A}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что сейчас оператор V , вообще говоря, неограничен на $\mathcal{H}_+$ и, следовательно, условие (3) заведомо не выполняется.

Рассмотрим в $\mathcal{H}_+$ оператор $V_+ = \mathbf{A}^{-1}V$. Очевидно, что самосопряженность оператора $V: \mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_-$ эквивалентна самосопряженности оператора V_+ в $\mathcal{H}_+$. В силу положительности V оператор $I + V_+$ ограничен обратим, в частности, область значений $\mathcal{R}(I + V_+) = \mathcal{H}_+$. Поэтому благодаря унитарности $\mathbf{A}: \mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_-$ область значений $\mathcal{R}(\mathbf{A} + V) = \mathcal{R}(\mathbf{A}(I + V_+)) = \mathcal{H}_-$. Следовательно, область значений оператора $\tilde{A} = A\tilde{+}V$ совпадает со всем $\mathcal{H}$: $\mathcal{R}(\tilde{A}) = \mathcal{H}$. Поэтому $A\tilde{+}V$ самосопряжен, так как он симметричен.

Докажем замыкаемость формы $\tilde{\gamma}$ в пространстве $\mathcal{H}$, используя основной критерий замыкаемости (см. [12, теорема VI.1.17]). Пусть последовательность $\varphi_n \in \mathcal{D}(V)$ сходится к нулю в $\mathcal{H}$, $\varphi_n \rightarrow 0$, и, кроме того, $\tilde{\gamma}[\varphi_n - \varphi_m] \rightarrow 0$, $n, m \rightarrow \infty$. Тогда в силу положительности обеих форм γ_A и ν имеем $\gamma_A[\varphi_n - \varphi_m] \rightarrow 0$, $\nu[\varphi_n - \varphi_m] \rightarrow 0$ и $\gamma_A[\varphi_n] \rightarrow 0$, так как γ_A замкнута в $\mathcal{H}$. Поэтому $\varphi_n \rightarrow 0$ в $\mathcal{H}_+$. Но тогда и $\nu[\varphi_n] \rightarrow 0$, так как эта форма замыкаема в $\mathcal{H}_+$, поскольку порождена самосопряженным оператором. Таким образом, согласно основному критерию замыкаемости положительная форма $\tilde{\gamma}$ замыкаема в $\mathcal{H}$ и, следовательно, с ее замыканием ассоциирован самосопряженный оператор, обозначаемый $A_{\tilde{\gamma}}$. Его совпадение с $\tilde{A} = A\tilde{+}V$ устанавливается следующим образом. Пусть $\tilde{\mathcal{H}}_+$ – пополнение $\mathcal{D}(V)$ относительно нормы $\|\varphi\|_+ = (\gamma_A[\varphi] + \nu[\varphi])^{1/2}$. В силу $\|\cdot\|_+ \leq \|\cdot\|$ цепочку пространств $\mathcal{H}_- \supset \mathcal{H} \supset \mathcal{H}_+$ можно продолжить следующим образом:

$$\tilde{\mathcal{H}}_- \supset \mathcal{H}_- \supset \mathcal{H} \supset \mathcal{H}_+ \supset \tilde{\mathcal{H}}_+, \quad (4)$$

где $\tilde{\mathcal{H}}_-$ – сопряжено к $\tilde{\mathcal{H}}_+$. По построению ассоциированного с квадратичной формой оператора (см., например, [11]) $A_{\tilde{\gamma}}$ совпадает с сужением на $\mathcal{H}$ оператора канонического изоморфизма $\tilde{\mathbf{D}}: \tilde{\mathcal{H}}_+ \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}_-$, т.е. $A_{\tilde{\gamma}}\varphi = \tilde{\mathbf{D}}\varphi$, $\varphi \in \mathcal{D}(A_{\tilde{\gamma}}) = \{\varphi \in \tilde{\mathcal{H}}_+ \mid \tilde{\mathbf{D}}\varphi \in \mathcal{H}\}$. Покажем, что $\tilde{\mathbf{D}}\varphi$, $\varphi \in \mathcal{D}(A_{\tilde{\gamma}})$, совпадает с $\mathbf{A}\varphi + V\varphi$. Действительно, каждый вектор $\omega = \tilde{\mathbf{D}}\varphi = A_{\tilde{\gamma}}\varphi \in \mathcal{H}$ порождает линейный функционал $l_\varphi(\psi) = \tilde{\gamma}(\psi, \varphi) \equiv \langle \psi, \tilde{\mathbf{D}}\varphi \rangle = \langle \psi, \omega \rangle = (\psi, \omega)$, который непрерывен по ψ как в $\tilde{\mathcal{H}}_+$, так и в $\mathcal{H}$. В силу неравенства $\|\cdot\|_+ \leq \|\cdot\|$ этот функционал непрерывен также и на $\mathcal{H}_+$. Поэтому $\omega = \mathbf{A}\varphi + V\varphi$, так как, очевидно, $l_\varphi(\psi) = l_\varphi^\mathbf{A}(\psi) + l_\varphi^V(\psi)$, где оба функционала $l_\varphi^\mathbf{A}(\psi) := \langle \psi, \mathbf{A}\varphi \rangle$,

