Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Курина, Г. В. Мартыненко, О приводимости неотрицательно гамильтоновой вещественной периодической матрицы к блочно-диагональной форме, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 5, 688–695

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1213>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 17:24:28

УДК 517.9

О ПРИВОДИМОСТИ НЕОТРИЦАТЕЛЬНО ГАМИЛЬТОНОВОЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ МАТРИЦЫ К БЛОЧНО-ДИАГОНАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Г. А. Курина, Г. В. Мартыненко

В статье установлена при некоторых условиях возможность приведения гамильтоновой вещественной периодической матрицы при помощи вещественной матрицы того же периода к блочно-диагональной форме, в которой одна из матриц, стоящих на диагонали, имеет спектр в открытой левой полуплоскости, а другая – в правой.

Библиография: 6 названий.

1. Исследование сингулярно возмущенных периодических задач упрощается, если имеется возможность приведения матрицы, стоящей при неизвестной, к блочно-диагональной форме, в которой одна из матриц на диагонали имеет собственные значения с отрицательными вещественными частями, а другая – с положительными (см., например, [1]).

Как указано в [2], для вещественной периодической матрицы не всегда существует непрерывная вещественная матрица того же периода, приводящая данную матрицу к блочно-диагональной форме определенного выше вида.

В [3] приведен пример, иллюстрирующий последнее утверждение. А именно, доказано, что для вещественной матрицы периода 1

$$A(t) = C(-t)DC(t),$$

где

$$C(t) = \begin{pmatrix} \cos(\pi t) & -\sin(\pi t) \\ \sin(\pi t) & \cos(\pi t) \end{pmatrix}, \quad D = \text{diag}(d_1, d_2),$$

d_1, d_2 – различные вещественные числа, не существует вещественной непрерывной матрицы периода 1 матрицы $V(t)$, которая невырождена и $V^{-1}(t)A(t)V(t) = D$ для всех вещественных t . Напомним, что комплексная приводящая матрица периода 1 существует (см. теорему 3 в [3]). В этом примере достаточно в качестве $V(t)$ взять матрицу

$$\begin{pmatrix} \alpha(t) \cos(\pi t) & \bar{\alpha}(t) \sin(\pi t) \\ -\alpha(t) \sin(\pi t) & \bar{\alpha}(t) \cos(\pi t) \end{pmatrix},$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01639.

где $\alpha(t) = -i \exp(i\pi t)$, $\bar{\alpha}(t)$ – сопряженное к $\alpha(t)$ число.

Условия оптимальности управления для линейно-квадратичной периодической задачи без ограничений на управление приводят к линейной периодической задаче для системы с матрицей при неизвестных вида

$$\begin{pmatrix} A(t) & S(t) \\ W(t) & -A'(t) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $A(t)$, $S(t)$, $W(t)$ – вещественные непрерывные по t матрицы периода 1; штрих означает транспонирование, матрицы $S(t)$ и $W(t)$ – симметрические неотрицательно определенные при всех $-\infty < t < +\infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Матрицу с непрерывными коэффициентами вида (1), где $S(t) = S'(t) \geq 0$, $W(t) = W'(t) \geq 0$, будем называть *неотрицательно гамильтоновой*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Вещественную непрерывную на компакте K квадратную матрицу-функцию $B(t)$ n -го порядка будем называть *условно приводимой*, если найдется вещественная непрерывная матрица-функция $V(t)$, которая при всех $t \in K$ невырождена и

$$V^{-1}(t)B(t)V(t) = \text{diag}(B_-(t), B_+(t)), \quad (2)$$

где $B_-(t)$ ($B_+(t)$) – квадратная матрица-функция k -го ($(n-k)$ -го) порядка, $0 \leq k \leq n$, и при каждом фиксированном $t \in K$ спектр $B_-(t)$ ($B_+(t)$) расположен в левой (правой) открытой полуплоскости.

В настоящей статье будет доказана

ТЕОРЕМА 1. Если матрица $A(t)$ условно приводима при помощи матрицы периода 1, то неотрицательно гамильтонова периода 1 матрица (1) также условно приводима при помощи матрицы периода 1.

Справедливость этой теоремы будет следовать из доказанной ниже теоремы 2.

2. Сначала рассмотрим частный случай матрицы (1).

