Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Карацуба, Двойные суммы Kloostermana, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 5, 682–687

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1212>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 14:29:05

УДК 511

ДВОЙНЫЕ СУММЫ КЛООСТЕРМАНА

А. А. Карацуба

Получены оценки неполных двойных сумм Клоостермана с весами.
Библиография: 5 названий.

В работах [1]–[5] автор оценил аналоги неполных сумм Клоостермана и дал приложения полученных оценок к некоторым арифметическим задачам. Метод указанных работ дает возможность оценить двойные суммы Клоостермана с весами. Именно такие суммы достаточно часто встречаются в приложениях. Теоремы настоящей статьи являются обобщениями теоремы 4 из [5].

Введем необходимые обозначения. Везде ниже $m > 1$, m – натуральное число, a и b – целые числа; не оговаривая особо, полагаем, что x и y принимают значения натуральных чисел, взаимно-простых с m ; символами x^* , y^* обозначаем натуральные числа с условием $x^*x \equiv 1 \pmod{m}$, $y^*y \equiv 1 \pmod{m}$, $1 \leq x^*, y^* < m$; $\xi(x)$ и $\eta(y)$ – произвольные комплекснозначные функции аргументов x и y ; $0 < X < X_1 \leq 2X$, $0 < Y < Y_1 \leq 2Y$; положительные числа ξ , η , ξ_0 , η_0 , ξ_1 определяются равенствами:

$$\begin{aligned}\xi &= \max_{X < x \leq X_1} |\xi(x)|; & \eta &= \max_{Y < y \leq Y_1} |\eta(y)|; \\ \xi_0 &= \sum_{X < x \leq X_1} |\xi(x)|; & \eta_0 &= \sum_{Y < y \leq Y_1} |\eta(y)|; \\ \xi_1 &= \sum_{X < x \leq X_1} |\xi(x)|^2.\end{aligned}$$

Для доказательства теорем нам нужна будет следующая

ЛЕММА. Пусть $m > 1$, m – целое число, k – натуральное число, X , X_1 такие, что

$$3 \leq X, \quad k < X < X_1 \leq 2X, \quad k2^{2k-1}X^{2k-1} < m.$$

Рассмотрим сравнение

$$x_1^* + \dots + x_k^* \equiv x_{k+1}^* + \dots + x_{2k}^* \pmod{m},$$

где $X < x_1, \dots, x_{2k} \leq X_1$, $(x_1, m) = \dots = (x_{2k}, m) = 1$. Тогда для количества $I = I_k(X)$ его решений справедлива оценка:

$$I \leq (2k)^{8k^3} X^k (\log X)^{4k^2}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-00580.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой леммы содержится в [3] (см., также [5, теорема 2]). Простые и, вместе с тем, более точные при определенных соотношениях параметров варианты этой леммы получены в [2].

Рассмотрим кратную тригонометрическую сумму $W = W(a, b)$,

$$W = \sum_{X < x \leq X_1} \sum_{Y < y \leq Y_1} \xi(x) \eta(y) \exp \left(\frac{2\pi i}{m} (ax^*y^* + bxy) \right).$$

Сумму W естественно называть *кратной (двойной) суммой Клоостермана с весами*. Если произведение $(X_1 - X)(Y_1 - Y)$ меньше m , то W будем называть *короткой* или *неполной суммой*.

ТЕОРЕМА 1. Пусть k и s – натуральные числа, числа X, X_1, Y, Y_1 удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} 3 &\leq X, & k < X < X_1 &\leq 2X, & k2^{2k-1}X^{2k-1} &< m; \\ 3 &\leq Y, & s < Y < Y_1 &\leq 2Y, & s2^{2s-1}Y^{2s-1} &< m; \end{aligned}$$

a и b – целые числа, причем $(a, m) = d \geq 1$. Тогда для $|W|$ справедлива оценка:

$$|W| \leq \xi_0 \eta_0 \Delta,$$

где

$$\Delta = (2k)^{\frac{4k^2}{s}} (2s)^{\frac{4s^2}{k}} (\xi_0^{-1} \xi \sqrt{X})^{\frac{1}{s}} (\eta_0^{-1} \eta \sqrt{Y})^{\frac{1}{k}} (\text{sdm } Y)^{\frac{1}{2ks}} (\log X)^{\frac{2k}{s}} (\log Y)^{\frac{2s}{k}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем следовать рассуждениям теоремы 3 из [5]. Переходя к неравенствам, получаем:

$$|W| \leq \sum_{X < x \leq X_1} |\xi(x)| \left| \sum_{Y < y \leq Y_1} \eta(y) \exp \left(\frac{2\pi i}{m} (ax^*y^* + bxy) \right) \right|.$$