$l_{\varphi}^V(\psi) := \nu(\psi, \varphi) = \langle \psi, V\varphi \rangle$ непрерывны по $\psi \in \mathcal{H}_+$. Теперь равенство $A_{\tilde{\gamma}} = \tilde{A} = A\tilde{+}V$ следует из определения обобщенной суммы операторов.

Аналогичная теорема справедлива и в случае произвольного самосопряженного оператора $V: \mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_-$, $V > -1$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть (неограниченный) самосопряженный оператор $V: \mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_-$ удовлетворяет условию $\nu[\varphi] = \langle V\varphi, \varphi \rangle \geq m_V \|\varphi\|_+^2$, $m_V > -1$, $\varphi \in \mathcal{D}(V)$. Тогда квадратичная форма $\tilde{\gamma} = \gamma_A + \nu$ замыкаема и ограничена снизу в $\mathcal{H}$ и ассоциированный с ее замыканием самосопряженный в $\mathcal{H}$ оператор $A_{\tilde{\gamma}}$ совпадает с обобщенной суммой $\tilde{A} = A\tilde{+}V$, т.е. $A_{\tilde{\gamma}} = \tilde{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Замыкаемость формы $\tilde{\gamma}$ в $\mathcal{H}$ устанавливается последовательным применением двух предыдущих теорем. Действительно, так как оператор V самосопряжен, он допускает ортогональное разложение в сумму двух операторов:

$$V = V_1 \oplus V_2, \quad 0 \leq V_1, \quad -1 < V_2 < 0.$$

По теореме 2 форма $\tilde{\gamma}_1 = \gamma_A + \nu_1$ положительна и замыкаема в $\mathcal{H}$, где $\nu_1[\varphi] = \langle V_1\varphi, \varphi \rangle$. Пусть $\tilde{A}_1$ – ассоциированный с ней оператор в $\mathcal{H}$. Теперь для формы $\nu_2[\varphi] = \langle V_2\varphi, \varphi \rangle$ выполняется условие: $|\nu_2[\varphi]| \leq b\tilde{\gamma}_1[\varphi]$, $b < 1$. Поэтому по теореме 1 форма $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_1 + \nu_2 \equiv \gamma_A + \nu$ замыкаема в $\mathcal{H}$. Далее, пусть $\tilde{\mathcal{H}}_+$ обозначает гильбертово пространство, полученное пополнением $\mathcal{D}(V)$ относительно нормы

$$\|\varphi\|_+^2 = (\gamma_A[\varphi] + \nu_1[\varphi] + \nu_2[\varphi])^{1/2},$$

которая положительна в силу условия теоремы. Понятно, что эта норма сильнее, чем $\|\varphi\|^2 = (\gamma_A[\varphi])^{1/2}$. Таким образом, цепочку пространств $\mathcal{H}_- \supset \mathcal{H} \supset \mathcal{H}_+$ снова можно продолжить аналогично (4). Дальнейшие аргументы по существу совпадают с доказательством теоремы 2.

4. Покажем, что для любого самосопряженного полуограниченного снизу оператора $V: \mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_-$ существуют значения параметра α , при которых обобщенная сумма $A\tilde{+}\alpha V$ является самосопряженным оператором в $\mathcal{H}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $V: \mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_-$ самосопряжен и полуограничен снизу,

$$m_V \|\varphi\|_+^2 \leq \langle V\varphi, \varphi \rangle, \quad -\infty < m_V, \quad \varphi \in \mathcal{D}(V).$$

Тогда: 1) если $-1 < m_V$, то $A\tilde{+}\alpha V$ самосопряжен при всех $0 < \alpha \leq 1$;

2) если $m_V \leq -1$, то $A\tilde{+}\alpha V$ самосопряжен при всех $0 < \alpha < 1/|m_V| = -1/m_V$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) прямо следует из теоремы 3.