ЛЕММА 1. Если вещественная непрерывная квадратная матрица $A(t)$ периода 1 условно приводима при помощи матрицы $V(t)$ периода 1, то матрица

$$H(t) = \text{diag}(A(t), -A'(t))$$

также условно приводима при помощи матрицы периода 1 той же гладкости, что и $V(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Несложно проверить, что в качестве матрицы, приводящей $H(t)$ к виду (2), можно взять матрицу

$$\begin{pmatrix} V(t) & 0 \\ 0 & (V'(t))^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_k \\ 0 & I_{n-k} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где I_m означает единичную матрицу m -го порядка, n – порядок $A(t)$, k определяется из представления (2) для матрицы $A(t)$. При этом в формуле (2) для матрицы $H(t)$ получается $B_-(t) = \text{diag}(A_-(t), -A'_+(t))$, $B_+(t) = \text{diag}(A_+(t), -A'_-(t))$.

3. Чтобы перейти к общему случаю неотрицательно гамильтоновой матрицы, докажем вспомогательное утверждение. Будем использовать следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 (см. [2]). Матрица называется *грубой*, если у нее нет собственных значений, лежащих на мнимой оси.

ЛЕММА 2. Если для неотрицательно гамильтоновой матрицы (1) при всех $t \in J$ выполнено одно из двух условий: а) матрицы $S(t)$, $W(t)$ положительно определены или б) матрица $A(t)$ является грубой, то матрица (1) является грубой при всех $t \in J$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: матрица (1) при каком-либо $t \in J$ имеет собственное значение $i\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$. Соответствующий собственный вектор обозначим через $y = \begin{pmatrix} u_1 + iv_1 \\ u_2 + iv_2 \end{pmatrix}$, где $u_i, v_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, n – порядок матрицы $A(t)$. Тогда из соотношения

$$\begin{pmatrix} A(t) & S(t) \\ W(t) & -A'(t) \end{pmatrix} y = i\omega y$$

получаем равенства

$$\begin{pmatrix} A(t) & S(t) \\ W(t) & -A'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = -\omega \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A(t) & S(t) \\ W(t) & -A'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Последнюю систему запишем в виде

$$\begin{pmatrix} A(t) & \omega I & S(t) & 0 \\ -\omega I & A(t) & 0 & S(t) \\ W(t) & 0 & -A'(t) & \omega I \\ 0 & W(t) & -\omega I & -A'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Если в этом выражении матрица обратима, то мы получаем, что $y = 0$, т.е. приходим к противоречию с предположением.

При условии а) или при невырожденной матрице $\begin{pmatrix} A(t) & \omega I \\ -\omega I & A(t) \end{pmatrix}$ обратимость неотрицательно гамильтоновой матрицы из последнего выражения следует из [4].

Докажем, что из условия б) следует обратимость матрицы $\begin{pmatrix} A(t) & \omega I \\ -\omega I & A(t) \end{pmatrix}$.

Предположим противное. Тогда существует элемент $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq 0$ такой, что $A(t)x_1 + \omega x_2 = 0$, $-\omega x_1 + A(t)x_2 = 0$. Отсюда следуют равенства:

$$A^2(t)x_1 + \omega A(t)x_2 = (A^2(t) + \omega^2 I)x_1 = (A(t) - i\omega I)(A(t) + i\omega I)x_1 = 0.$$

В силу условия б) операторы $A(t) - i\omega I$ и $A(t) + i\omega I$ обратимы, поэтому $x_1 = 0$. В силу б) из последней системы получаем, что и $x_2 = 0$. Пришли к противоречию с предположением.

Лемма 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условия а), б) леммы 2 не являются необходимыми для грубости не-отрицательно гамильтоновой матрицы (1). Например, при $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $S(t) = \text{diag}(0, 5)$, $W(t) = \text{diag}(0, 1)$ матрица (1) является грубой, а условия а), б) последней леммы не выполнены.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если выполнено условие а) леммы 2 или аналогичное б) условие: матрица $A(t)$ при всех $-\infty < t < +\infty$ имеет только вещественные собственные значения, то матрица (1) может иметь и не вещественные собственные значения. Например, при $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $S(t) = W(t) = I_2$ оба последних условия выполняются, а соответствующая матрица (1) не имеет вещественных собственных значений.

4. Обозначим через P_- и P_+ проекторы, заданные матрицами

$$P_- = \text{diag}(I_k, 0), \quad P_+ = \text{diag}(0, I_{n-k}). \quad (3)$$

При этом P_- проектор $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^k \dot{+} 0$, P_+ — на $0 \dot{+} \mathbb{R}^{n-k}$.

Если имеет место представление (2), то проекторы P_- и P_+ порождают два следующих переменных проектора

$$P_-(t) = V(t)P_-V^{-1}(t), \quad P_+(t) = V(t)P_+V^{-1}(t). \quad (4)$$

Отметим некоторые свойства проекторов $P_-(t)$ и $P_+(t)$.

