Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Марченков, О суперпозициях непрерывных функций, заданных на бэровском пространстве, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 5, 696–705

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1214>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 06:31:50

УДК 519.716

О СУПЕРПОЗИЦИЯХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ, ЗАДАНЫХ НА БЭРОВСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С. С. Марченков

Для непрерывных функций, заданных на бэровском пространстве, рассматривается следующая задача: при каких условиях функции нескольких переменных можно реализовать суперпозициями функций меньшего числа переменных. С помощью линейных функций вида $(1 + \alpha)t$ определяется граница для модуля непрерывности, отделяющая положительное решение задачи от отрицательного. В случае отрицательного решения предлагается конструктивный способ построения $(n + 1)$ -местных непрерывных функций с модулем непрерывности $\varphi(t)$, которые невозможно представить в виде суперпозиции n -местных непрерывных функций с тем же модулем непрерывности $\varphi(t)$.

Библиография: 12 названий.

В различных разделах математики часто возникает следующая задача, связанная с суперпозициями функций. Пусть M – некоторый класс функций, $M^{(n)}$ – множество всех n -местных функций из M , $[M^{(n)}]$ – множество всех функций, реализуемых суперпозициями функций из $M^{(n)}$. Верно ли, что при любом n , $n \geq 2$, выполняется включение $M^{(n+1)} \subset [M^{(n)}]$?

Если E – непустое множество и M_E – класс всех функций, определенных на E , то при любом n , $n \geq 2$, имеет место включение $M_E^{(n+1)} \subset [M_E^{(2)}]$ (для конечных множеств E соответствующие утверждения являются следствиями важных теорем о разложении функций многозначной логики [1]). Однако для многих содержательно интересных классов функций M вопрос о соотношении множеств $M^{(n+1)}$ и $[M^{(n)}]$ оказывается достаточно сложным. Так, например, обстоит дело с различными классами непрерывных функций. Если на непрерывные функции не налагать никаких дополнительных ограничений, то всякую многоместную непрерывную функцию можно реализовать в виде суперпозиции подходящих одно- и двуместных непрерывных функций (решение этой проблемы см. в [2]–[4]). Напротив, если функции из M удовлетворяют некоторым условиям гладкости, то соотношение $M^{(n+1)} \subset [M^{(n)}]$ не выполняется ни при каком n , $n \geq 2$, [5]–[11].

В работе [10] предложен некоторый метод анализа суперпозиций непрерывных функций, использующий булевы функции и сложность реализации булевых функций схемами из функциональных элементов. Как видно из [10], в наиболее прозрачной форме метод применим к так называемым детерминированным функциям – частному случаю непрерывных функций, заданных на бэровском пространстве. В настоящей статье мы рассматриваем эти функции в общем случае и решаем вопрос о выразимости функций многих переменных в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных. В основных

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-00989.

результатах (теоремы 1–3) с помощью модуля непрерывности определяется граница, которая отделяет положительное решение вопроса от отрицательного. Как и в работе [10], в качестве основного аппарата исследований используются булевы функции, а также приближения непрерывных функций булевскими операторами.

Дадим необходимые определения. Пусть $I = \{0, 1\}^\infty$ – декартово произведение счетного числа множеств $\{0, 1\}$. Элементы a, b множества I будем записывать в виде $a = a(1)a(2)\dots, b = b(1)b(2)\dots$, где $a(t), b(t) \in \{0, 1\}$ при $t \geq 1$. На множестве I зададим метрику ρ бэровского пространства: $\rho(a, b) = 1/t$, если $a \neq b$ и t есть такое наименьшее число, что $a(t) \neq b(t)$. Метрику ρ перенесем на декартовы степени множества I : если $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in I^n$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$, то $\rho(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \max_{1 \leq i \leq n} \rho(a_i, b_i)$.

Будем рассматривать функции $f(x_1, \dots, x_n)$, отображающие I^n в I . По техническим причинам для оперирования с функцией $f(x_1, \dots, x_n)$ удобно ввести еще одну переменную y : $y = f(x_1, \dots, x_n)$. В этих обозначениях при любом $t, t \geq 1$, $y(t)$ является функцией, вообще говоря, бесконечного числа булевских переменных $x_1(1), \dots, x_n(1), x_1(2), \dots, x_n(2), \dots$. Нетрудно, однако, видеть, что для определенной выше метрики ρ функция $f(x_1, \dots, x_n)$ (равномерно) непрерывна в том и только том случае, когда существует такая функция $\varphi(t)$ натурального аргумента t , принимающая натуральные значения, что при любом $t, t \geq 1$, $y(t)$ определяется только значениями $x_1(1), \dots, x_n(1), \dots, x_1(\varphi(t)), \dots, x_n(\varphi(t))$. Иными словами, для любого t должна существовать такая булева функция G_t от $n\varphi(t)$ переменных, что

$$y(t) = G_t(x_1(1), \dots, x_n(1), \dots, x_1(\varphi(t)), \dots, x_n(\varphi(t))). \quad (1)$$