Пусть $m_V \leq -1$. Рассмотрим вместо V оператор $V' = V - (c+1)\mathbf{A}$, $-\infty < c < m_V$. Очевидно,

$$m_{V'} \langle \mathbf{A}\varphi, \varphi \rangle = m_{V'} \|\varphi\|_+^2 < \langle V'\varphi, \varphi \rangle, \quad -1 < m_{V'} = m_V - c - 1.$$

Поэтому в силу теоремы 3 обобщенная сумма $\tilde{A}' = A\tilde{+}V' = A\tilde{+}(V - (c+1)\mathbf{A})$ – самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$. Следовательно, и оператор

$$\tilde{A} = -\frac{1}{c}\tilde{A}' = A\tilde{+}\left(-\frac{1}{c}\right)V = A\tilde{+}\alpha V, \quad 0 < \alpha < \frac{1}{|m_V|},$$

также самосопряжен в $\mathcal{H}$.

Таким образом, если нижняя грань m_V оператора V близка к $-\infty$, то для самосопряженности оператора $A\tilde{+}\alpha V$ константа α должна быть близкой к 0.

5. Рассмотрим случай, когда $V: \mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_-$ ограничен сверху.

ТЕОРЕМА 5. Если оператор $V: \mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_-$ симметричен и его верхняя грань меньше минус единицы,

$$\langle V\varphi, \varphi \rangle \leq M_V \|\varphi\|_+^2, \quad M_V < -1, \quad \varphi \in \mathcal{D}(V),$$

то $A\dot{+}V$ самосопряжен в $\mathcal{H}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что верхняя грань оператора $\mathbf{A} + V$ меньше нуля, $(1+M_V)\mathbf{A} < 0$. Поэтому область значений $\mathcal{R}(\mathbf{A}+V) = \mathcal{H}_-$. Следовательно, $\mathcal{R}(A\dot{+}V) = \mathcal{H}$. Поэтому $A\dot{+}V$ самосопряжен, поскольку он симметричен.

Оказывается, что результат, аналогичный теореме 4, справедлив и для любого оператора V , ограниченного сверху: для подходящих значений параметра α оператор $A\dot{+}\alpha V$ – самосопряжен в $\mathcal{H}$.

ТЕОРЕМА 6. Если оператор $V: \mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_-$ симметричен и ограничен сверху,

$$\langle V\varphi, \varphi \rangle \leq M_V \|\varphi\|_+^2, \quad M_V \in \mathbb{R}^1, \quad \varphi \in \mathcal{D}(V),$$

то $A\dot{+}\alpha V$ самосопряжен в $\mathcal{H}$ при всех $\alpha > -1/M_V$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $-1 \leq M_V$ (случай $M_V < -1$ рассмотрен в теореме 5). Рассмотрим вместо V оператор $V' = V - (c+1)\mathbf{A}$, где $c > M_V$. Тогда

$$\langle V'\varphi, \varphi \rangle = \langle V\varphi, \varphi \rangle - (c+1)\langle \mathbf{A}\varphi, \varphi \rangle \leq (M_V - c - 1)\langle \mathbf{A}\varphi, \varphi \rangle < M_{V'} \|\varphi\|_+^2,$$

где $M_{V'} = M_V - c - 1 < -1$. В силу предыдущей теоремы оператор $\tilde{A}' = A\dot{+}V'$ самосопряжен в $\mathcal{H}$. Поэтому и оператор

$$\tilde{A} = -\frac{1}{c}\tilde{A}' = A\dot{+}\left(-\frac{1}{c}\right)V = A\dot{+}\alpha V, \quad \alpha = -\frac{1}{c}, \quad c > M_V,$$

также самосопряжен в $\mathcal{H}$.

6. Пусть $\rho(V)$ обозначает множество регулярных точек оператора $V: \mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_-$, т.е. $\rho(V)$ состоит из всех $z \in \mathbb{C}$ таких, что оператор $(V - z\mathbf{A})^{-1}: \mathcal{H}_- \rightarrow \mathcal{H}_+$ существует, ограничен и определен на всем $\mathcal{H}_-$. Множество $\mathbb{C} \setminus \rho(V)$ называем спектром оператора V .