ЛЕММА 3. $P_-(t)$ и $P_+(t)$ перестановочны с $B(t)$ при каждом $t \in K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $P_-(t)$ с учетом (2)–(4) имеем

$$\begin{aligned} P_-(t)B(t) &= P_-(t)V(t) \begin{pmatrix} B_-(t) & 0 \\ 0 & B_+(t) \end{pmatrix} V^{-1}(t) \\ &= V(t)P_-V^{-1}(t)V(t) \begin{pmatrix} B_-(t) & 0 \\ 0 & B_+(t) \end{pmatrix} V^{-1}(t) \\ &= V(t) \begin{pmatrix} B_-(t) & 0 \\ 0 & B_+(t) \end{pmatrix} P_-V^{-1}(t) = B(t)P_-(t). \end{aligned}$$

Аналогично доказывается утверждение для $P_+(t)$.

Пусть γ_- и γ_+ гладкие положительно ориентированные замкнутые контуры на плоскости комплексной переменной λ , охватывающие собственные значения операторов $B(t)$, $t \in K$, с отрицательной и положительной действительной частью соответственно. Поскольку оператор $B(t)$ непрерывен по t на компакте, а спектр оператора лежит в круге радиуса, равного норме оператора, с центром в нуле (см., например, [5]), то такие контуры существуют.

ЛЕММА 4. Проекторы $P_-(t)$ и $P_+(t)$ можно представить в виде

$$P_-(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_-} (B(t) - \lambda I)^{-1} d\lambda, \quad P_+(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+} (B(t) - \lambda I)^{-1} d\lambda. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если подынтегральную функцию записать в виде

$$(B(t) - \lambda I)^{-1} = V(t)(V^{-1}(t)B(t)V(t) - \lambda I)^{-1}V^{-1}(t),$$

то справедливость леммы следует непосредственно из соотношений (2)–(4).

Далее нам потребуются следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Упорядоченный набор $v(t) = \{v_1(t), \dots, v_k(t)\}$ непрерывных линейно независимых при $t \in K$ векторов из $\mathbb{R}^n$ называется *подвижным r -репером*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 (см. [6]). Подвижный r -репер $v(t)$ называется *следящим* для некоторого семейства подпространств $L(t) \subset \mathbb{R}^n$, если $v_i(t) \in L(t)$ для всех $t \in K$, $i = \overline{1, r}$.

ЛЕММА 5. Для того чтобы матрица-функция $B(t)$, $t \in K$, была условно приводимой, необходимо и достаточно наличие k - и $(n - k)$ -следящих реперов для семейств подпространств $P_-(t)\mathbb{R}^n$ и $P_+(t)\mathbb{R}^n$, где $P_-(t)$ и $P_+(t)$ определяются соотношениями (5), $0 \leq k \leq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Предположим, что $B(t)$ условно приводима; значит, имеет место равенство (2).

Обозначим через $e_1, \dots, e_k$ базис $\mathbb{R}^k \dot{+} 0$, а через $e_{k+1}, \dots, e_n$ базис $0 \dot{+} \mathbb{R}^{n-k}$. Покажем, что подвижный k -репер $\{V(t)e_1, \dots, V(t)e_k\}$ является следящим для семейства подпространств $P_-(t)\mathbb{R}^n$, а подвижный $(n - k)$ -репер $\{V(t)e_{k+1}, \dots, V(t)e_n\}$ является следящим для семейства подпространств $P_+(t)\mathbb{R}^n$, где проекторы $P_-(t)$, $P_+(t)$ определены соотношениями (4) (в силу леммы 4 эти проекторы также можно записать в виде (5)).

Из формулы (4) вытекают равенства

$$P_-(t)V(t) = V(t)P_-, \quad P_+(t)V(t) = V(t)P_+,$$

что в силу (3) равносильно существованию следящих реперов.

Достаточность. Предположим, что существуют k - и $(n - k)$ -следящие реперы $\{u_1(t), \dots, u_k(t)\}$ и $\{u_{k+1}(t), \dots, u_n(t)\}$ для семейств подпространств $P_-(t)\mathbb{R}^n$ и $P_+(t)\mathbb{R}^n$ соответственно, где $P_-(t)$ и $P_+(t)$ определяются соотношениями (5). Значит, $u_i(t) \in P_-(t)\mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, k$, и $u_i(t) \in P_+(t)\mathbb{R}^n$, $i = k + 1, \dots, n$. Рассмотрим матрицу-функцию $U(t)$, столбцами которой являются $u_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, т.е.

$$U(t) = (u_1(t) \dots u_n(t)).$$

Из самого способа построения матрицы-функции $U(t)$ следует ее вещественность, непрерывность по t , невырожденность при каждом t и справедливость равенств

$$U^{-1}(t)P_-(t)U(t) = P_-, \quad U^{-1}(t)P_+(t)U(t) = P_+.$$

Покажем, что $U(t)$ приводит $B(t)$ к виду (2).