Функцию $\varphi(t)$ с указанными свойствами будем называть *модулем непрерывности* функции f . Если $\varphi(t)$ – модуль непрерывности функции f и $\psi(t) \geq \varphi(t)$, то функцию $\psi(t)$ также можно считать модулем непрерывности функции f . В связи с этим и в целях упрощения дальнейших построений модули непрерывности будем предполагать монотонно неубывающими функциями.

Обозначим через $\mathbf{C}$ множество всех непрерывных на I функций. Пусть $\mathbf{C}_\varphi$ – подмножество $\mathbf{C}$, состоящее из функций с модулем непрерывности φ , $\mathbf{C}^{(n)}$ – множество всех n -местных функций из $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}_\varphi^{(n)} = \mathbf{C}_\varphi \cap \mathbf{C}^{(n)}$.

Пусть $M \subseteq \mathbf{C}$. Стандартным образом [12] определяется понятие *формулы над M* . Любая функция из M является формулой над M . Если $f(x_1, \dots, x_n)$ – функция из M , а $F_1, \dots, F_n$ – либо формулы над M , либо символы переменных (не обязательно различные), то выражение $f(F_1, \dots, F_n)$ также является формулой над M .

Каждая формула над M очевидным образом задает некоторую функцию (вообще говоря, не принадлежащую M). Множество всех функций, которые определяются всеми формулами над M , обозначается через $[M]$ и называется множеством функций, реализуемых суперпозициями функций из M , или, короче, – *суперпозициями функций* из M .

Для любого натурального k пусть $\varphi^{(k)}(t)$ обозначает k -кратную суперпозицию функции φ : $\varphi^{(k)}(t) = \varphi(\varphi(\dots \varphi(t) \dots))$, где правая часть равенства содержит k символов φ .

ЛЕММА 1. Пусть φ, ψ – модули непрерывности, $f \in \mathbf{C}_\varphi$, $F_1, \dots, F_p$ – либо функции из $\mathbf{C}_\psi$, либо символы переменных и

$$g(x_1, \dots, x_m) = f(F_1, \dots, F_p). \quad (2)$$

Тогда $g \in \mathbf{C}_\tau$, где $\tau(t) = \max(\varphi(t), \psi(\varphi(t)))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, пусть

$$y = g(x_1, \dots, x_m), \quad y_1 = F_1, \quad \dots, \quad y_p = F_p.$$

Тогда согласно включению $f \in \mathbf{C}_\varphi$ значения $y(1), \dots, y(t)$ полностью определяются значениями $y_1(1), \dots, y_p(1), \dots, y_1(\varphi(t)), \dots, y_p(\varphi(t))$. Если F_i ($1 \leq i \leq p$) есть функция из $\mathbf{C}_\psi$, $F_i = f_i(x_1^i, \dots, x_{m_i}^i)$, где $\{x_1^i, \dots, x_{m_i}^i\} \subseteq \{x_1, \dots, x_m\}$, то в свою очередь $y_i(1), \dots, y_i(\varphi(t))$ полностью определяются значениями

$$x_1^i(1), \dots, x_{m_i}^i(1), \dots, x_1^i(\psi(\varphi(t))), \dots, x_{m_i}^i(\psi(\varphi(t))).$$

Если же F_i есть переменная x_j , то последовательность $y_i(1), \dots, y_i(\varphi(t))$ совпадает с последовательностью $x_j(1), \dots, x_j(\varphi(t))$. Отсюда вытекает утверждение леммы.

СЛЕДСТВИЕ 1. Имеем $[\mathbf{C}] = \mathbf{C}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $\varphi(t) \leq t$, то $[\mathbf{C}_\varphi] = \mathbf{C}_\varphi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение $\mathbf{C}_\varphi \subseteq [\mathbf{C}_\varphi]$ выполняется по определению множества $[\mathbf{C}_\varphi]$. Для доказательства обратного включения достаточно рассмотреть элементарную суперпозицию вида (2). Так как $\varphi(t) \leq t$ и функция φ монотонно не убывает, то $\varphi^{(2)}(t) \leq \varphi(t)$. Значит, функция g из (2) принадлежит классу $\mathbf{C}_\varphi$.