ТЕОРЕМА 7. Пусть $V: \mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_-$ – симметричен. Если $-1 \in \rho(V)$, то $A\dot{+}V$ самосопряжен в $\mathcal{H}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор $A\dot{+}V$ симметричен по построению. В действительности, он самосопряжен, так как его область значений $\mathcal{R}(A\dot{+}V)$ совпадает со всем пространством $\mathcal{H}$. Последний факт следует из условия $-1 \in \rho(V)$, которое обеспечивает равенство $\mathcal{R}(\mathbf{A} + V) = \mathcal{H}_-$.

Отметим, что в последней теореме оператор V может быть неполуограниченным ни снизу, ни сверху.

В терминах оператора $V_+ = \mathbf{A}^{-1}V$ в $\mathcal{H}_+$ условие $-1 \in \rho(V)$ эквивалентно тому, что $V_+ + I$ ограниченно обратим в $\mathcal{H}_+$. Таким образом, из теоремы 7 получаем следствие.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если для некоторого симметричного в $\mathcal{H}_+$ оператора V_+ существует и ограничен оператор $(I + V_+)^{-1}$, то для $V = \mathbf{A}V_+$ обобщенная сумма $\tilde{A} = A\dot{+}V$ – самосопряженный в $\mathcal{H}$ оператор.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $V: \mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_-$ симметрический оператор, имеющий вещественную щель (a, b) в спектре, т.е. $(a, b) \subset (\rho(V) \cap \mathbb{R}^1)$. Тогда для любого $\alpha = -1/c$, $a < c < b$, обобщенная сумма $A\dot{+}\alpha V$ – самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $V' = V - (c+1)\mathbf{A}$, $a < c < b$. Тогда оператор $I + \mathbf{A}^{-1}V'$ ограниченно обратим в $\mathcal{H}_+$. Согласно следствию 1 обобщенная сумма $A\dot{+}V' = A\dot{+}(V - (c+1)\mathbf{A})$ – самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$. Но тогда и оператор $-1/c(A\dot{+}\alpha V') = -1/c(A\dot{+}(V - (c+1)\mathbf{A})) = A\dot{+}\alpha V$, $\alpha = -1/c$, – самосопряжен в $\mathcal{H}$.

7. ТЕОРЕМА 9. Пусть $\mathbf{T}: \mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_-$ (неограниченный) самосопряженный оператор. Предположим, что множество $\mathcal{D} := \{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{T}) \mid \mathbf{T}\varphi \in \mathcal{H}\}$ является его областью существенной самосопряженности. Тогда оператор $T := \mathbf{T} \mid \mathcal{D}$, $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}$, самосопряжен в $\mathcal{H}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия теоремы множество $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{H}$. Рассмотрим в $\mathcal{H}$ сопряженный к T оператор T^* . Вектор $\psi \in \mathcal{D}(T^*)$, если линейный функционал $l_\psi(\varphi) = (T\varphi, \psi)$ непрерывен по $\varphi \in \mathcal{D}$ в $\mathcal{H}$. Тогда существует вектор $\psi^* \in \mathcal{H}$ такой, что $l_\psi(\varphi) = (\varphi, \psi^*)$ и $T^*\psi = \psi^*$. Но, очевидно, что функционал $l_\psi(\varphi) = (\varphi, \psi^*)$ непрерывен по φ и в $\mathcal{H}_+$. Таким образом, он имеет единственное представление в виде $l_\psi(\varphi) = \langle \varphi, \omega^* \rangle$, где $\omega^* \in \mathcal{H}_-$. При этом $\langle \varphi, \psi^* \rangle = \langle \varphi, \omega^* \rangle$, $\varphi \in \mathcal{D}$, а также $\omega^* = \psi^* \in \mathcal{H}$. Учитывая условие теоремы, заключаем, что $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{T})^* = \mathcal{D}(\mathbf{T})$. Следовательно, $\psi \in \mathcal{D}$ и $T^*\psi = T\psi$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $\mathbf{T}: \mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_-$ – ограниченный самосопряженный оператор и множество $\mathcal{D} := \{\varphi \in \mathcal{H}_+ \mid \mathbf{T}\varphi \in \mathcal{H}\}$ плотно в $\mathcal{H}_+$, то оператор $T := \mathbf{T} \mid \mathcal{D}$ самосопряжен в $\mathcal{H}$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $V: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_{-1}$ самосопряжен и ограничен. Если область определения $\mathcal{D}(A\dot{+}V) = \{\varphi \in \mathcal{H}_+ \mid (\mathbf{A} + V)\varphi \in \mathcal{H}\}$ обобщенной суммы $A\dot{+}V$ плотна в $\mathcal{H}_+$, то $A\dot{+}V$ самосопряжен в $\mathcal{H}$.