Для этого достаточно установить перестановочность при каждом t проектора P_- с $U^{-1}(t)B(t)U(t)$. Последнее проверяется непосредственно:

$$\begin{aligned} P_-U^{-1}(t)B(t)U(t) &= U^{-1}(t)P_-(t)B(t)U(t) = U^{-1}(t)B(t)U(t), \\ U^{-1}(t)P_-(t)U(t) &= U^{-1}(t)B(t)U(t)P_-. \end{aligned}$$

ЛЕММА 6. Для того чтобы матрица-функция $B(t)$ была условно приводимой при помощи матрицы периода T , необходимо и достаточно наличие k - и $(n - k)$ -следящих реперов периода T для семейств подпространств $P_-(t)\mathbb{R}^n$ и $P_+(t)\mathbb{R}^n$, где $P_-(t)$ и $P_+(t)$ определяются соотношениями (5), $0 \leq k \leq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Если $B(t)$ условно приводима при помощи матрицы $V(t)$ периода T , то из доказательства последней леммы следует, что построенные там следящие реперы тоже будут иметь период T .

Достаточность. Если существуют указанные в условии следящие реперы периода T , то из доказательства последней леммы следует, что $U(t)$ имеет период T , т.е. $B(t)$ будет условно приводима при помощи матрицы периода T .

ПРИМЕР 1. Рассмотрим пример из [3], о котором уже упоминалось выше, положив в нем $d_1 = -1$, $d_2 = 1$. Тогда операторы (5), построенные по оператору $A(t)$, будут иметь вид

$$P_-(t) = \begin{pmatrix} \cos^2(\pi t) & -\sin(2\pi t)/2 \\ -\sin(2\pi t)/2 & \sin^2(\pi t) \end{pmatrix}, \quad P_+(t) = \begin{pmatrix} \sin^2(\pi t) & \sin(2\pi t)/2 \\ \sin(2\pi t)/2 & \cos^2(\pi t) \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} P_-(t) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= (\cos(\pi t)x_1 - \sin(\pi t)x_2) \begin{pmatrix} \cos(\pi t) \\ -\sin(\pi t) \end{pmatrix}, \\ P_+(t) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= (\sin(\pi t)x_1 + \cos(\pi t)x_2) \begin{pmatrix} \sin(\pi t) \\ \cos(\pi t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Покажем, что в этом примере не существует 1-следящих реперов периода 1 для семейств подпространств $P_-(t)\mathbb{R}^2$ и $P_+(t)\mathbb{R}^2$.

Предположим противное. Тогда 1-следящий репер $u_1(t)$ для семейства подпространств $P_-(t)\mathbb{R}^2$ выглядит следующим образом:

$$u_1(t) = \beta(t) \begin{pmatrix} \cos(\pi t) \\ -\sin(\pi t) \end{pmatrix},$$

где $\beta(t)$ – непрерывная вещественная функция на отрезке $[0, 1]$.

Поскольку $u_1(0) = u_1(1)$, то $\beta(0) = -\beta(1)$, т.е. $\beta(t)$ принимает на концах отрезка значения разных знаков, что невозможно, так как $u_1(t) \neq 0$ для всех $t \in [0, 1]$.

Аналогично доказывается, что не существует 1-следящего репера периода 1 для семейства подпространств $P_+(t)\mathbb{R}^2$.

Отметим, что 1-следящие реперы периода 2 для семейств подпространств $P_-(t)\mathbb{R}^2$ и $P_+(t)\mathbb{R}^2$ существуют. Ими будут, например, являться $\begin{pmatrix} \cos(\pi t) \\ -\sin(\pi t) \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \sin(\pi t) \\ \cos(\pi t) \end{pmatrix}$ соответственно. Значит, в этом примере матрица $A(t)$ условно приводима при помощи матрицы периода 2, что соответствует результатам [3].

5. ТЕОРЕМА 2. Пусть $\{B_\mu(t)\}$ семейство вещественных матриц-функций, непрерывных по совокупности переменных $t \in K$, $\mu \in [0, 1]$, причем при $\mu = 0$ $B_0(t)$ условно приводима и при любых $t \in K$, $\mu \in [0, 1]$ матрица $B_\mu(t)$ является грубой. Тогда при любом $\mu \in [0, 1]$ $B_\mu(t)$ условно приводима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий теоремы следует наличие гладких положительно ориентированных замкнутых контуров γ_- и γ_+ , охватывающих собственные значения операторов $B_\mu(t)$, $t \in K$, $\mu \in [0, 1]$, с отрицательной и положительной действительной частью соответственно.