Пусть l – натуральное число. Обозначим через $\mathbf{C}_\varphi^{[l]}$ множество всех функций, которые можно реализовать формулами над $\mathbf{C}_\varphi$, состоящими из l символов функций.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если $\varphi(t) \geq t$, то $\mathbf{C}_\varphi^{[l]} \subset \mathbf{C}_{\varphi(l)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по l . При $l = 1$ утверждение выполняется очевидным образом. Пусть $l \geq 2$ и утверждение верно для меньших значений l . Если $g \in \mathbf{C}_\varphi^{[l]}$, то функция g представима в виде (2), где $f \in \mathbf{C}_\varphi$, а $F_1, \dots, F_p$ – либо символы переменных, либо функции из класса $\mathbf{C}_\varphi^{[1]} \cup \dots \cup \mathbf{C}_\varphi^{[l-1]}$. Если F_i – функция из класса $\mathbf{C}_\varphi^{[k]}$, где $1 \leq k < l$, то в силу индуктивного предположения $F_i \in \mathbf{C}_{\varphi^{(k)}}$. Из неравенства $\varphi(t) \geq t$ и монотонности функции φ следует, что $\mathbf{C}_{\varphi^{(k)}} \subseteq \mathbf{C}_{\varphi^{(l-1)}}$. Остается применить лемму 1 и еще раз воспользоваться неравенством $\varphi(t) \geq t$ и монотонностью функции φ .

Хорошо известно, что любые два множества I^m, I^n ($m, n \geq 1$) гомеоморфны. Взаимно-однозначное и непрерывное в обе стороны соответствие между I^2 и I можно осуществить, например, используя следующую функцию Пеано $y = P(x_1, x_2)$: если $x_1 = x_1(1)x_1(2)\dots$, $x_2 = x_2(1)x_2(2)\dots$, то при любом $t, t \geq 1$, $y(2t-1) = x_1(t)$, $y(2t) = x_2(t)$. Пусть $y_1 = p_1(x)$, $y_2 = p_2(x)$ – такие функции, что при любом $t, t \geq 1$, $y_1(t) = x(2t-1)$, $y_2(t) = x(2t)$. Имеем, очевидно, тождества:

$$p_1(P(x_1, x_2)) = x_1, \quad p_2(P(x_1, x_2)) = x_2, \quad P(p_1(x), p_2(x)) = x.$$

Из определений функций P, p_1, p_2 следует, что $P \in \mathbf{C}_\varphi$, где $\varphi(t) = \lceil t/2 \rceil$, и $p_1, p_2 \in \mathbf{C}_{2t}$. Таким образом, $\{P, p_1, p_2\} \subset \mathbf{C}_{2t}$.

На основе функции P стандартным образом устанавливается гомеоморфизм множеств I^n и I , $n \geq 3$. Именно, положим $Q_2(x_1, x_2) = P(x_1, x_2)$ и при $n \geq 2$

$$Q_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = Q_2(Q_n(x_1, \dots, x_n), x_{n+1}).$$

Если определить далее $q_1^2(x) = p_1(x)$, $q_2^2(x) = p_2(x)$ и

$$q_1^{n+1}(x) = q_1^n(q_1^2(x)) \quad \dots, \quad q_n^{n+1}(x) = q_n^n(q_1^2(x)), \quad q_{n+1}^{n+1} = q_2^2(x),$$

то при любом n , $n \geq 2$, будем иметь тождества

$$\begin{aligned} q_1^n(Q_n(x_1, \dots, x_n)) &= x_1, \quad \dots, \quad q_n^n(Q_n(x_1, \dots, x_n)) = x_n, \\ Q_n(q_1^n(x), \dots, q_n^n(x)) &= x. \end{aligned} \quad (3)$$

Отметим, что согласно следствиям 2,3 при $n \geq 3$ выполняются включения: $Q_n \in \mathbf{C}_\varphi$, где $\varphi(t) = \lceil t/2 \rceil$, $q_n^n \in \mathbf{C}_{2t}$, $q_{n-1}^n \in \mathbf{C}_{4t}$, $\dots$, $q_2^n \in \mathbf{C}_{2^{n-1}t}$, $q_1^n \in \mathbf{C}_{2^{n-1}t}$.

Используя свойства функций Q_n , нетрудно показать, что при любом n , $n \geq 2$, $[\mathbf{C}^{(n)}] = \mathbf{C}$. Более того, имеет место равенство $[\mathbf{C}^{(1)} \cup \{Q_n\}] = \mathbf{C}$. Ограничимся рассмотрением случая $n = 2$.