ТЕОРЕМА 10. Пусть V_+ – симметрический плотно определенный оператор в $\mathcal{H}_+$. Если

$$\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{R}(V_+ + I), \quad (5)$$

то $A\dot{+}V$ самосопряжен в $\mathcal{H}$, где $V = \mathbf{A}V_+: \mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_-$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (5) следует существование обратного оператора $(V_+ + I)^{-1}$, поскольку область $\mathcal{D}(A)$ плотна в $\mathcal{H}$ и V_+ симметричен. Далее, для каждого $\psi = (V_+ + I)^{-1}f$, $f \in \mathcal{D}(A)$, имеем

$$(\mathbf{A} + V)\psi = \mathbf{A}(I + V_+)\psi = \mathbf{A}f = Af = h \in \mathcal{H}.$$

В силу $A \geq 1$ множество векторов $h = Af$ исчерпывает все пространство $\mathcal{H}$, когда f пробегает $\mathcal{D}(A)$. Поэтому оператор $(\mathbf{A} + V) \mid \mathcal{R}(V_+ + I)$, совпадающий, очевидно, с $A\dot{+}V$, самосопряжен в $\mathcal{H}$.

ПРИМЕР 2 (Оператор Шрёдингера с обобщенным потенциалом).

Пусть $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3, d\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $A = -\Delta + I$, где Δ – оператор Лапласа в $L^2(\mathbb{R}^3, d\mathbf{x})$. Пусть оператор $V_\mu: W_2^1 \rightarrow W_2^{-1}$ действует как мультипликатор на вещественную обобщенную функцию $\mu \in W_2^{-1}$ (обобщенный потенциал):

$$(V_\mu \varphi)(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) \in W_2^{-1}, \quad \varphi \in W_2^1,$$

где $W_2^{\pm 1} = W_2^{\pm 1}(\mathbb{R}^3)$ – соболевские пространства порядка ± 1 . Рассмотрим в W_2^1 оператор $K_\mu = (I - \Delta)^{-1}V_\mu$:

$$(K_\mu \varphi)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mu(\mathbf{y})\varphi(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \varphi \in W_2^1, \quad (6)$$

где $G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \exp(-i|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)/(4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$. Предположим, что уравнение

$$f = K_\mu \varphi + \varphi, \quad \varphi \in W_2^1, \quad (7)$$

разрешимо относительно φ для каждого $f \in \mathcal{D}(-\Delta)$. Тогда в силу теоремы 10 обобщенный оператор Шрёдингера $H = -\Delta + \mu \equiv -\Delta + V_\mu$ является самосопряженным оператором в $L^2(\mathbb{R}^3)$. Понятно также, что оператор $H = -\Delta + \mu$ самосопряжен в $L^2(\mathbb{R}^3)$ и в том случае, когда для оператора K_μ , определенного равенством (6), справедлива альтернатива Фредгольма, в частности, когда K_μ – компактный оператор в W_2^1 .

ПРИМЕР 3 (Оператор Шрёдингера с потенциалом на фрактале).

Пусть в примере 2 носитель $\text{supp } \mu = \Gamma$ – самоподобный фрактал в $\mathbb{R}^3$. Пусть размерность Хаусдорфа $\dim_H \Gamma = d$ удовлетворяет условию $1 < d < 3$. Тогда согласно теореме 31.3 (см. [14]) оператор $K_\mu = (I - \Delta)^{-1}V_\mu$ является компактным в W_2^1 . Таким образом, обобщенный оператор Шрёдингера $H = -\Delta + \mu$ самосопряжен в $L^2(\mathbb{R}^3)$.

Отметим, что H является одним из самосопряженных расширений симметрического оператора $-\tilde{\Delta} = -\Delta \mid \{\varphi \in W_2^1(\mathbb{R}^3) \mid \varphi(x) = 0, x \in \Gamma\}$.

ПРИМЕР 4 (Абстрактный аналог бесконечного числа точечных возмущений).

Пусть $V: \mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_-$ – симметрический оператор вида:

$$V\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle \varphi, \mathbf{A}e_i \rangle \omega_i, \quad \varphi \in \mathcal{D}(V) \subset \mathcal{H}_+, \quad \omega_i = \mathbf{A}e_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}^1, \quad (8)$$

где $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ – ортонормированная система элементов в пространстве $\mathcal{H}_+$ и все векторы $\omega_i \in \mathcal{H}_- \setminus \mathcal{H}$.