Возведем обе части этого неравенства в степень s и воспользуемся неравенством Гёльдера; находим:

$$|W|^s \leq A^{s-1} \sum_{X < x \leq X_1} |\xi(x)| \left| \sum_{Y < y \leq Y_1} \eta(y) \exp \left(\frac{2\pi i}{m} (ax^*y^* + bxy) \right) \right|^s,$$

где

$$A = \sum_{X < x \leq X_1} |\xi(x)|.$$

Пользуясь определением чисел ξ_0, ξ , приходим к неравенству:

$$|W|^s \leq \xi_0^{s-1} \xi W_1, \tag{1}$$

где

$$W_1 = \sum_{X < x \leq X_1} \left| \sum_{Y < y \leq Y_1} \eta(y) \exp \left(\frac{2\pi i}{m} (ax^*y^* + bxy) \right) \right|^s.$$

Сумму по y возведем в степень s . Для этого определим функцию $J_s(\lambda, \mu)$ равенством:

$$J_s(\lambda, \mu) = \sum' \eta(y_1) \dots \eta(y_s),$$

причем штрих в сумме означает суммирование по таким наборам $y_1, \dots, y_s$, которые удовлетворяют системе сравнений:

$$\begin{cases} y_1^* + \dots + y_s^* \equiv \lambda \\ y_1 + \dots + y_s \equiv \mu \end{cases} \pmod{m}, \quad Y < y_1, \dots, y_s \leq Y_1.$$

Получаем:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{Y < y \leq Y_1} \eta(y) \exp\left(\frac{2\pi i}{m}(ax^*y^* + bxy)\right) \right)^s \\ &= \sum_{\lambda=1}^m \sum_{\mu} J_s(\lambda, \mu) \exp\left(\frac{2\pi i}{m}(ax^*\lambda + bx\mu)\right). \end{aligned}$$

Заметим, что параметр μ в последнем равенстве меняется в следующих пределах:

$$sY < \mu \leq sY_1 < 2sY \leq s2^{2s-1}Y^{2s-1} < m.$$

Пусть теперь $\theta(x)$ – аргумент рассматриваемой суммы, т.е.

$$\theta(x) = \arg \sum_{\lambda=1}^m \sum_{\mu} J_s(\lambda, \mu) \exp\left(\frac{2\pi i}{m}(ax^*\lambda + bx\mu)\right).$$

Тогда получаем:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{Y < y \leq Y_1} \eta(y) \exp\left(\frac{2\pi i}{m}(ax^*y^* + bxy)\right) \right|^s \\ &= e^{-i\theta(x)} \sum_{\lambda=1}^m \sum_{\mu} J_s(\lambda, \mu) \exp\left(\frac{2\pi i}{m}(a\lambda x^* + b\mu x)\right); \\ W_1 &\leq \sum_{\lambda=1}^m \sum_{\mu} |J_s(\lambda, \mu)| \left| \sum_{X < x \leq X_1} e^{-i\theta(x)} \exp\left(\frac{2\pi i}{m}(a\lambda x^* + b\mu x)\right) \right|. \end{aligned}$$

Возведем это неравенство в степень k и опять воспользуемся неравенством Гёльдера:

$$\begin{aligned} W_1^k &\leq \left(\sum_{\lambda=1}^m \sum_{\mu} |J_s(\lambda, \mu)| \right)^{k-1} \\ &\times \sum_{\lambda=1}^m \sum_{\mu} \left| \sum_{X < x \leq X_1} e^{-i\theta(x)} \exp\left(\frac{2\pi i}{m}(a\lambda x^* + b\mu x)\right) \right|^k |J_s(\lambda, \mu)|. \end{aligned}$$