Пусть $m \geq 2$ и $f(x_1, \dots, x_m)$ – произвольная функция из $\mathbf{C}^{(m)}$. Положим $f_1(x) = f(q_1^m(x), \dots, q_m^m(x))$. Тогда $f_1 \in \mathbf{C}^{(1)}$ и в силу (3) имеет место тождество

$$f_1(Q_m(x_1, \dots, x_m)) = f(x_1, \dots, x_m).$$

Таким образом, $f \in [\mathbf{C}^{(1)} \cup \{Q_m\}]$. Вместе с тем, как вытекает из определения, $Q_m \in [\{Q_2\}]$. Следовательно, $f \in [\mathbf{C}^{(1)} \cup \{Q_2\}]$.

В связи с данным результатом возникает вопрос: для каких функций φ класс $\mathbf{C}_\varphi^{(n+1)}$ будет целиком содержаться в классе $[\mathbf{C}_\varphi^{(n)}]$?

Теоремы 1–3 в известном смысле дают ответ на этот вопрос.

ТЕОРЕМА 1. Пусть α – положительное действительное число, $\varphi(t)$ – монотонно возрастающая функция и $\varphi(t) \geq (1 + \alpha)t$. Тогда для любых натуральных m , n имеет место включение $\mathbf{C}_{\varphi^{(m)}}^{(n+1)} \subset [\mathbf{C}_\varphi^{(2)}]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем m , n и рассмотрим произвольную функцию $f(x_1, \dots, x_{n+1})$ из класса $\mathbf{C}_{\varphi^{(m)}}^{(n+1)}$. Положим

$$f_1(x) = f(q_1^{n+1}(x), \dots, q_{n+1}^{n+1}(x)).$$

Тогда

$$f(x_1, \dots, x_{n+1}) = f_1(Q_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1})).$$

Так как $Q_2 \in \mathbf{C}_\psi$, где $\psi(t) = \lceil t/2 \rceil$, $Q_{n+1} \in [\{Q_2\}]$ и $\varphi(t) \geq (1 + \alpha)t$, то $Q_{n+1} \in [\mathbf{C}_\varphi^{(2)}]$. Далее, $\{q_1^{n+1}, \dots, q_{n+1}^{n+1}\} \subset \mathbf{C}_{2nt}$. Значит, из леммы 1 выводим, что $f_1 \in \mathbf{C}_\tau$, где $\tau(t) = 2^n \varphi^{(m)}(t)$. Поскольку $\varphi(t) \geq (1 + \alpha)t$, найдется такое натуральное k , что $\varphi^{(k)}(t) \geq \tau(t)$. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно установить, что классу $[\mathbf{C}_\varphi^{(2)}]$ принадлежит любая функция из $\mathbf{C}_{\varphi^{(k)}}^{(1)}$.

Пусть $y = g(x)$ – произвольная функция из $\mathbf{C}_{\varphi^{(k)}}^{(1)}$. Для любого t , $t \geq 1$, обозначим через G_t такую булеву функцию, что

$$y(t) = G_t(x(1), \dots, x(\varphi^{(k)}(t))).$$

Выберем теперь в классе $\mathbf{C}_\varphi$ функцию $z = h(x)$ таким образом, чтобы при любом t , $t \geq 1$, выполнялось равенство $z(t) = x(\varphi(t))$. Если положить $v(t) = h^{(k)}(t)$, то при

любом t , $t \geq 1$, будем иметь $v(t) = x(\varphi^{(k)}(t))$. В классе $\mathbf{C}_t$ определим функцию $w = g_1(x)$ условиями:

$$w(s) = \begin{cases} G_t(x(1), \dots, x(s)), & \text{если } s = \varphi^{(k)}(t), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Так как функция φ строго монотонна, то определение функции g_1 корректно. Имеем теперь $g(x) = h^{(k)}(g_1(x))$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. В условиях теоремы 1 имеет место равенство

$$[\mathbf{C}_\varphi^{(2)}] = \bigcup_{m, n \geq 1} \mathbf{C}_{\varphi^{(m)}}^{(n)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно в одну сторону воспользоваться леммой 1, а в другую – теоремой 1.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{C}_\varphi$. Как отмечалось выше, для любого t , $t \geq 1$, существует такая булева функция G_t от $n\varphi(t)$ переменных, что выполняется равенство (1). Набор булевых функций $(G_1, \dots, G_t)$, представляющий собой булевский $(n\varphi(t), t)$ -оператор с $n\varphi(t)$ входными переменными и t выходными переменными, будем называть $(\varphi(t), t)$ -приближением функции f . Как вытекает из определения, $(\varphi(t), t)$ -приближение функции $y = f(x_1, \dots, x_n)$ позволяет определить значения $y(1), \dots, y(t)$ через значения $x_i(1), \dots, x_i(\varphi(t))$ ($1 \leq i \leq n$) согласно равенствам (1). Поскольку число различных булевых функций G_t равно $2^{2^{n\varphi(t)}}$, число возможных $(\varphi(t), t)$ -приближений для функций из класса $\mathbf{C}_\varphi^{(n)}$ есть