Рассмотрим операторы

$$P_{\mu-}(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_-} (B_\mu(t) - \lambda I)^{-1} d\lambda,$$

$$P_{\mu+}(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+} (B_\mu(t) - \lambda I)^{-1} d\lambda.$$

Поскольку $P_{\mu-}(t)$ и $P_{\mu+}(t)$ равномерно непрерывны по $t \in K$, $\mu \in [0, 1]$, для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $\max_{t \in K} \|P_{\mu_1 \mp}(t) - P_{\mu_2 \mp}(t)\| < \varepsilon$ при любых $\mu_1, \mu_2 \in [0, 1]$, удовлетворяющих неравенству $|\mu_1 - \mu_2| \leq \delta$. Так как в силу леммы 5 семейства подпространств $P_{0-}(t)\mathbb{R}^n$ и $P_{0+}(t)\mathbb{R}^n$ имеют k - и $(n - k)$ -следящие реперы $\{u_1(t), \dots, u_k(t)\}$ и $\{u_{k+1}(t), \dots, u_n(t)\}$ соответственно, то аналогично доказательству предложения 2.4 из [6] устанавливается, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ подпространства $P_{\delta-}(t)\mathbb{R}^n$ и $P_{\delta+}(t)\mathbb{R}^n$ имеют k - и $(n - k)$ -следящие реперы $\{P_{\delta-}(t)u_1(t), \dots, P_{\delta-}(t)u_k(t)\}$ и $\{P_{\delta+}(t)u_{k+1}(t), \dots, P_{\delta+}(t)u_n(t)\}$ соответственно. Далее, сдвигаясь по μ к 1 и рассуждая таким же образом, получаем, что подпространства $P_{\mu-}(t)\mathbb{R}^n$ и $P_{\mu+}(t)\mathbb{R}^n$ имеют соответственно k - и $(n - k)$ -следящие реперы. Поэтому в силу леммы 5 $B_\mu(t)$ будет условно приводимой при любом $\mu \in [0, 1]$.

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Положим $K = [0, 1]$,

$$B_\mu(t) = \begin{pmatrix} A(t) & \mu S(t) \\ \mu W(t) & -A'(t) \end{pmatrix}, \quad \mu \in [0, 1].$$

Легко видеть, что матрица $B_\mu(t)$ непрерывна по совокупности переменных $t, \mu \in [0, 1]$.

Из лемм 1, 2 следует, что при $\mu = 0$ эта матрица условно приводима при помощи матрицы периода 1 и для всех $t, \mu \in [0, 1]$ она является грубой. Значит, рассматриваемое семейство матриц-функций $B_\mu(t)$, $\mu \in [0, 1]$, удовлетворяет всем условиям теоремы 2.

Так как в этом случае операторы $P_{\mu-}(t)$ и $P_{\mu+}(t)$ будут являться периодическими по t функциями периода 1, то из доказательства теоремы 2 и леммы 6 следует, что неотрицательно-гамильтонова матрица $B_1(t)$ будет условно приводима при помощи матрицы периода 1.

Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если матрица (1) является гладкой и $A(t)$ условно приводима при помощи гладкой матрицы периода 1, то матрица (1) периода 1 будет условно приводима при помощи гладкой матрицы периода 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Утверждение теоремы 1 остается справедливым при замене условия периодичности на почти периодичность.

В заключение выражаем глубокую благодарность Д.В. Аносову, А.Г. Баскакову, А.В. Боровских и В.Г. Задорожному за полезные обсуждения работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Флэтто Л., Левинсон Н. Периодические решения сингулярно возмущенных систем // Математика. 1958. Т. 2. № 2. С. 61–68.
- [2] Аносов Д. В. О предельных циклах систем дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных // Матем. сб. 1960. Т. 50 (92). № 3. С. 299–334.
- [3] Sibuya Y. Some global properties of matrices of functions of one variable // Math. Ann. 1965. V. 161. P. 67–77.
- [4] Курина Г. А. О линейных гамильтоновых системах, не разрешенных относительно производной // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 12. № 2. С. 193–198.
- [5] Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
- [6] Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Лин В. Я., Локуцкий О. В. О топологических причинах аномального поведения некоторых почти периодических систем // Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. Киев: Наукова думка, 1977. С. 54–61.

Воронежский государственный университет

E-mail: kurina@kma.vsu.ru

Поступило

03.09.98