Наконец, применим неравенство Коши к последней сумме; получаем:

$$W_1^k \leq B^{k-1} \sqrt{CD}, \quad (2)$$

где введены следующие обозначения:

$$B = \sum_{\lambda=1}^m \sum_{\mu} |J_s(\lambda, \mu)|; \quad C = \sum_{\lambda=1}^m \sum_{\mu} |J_s(\lambda, \mu)|^2;$$

$$D = \sum_{\lambda=1}^m \sum_{\mu} \left| \sum_{X < x \leq X_1} e^{-i\theta(x)} \exp\left(\frac{2\pi i}{m}(a\lambda x^* + b\mu x)\right) \right|^{2k}.$$

Так как параметры λ и μ в сумме B принимают все возможные значения, то

$$B \leq \sum_{Y < y_1, \dots, y_s \leq Y_1} |\eta(y_1)| \dots |\eta(y_s)| = \left(\sum_{Y < y \leq Y_1} |\eta(y)| \right)^s = \eta_0^s. \quad (3)$$

Для величины C находим подобным образом такую оценку:

$$C \leq \sum'' |\eta(y_1)| \dots |\eta(y_{2s})|,$$

где штрихи в последней сумме означают суммирование по наборам $y_1, \dots, y_{2s}$, которые удовлетворяют системе сравнений:

$$\begin{cases} y_1^* + \dots + y_s^* \equiv y_{s+1}^* + \dots + y_{2s}^* \\ y_1 + \dots + y_s \equiv y_{s+1} + \dots + y_{2s} \end{cases} \pmod{m}, \quad Y < y_1, \dots, y_{2s} \leq Y_1.$$

Очевидно, что

$$C \leq \eta^{2s} I_s(Y), \quad (4)$$

где $I_s(Y)$ – количество решений сравнения леммы (в лемме следует положить $k = s$, $X = Y$). Сумма D оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} D &\leq sY \sum_{\lambda=1}^m \left| \sum_{X < x \leq X_1} \exp\left(\frac{2\pi i}{m}a\lambda x^*\right) \exp(i\theta_1(x)) \right|^{2k} \\ &= sY \sum_{x_1, \dots, x_{2k}} \exp(i(\theta_1(x_1) + \dots - \theta_1(x_{2k}))) \\ &\quad \times \sum_{\lambda=1}^m \exp\left(\frac{2\pi i}{m}a\lambda(x_1^* + \dots - x_{2k}^*)\right) \\ &\leq sY \sum_{x_1, \dots, x_{2k}} \sum_{\lambda=1}^m \exp\left(\frac{2\pi i}{m}a\lambda(x_1^* + \dots - x_{2k}^*)\right) \\ &= sY \sum_{\mu=1}^m I(\mu) \sum_{\lambda=1}^m \exp\left(\frac{2\pi i}{m}a\lambda\mu\right), \end{aligned}$$

где $I(\mu)$ – количество решений сравнения

$$x_1^* + \dots - x_{2k}^* \equiv \mu \pmod{m}, \quad X < x_1, \dots, x_{2k} \leq X_1.$$

Очевидно, что

$$I(\mu) \leq I(0) \leq I_k(X).$$

Поэтому, вспоминая, что $(a, m) = d$, т.е. $a = a_1 d, m = m_1 d, (a_1, m_1) = 1$, для D находим окончательную оценку:

$$D \leq s Y I_k(X) \sum_{\mu=1}^m \sum_{\lambda=1}^m \exp\left(\frac{2\pi i}{m} a \lambda \mu\right) = \text{sdm } Y I_k(X). \quad (5)$$

Из (2)–(5) и (1) последовательно получаем:

$$W_1^k \leq \eta_0^{s(k-1)} \sqrt{\eta^{2s} I_s(Y)} \sqrt{\text{sdm } Y I_k(X)}; \quad (6)$$

$$|W|^{ks} \leq \xi_0^{ks} (\xi_0^{-1} \xi)^k \eta_0^{sk-s} \eta^s \sqrt{I_s(Y)} \sqrt{\text{sdm } Y} \sqrt{I_k(X)}. \quad (7)$$