Предположим, что все $\lambda_i \neq -1$. Тогда оператор V удовлетворяет условию теоремы 7 и, следовательно, оператор $\tilde{A} = A + V$ самосопряжен в $\mathcal{H}$. Он допускает следующее описание:

$$\mathcal{D}(\tilde{A}) = \left\{ \psi \in \mathcal{H}_+ \mid \psi = \varphi - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{1 + \lambda_i} \langle \varphi, \omega_i \rangle e_i, \quad \varphi \in \mathcal{D}(A) \right\}, \quad (9)$$

$$\tilde{A}\psi = A\varphi.$$

Действительно, из (8), (9) легко получаем, что для каждого $\psi \in \mathcal{D}(\tilde{A})$:

$$(\mathbf{A} + V)\psi = A\varphi + \sum_{i=1}^{\infty} [-(1 + \lambda_i^{-1})^{-1} + \lambda_i - \lambda_i(1 + \lambda_i^{-1})^{-1}] \langle \varphi, \omega_i \rangle \omega_i = A\varphi.$$

Отметим, что если $\lambda_i = -1$ для некоторого i , то $(\mathbf{A} + V)e_i = (A + V)e_i = 0$. Нетрудно убедиться, что и в этом случае оператор $A + V$ самосопряжен в $\mathcal{H}$.

ПРИМЕР 5 (Оператор Шрёдингера с потенциалом на простом слое).

Пусть в примере 2

$$\mu(x, y, z) = \rho(x, y) \delta_S(x, y, z), \quad x, y, z \in \mathbb{R}^1,$$

где $\delta_S(x, y, z)$ – обобщенная функция (простой слой [15]), сосредоточенная на плоскости $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = z_0\}$ в $\mathbb{R}^3$, а $\rho(x, y)$ – вещественная непрерывная плотность.

Рассмотрим оператор $V_\rho: W_2^1 \rightarrow W_2^{-1}$, действующий как обобщенный потенциал

$$(V_\rho \varphi)(x, y, z) = \rho(x, y) \varphi(x, y, z_0) \delta_{z_0}(z) \in W_2^{-1}, \quad \varphi \in W_2^1,$$

где $\delta_{z_0}(z)$ – обычная функция Дирака, сосредоточенная в точке z_0 .

Нетрудно видеть, что множество $\{\varphi \in W_2^1 \mid \varphi(x, y, z_0) = 0\}$ плотно в $L^2(\mathbb{R}^3)$ и в то же время составляет собственное подпространство в W_2^1 . Последний факт следует из того, что 2,1-емкость плоскости в $\mathbb{R}^3$ положительна, т.е. $C_{2,1}(\mathbb{R}^2) > 0$ (см. [16]), что в свою очередь вытекает из неравенства $mq > k$, где $m = 2$, $q = 1$, $k = 1$ – коразмерность плоскости в $\mathbb{R}^3$. Таким образом, оператор $V_\rho: W_2^1 \rightarrow W_2^{-1}$ – симметричен и сингулярен относительно $L^2(\mathbb{R}^3)$.

Предположим, что для некоторого $\varepsilon > 0$ и всех $c \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ уравнение

$$\Delta \varphi = c V_\rho \varphi + \varphi, \quad \varphi \in W_2^1,$$

имеет лишь тривиальное решение. Это гарантирует ограниченную обратимость оператора $(-\Delta + I)^{-1} V_\rho$ в W_2^1 . В силу следствия 1 обобщенная сумма $(-\Delta \dot{+} V_\rho)$ – самосопряженный оператор в $L^2(\mathbb{R}^3)$.

8. Пусть $\tilde{A} \neq A$ – самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$ такой, что множество

$$\mathcal{D} = \{\psi \in \mathcal{D}(\tilde{A}) \cap \mathcal{D}(A) \mid \tilde{A}\psi = A\psi\}$$

плотно в $\mathcal{H}$. Тогда сужение $\dot{A} = A \mid \mathcal{D}$ определяет симметрический оператор $\dot{A}$ с нетривиальными индексами дефекта $\mathbf{n}^\pm(\dot{A})$. Предположим, что $\mathbf{n}^\pm(\dot{A}) = (1, 1)$. В этом случае пишем $\tilde{A} \in \mathcal{A}_s^1(A)$. Пусть $\mathcal{N}_0 = \{c\eta\}_{c \in \mathbb{C}}$ обозначает дефектное подпространство оператора $\dot{A}$, где $\eta \perp \tilde{A}\mathcal{D}$, $\|\eta\| = 1$, $\dot{A}^* \eta = 0$.