Наконец, пользуясь оценкой леммы для величин $I_k(X)$, $I_s(Y)$, из (7) получим утверждение теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполняются условия теоремы 1 и, кроме того, $s \geq 2$. Тогда для $|W|$ справедлива оценка:

$$|W| \leq \xi_0 \eta_0 \Delta_1,$$

где

$$\Delta_1 = (\xi_0^{-2} \xi_1 \sqrt{X})^{\frac{1}{s}} (\eta_0^{-1} \eta \sqrt{Y})^{\frac{1}{k}} (\text{sdm } Y)^{\frac{1}{2ks}} (\log X)^{\frac{2k}{s}} (\log Y)^{\frac{2s}{k}} (2k)^{\frac{4k^2}{s}} (2s)^{\frac{4s^2}{k}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Переходя к неравенствам и пользуясь неравенствами Гёльдера и Коши, последовательно находим:

$$\begin{aligned} |W|^{\frac{s}{2}} &\leq \left(\sum_{X < x \leq X_1} |\xi(x)| \right)^{\frac{s}{2}-1} \\ &\times \sum_{X < x \leq X_1} |\xi(x)| \left| \sum_{Y < y \leq Y_1} \eta(y) \exp\left(\frac{2\pi i}{m} (ax^* y^* + bxy)\right) \right|^{\frac{s}{2}} \\ &\leq \xi_0^{\frac{s}{2}-1} \sqrt{\sum_{X < x \leq X_1} |\xi(x)|^2} \sqrt{\sum_{X < x \leq X_1} \left| \sum_{Y < y \leq Y_1} \eta(y) \exp\left(\frac{2\pi i}{m} (ax^* y^* + bxy)\right) \right|^s} \\ &= \xi_0^{\frac{s}{2}-1} \xi_1^{\frac{1}{2}} \sqrt{W_1}, \end{aligned}$$

где

$$W_1 = \sum_{X < x \leq X_1} \left| \sum_{Y < y \leq Y_1} \eta(y) \exp\left(\frac{2\pi i}{m} (ax^* y^* + bxy)\right) \right|^s.$$

Пользуясь оценкой (6) и леммой, последовательно получаем

$$\begin{aligned} |W|^{ks} &\leq \xi_0^{ks-2k} \xi_1^k W_1^k \leq \xi_0^{ks-2k} \xi_1^k \eta_0^{s(k-1)} \eta^s \sqrt{I_s(Y)} \sqrt{I_k(X)} \sqrt{\text{sdm } Y} \\ &\leq (\xi_0 \eta_0)^{ks} (\xi_0^{-2} \xi_1)^k (\eta_0^{-1} \eta)^s (2s)^{4s^3} (2k)^{4k^3} Y^{\frac{s}{2}} (\log Y)^{2s^2} X^{\frac{k}{2}} (\log X)^{2k^2}; \\ |W| &\leq \xi_0 \eta_0 \Delta_1. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Если в сумме $W(a, b)$ положить $b = 0$, то в этом случае получаются более точные оценки. Приведем только формулировки соответствующих результатов, так как их доказательства дословно повторяют доказательства теорем 1 и 2.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполняются условия и обозначения теоремы 1. Тогда справедлива оценка:

$$|W(a, 0)| \leq \xi_0 \eta_0 \Delta(sY)^{-\frac{1}{2ks}}.$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполняются условия и обозначения теоремы 2. Тогда справедлива оценка:

$$|W(a, 0)| \leq \xi_0 \eta_0 \Delta_1(sY)^{-\frac{1}{2ks}}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Карацуба А. А. Распределение обратных величин в кольце вычетов по заданному модулю // Докл. РАН. 1993. Т. 333. № 2. С. 138–139.
- [2] Карацуба А. А. Дробные доли специального вида функций // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т. 59. № 4. С. 61–80.
- [3] Карацуба А. А. Аналоги сумм Клоостермана // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т. 59. № 5. С. 93–102.
- [4] Карацуба А. А. Суммы дробных долей специального вида функций // Докл. РАН. 1996. Т. 349. № 3. С. 302.
- [5] Карацуба А. А. Аналоги неполных сумм Клоостермана и их приложения // Tatra Mountains Math. Publ. 1977. Т. 11. С. 89–120.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поступило
29.04.1999