Согласно теории самосопряженных расширений [17], [18] (см. также [7]–[9]) резольвента каждого оператора $\tilde{A} \in \mathcal{A}_s^1(A)$ имеет представление

$$(\tilde{A} - zI)^{-1} = (A - zI)^{-1} + b_z^{-1}(\cdot, \eta_{\bar{z}}) \eta_z, \quad z \in \rho(\tilde{A}),$$

где $\eta_z = A(A - zI)^{-1} \eta$, а скалярная функция b_z удовлетворяет тождество

$$b_z - b_{\bar{z}} + (z - \bar{z})(\eta_z, \eta_{\bar{z}}) = 0, \quad \bar{b}_z = b_{\bar{z}}, \quad \zeta, z \in \rho(\tilde{A}).$$

ТЕОРЕМА 11. Каждый оператор $\tilde{A} \in \mathcal{A}_s^1(A)$ допускает представление в виде обобщенной суммы:

$$\tilde{A} = A \dot{+} V,$$

где V – сингулярный оператор ранга 1, действующий в A -шкале (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор $\tilde{A} \in \mathcal{A}_s^1(A)$ имеет следующее описание (см. [8]):

$$\mathcal{D}(\tilde{A}) = \{g \in \mathcal{H} \mid g = f + b_{z,f}^{-1} a_{z,f} \eta_z, \quad f \in \mathcal{D}(A)\}, \quad a_{z,f} = ((A - z)f, \eta_{\bar{z}}),$$

$$(\tilde{A} - zI)g = (A - zI)f,$$

где регулярная точка $z \in \rho(\tilde{A})$ фиксирована. Предположим, не теряя общности, что $0 \in \rho(\tilde{A})$. Тогда

$$\mathcal{D}(\tilde{A}) = \{g \in \mathcal{H} \mid g = f + b^{-1} \langle f, \omega \rangle \eta, \quad f \in \mathcal{D}(A)\}, \quad \tilde{A}g = Af,$$

где $b = b_{z=0}$, $\omega = \mathbf{A}\eta$.

В случае $\omega \in \mathcal{H}_- \setminus \mathcal{H}$ теорема 11 уже доказана (см. теорему 4.1 в [2], а также пример 1).

Пусть $\omega \in \mathcal{H}_- \setminus \mathcal{H}_-$. Тогда множество $\mathcal{D}$ совпадает с $\mathcal{D}_\omega = \{\psi \in \mathcal{H}_+ \mid \langle \psi, \omega \rangle = 0\}$, которое плотно в $\mathcal{H}_+$. Как следствие, имеем,

$$\mathcal{H}_+ \cap \mathcal{N}_0 = \{0\}.$$

Поэтому корректно определена прямая сумма подпространств

$$\mathcal{H}_+ \dot{+} \mathcal{N}_0 = \{f \dot{+} c\eta \mid f \in \mathcal{H}_+, \quad c \in \mathbf{C}\},$$

которая превращается в гильбертово пространство (обозначим его $\tilde{\mathcal{H}}_+$) относительно скалярного произведения:

$$(f \dot{+} c_1 \eta, g \dot{+} c_2 \eta)_{\tilde{\mathcal{H}}_+} = (f, g)_+ + \bar{c}_2 (f, \eta) + c_1 (\eta, g) + c_1 \bar{c}_2 (\eta, \eta).$$

Отметим, что для любого $0 \neq \psi = f \dot{+} c\eta \in \tilde{\mathcal{H}}_+$

$$\|\psi\|_{\tilde{\mathcal{H}}_+}^2 = \|f\|_+^2 + |c|^2 \|\eta\|^2 + 2 \operatorname{Re}(f, c\eta) > 0.$$

Введем на $\tilde{\mathcal{H}}_+$ ограниченный, но несимметричный оператор V , зависящий от параметра $k \in \mathbb{R}^1$ и действующий по правилу

$$V\psi = k(\psi, A^{-1}\eta)_{\tilde{\mathcal{H}}_+} \omega = k[(f, A^{-1}\eta)_+ + c\|\eta\|^2], \quad \psi = f \dot{+} c\eta \in \tilde{\mathcal{H}}_+.$$

Тогда для $\psi = f \dot{+} \eta \in \tilde{\mathcal{H}}_+$ имеем

$$(\mathbf{A} + V)\psi = \mathbf{A}f + \mathbf{A}\eta + Vf + V\eta = \mathbf{A}f + \omega + k[(f, A^{-1}\eta)_+ \omega + \omega],$$

где учтено, что $\|\eta\| = 1$. В частности, на векторе $A^{-1}\eta \dot{+} b^{-1}\eta \in \tilde{\mathcal{H}}_+$ получаем

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + V)(A^{-1}\eta \dot{+} b^{-1}\eta) &= \mathbf{A}A^{-1}\eta + b^{-1}\mathbf{A}\eta + VA^{-1}\eta + b^{-1}V\eta \\ &= \eta + b^{-1}\omega + kb^{-1}[(A^{-1}\eta, A^{-1}\eta)_+ \omega + \omega] \\ &= \eta + b^{-1}\omega + kb^{-1}[\|\eta\|_-^2 \omega + \omega]. \end{aligned}$$

Если положить $k^{-1} = 1 + b^{-1}\|\eta\|_-^2$, то

$$(\tilde{\mathbf{A}} + V)(A^{-1}\eta \dot{+} b^{-1}\eta) = \eta.$$

Таким образом, с учетом того, что для всех $f \in \mathcal{D}_\omega = \mathcal{D}$

$$Vf = k(f, A^{-1}\eta)_+ \omega = 0,$$

закключаем, что на $\mathcal{D}(\tilde{A})$ операторы $\mathbf{A} + V$ и $\tilde{A} \in \mathcal{A}_s^1(A)$ совпадают. Этим доказано равенство $A \dot{+} V = \tilde{A}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Березанский Ю. М. Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных. Киев: Наукова Думка, 1978.
- [2] Крейн М. Г., Яврян В. А. О функциях спектрального сдвига, возникающих при возмущениях положительного оператора // J. Operator Theory. 1981. V. 6. P. 155–191.
- [3] Albeverio S., Koshmanenko V. On the problem of the right Hamiltonian under singular form-sum perturbations. SFB 237 Preprint, Nr. 375, Institut für Mathematik Ruhr-Universität-Bochum, 1997. (to appear in Rev. Math. Phys.).
- [4] Кошманенко В. Д. Сингулярные билинейные формы и самосопряженные расширения симметрических операторов // Спектральный анализ дифференциальных операторов.. Киев: Институт математики 1980. С. 37–48.
- [5] Gesztesy F., Simon B. Rank-one perturbations at infinite coupling // J. Funct. Anal. 1995. V. 128. P. 245–252.
- [6] Kiselev A., Simon B. Rank-one perturbations with infinitesimal coupling // J. Funct. Anal. 1995. V. 130. P. 345–356.
- [7] Кошманенко В. Д. Сингулярные билинейные формы в теории возмущений самосопряженных операторов. Киев: Наукова Думка, 1993.
- [8] Albeverio S., Koshmanenko V. Singular rank one perturbations of self-adjoint operators and Krein theory of self-adjoint extensions // Potential Anal. 1999 (to appear).
- [9] Koshmanenko V. D. Perturbations of self-adjoint operators by singular bilinear forms // Ukrainian Math. J. 1989. V. 41. P. 1–14.
- [10] Кошманенко В. Д. Сингулярные возмущения с бесконечной константой связи // Функцион. анализ и его прилож. 1999 (в печати).
- [11] Reed M., Simon B. Methods of Modern Mathematical Physics. II. Fourier Analysis, Self-Adjointness. New York–San Francisco–London: Academic Press, 1975.
- [12] Kato T. Perturbation Theory for Linear Operators. Berlin–New York: Springer-Verlag, 1980.
- [13] Березанский Ю. М. Билинейные формы и гильбертовы оснащения // Спектральный анализ дифференциальных операторов. Киев: Институт математики, 1980. С. 83–106.
- [14] Triebel H. Fractals and Spectra Related to Fourier Analysis and Functional Spaces. Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser Verlag, 1997.
- [15] Владимиров В. С. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1981.
- [16] Hedberg L. I. Spectral synthesis in Sobolev spaces and uniqueness of solutions of the Dirichlet problem // Acta Math. 1981. V. 147. P. 237–264.
- [17] Ахизер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966.
- [18] Крейн М. Г. Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения. I // Матем. Сб. 1947. Т. 20. №3. С. 431–495.