$$2^{2^{n\varphi(1)}} \cdot 2^{2^{n\varphi(2)}} \cdot \dots \cdot 2^{2^{n\varphi(t)}} = 2^{\sum_{i=1}^t 2^{n\varphi(i)}}.$$

Если $M \subseteq \mathbf{C}_\varphi$, то через $l_\varphi(M, n, t)$ обозначим число различных $(\varphi(t), t)$ -приближений для всех функций из множества $M^{(n)}$. Имеем, в частности,

$$l_\varphi(\mathbf{C}_\varphi^{(n)}, n, t) = 2^{\sum_{i=1}^t 2^{n\varphi(i)}}.$$

Положим $\mathbf{C}_\varphi^{m, n} = (\mathbf{C}_\varphi^{(n)})^{[m]}$.

ЛЕММА 2. Пусть $\varphi(t) \leq t$. Для любых натуральных m, n найдется такая положительная константа d , что для всех натуральных p выполняется неравенство

$$l_\varphi(\mathbf{C}_\varphi^{m, n}, p, t) \leq d \cdot (l_\varphi(\mathbf{C}_\varphi^{(n)}, n, t))^m. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно следствию 2 все функции из $\mathbf{C}_\varphi^{m, n}$ входят в множество $\mathbf{C}_\varphi$. Поэтому для любой функции из $\mathbf{C}_\varphi^{m, n}$ понятие $(\varphi(t), t)$ -приближения имеет смысл. Пусть $f \in \mathbf{C}_\varphi^{m, n}$. Предположим, что функция f реализуется формулой F над множеством $\mathbf{C}_\varphi^{(n)}$. Так как $\varphi(t) \leq t$, то для получения $(\varphi(t), t)$ -приближения функции f достаточно взять $(\varphi(t), t)$ -приближения всех входящих в формулу F функций и согласно строению формулы F осуществить суперпозицию соответствующих булевских $(n\varphi(t), t)$ -операторов. (При этом часть входных и выходных переменных у $(n\varphi(t), t)$ -операторов может оказаться не востребуемой, поскольку $\varphi(t)$ может быть строго меньше t .) Таким образом, для фиксированной формулы F и для произвольных n -местных

функций из $C_\varphi^{(n)}$, входящих в эту формулу, число различных $(\varphi(t), t)$ -приближений функций f , определяемых формулой F , не превосходит величины $(l_\varphi(C_\varphi^{(n)}, n, t))^m$. Если теперь обозначить через d число различных формул F , содержащих m символов n -местных функций (нам важна лишь структура формул F , поэтому при подсчете числа формул можно ограничиться использованием конкретных символов n -местных функций $f_1, \dots, f_m$ и конкретных символов переменных $x_1, \dots, x_{mn-m+1}$), то мы придем к неравенству (4). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\varphi(t) \leq t$ и функция φ неограничена. Тогда для любого n , $n \geq 1$, в классе $C_\varphi^{(n+1)}$ найдется функция, которую невозможно представить в виде суперпозиции функций из класса $C_\varphi^{(n)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем натуральное n и определим функцию $y = f(x_1, \dots, x_{n+1})$ из класса $\mathbf{C}_\varphi^{(n+1)}$, которая не принадлежит классу $[\mathbf{C}_\varphi^{(n)}]$. Построение функции f проведем по шагам, определяя на каждом шаге конечное число значений $y(t)$ с помощью подходящих булевых функций G_t от переменных $x_1(1), \dots, x_{n+1}(1), \dots, x_1(\varphi(t)), \dots, x_{n+1}(\varphi(t))$.

Пусть N – множество натуральных чисел, $c(x, y)$ – какая-либо функция, осуществляющая взаимно-однозначное отображение N^2 на N .

Шаг 1. Полагаем $t_1 = 1$, $y(1) = G_1(x_1(1), \dots, x_{n+1}(1), \dots, x_1(\varphi(1)), \dots, x_{n+1}(\varphi(1))) = 0$. Переходим к шагу 2.

Шаг $s + 1$. Пусть $s = c(d, m)$ и уже определены число t_s и величины $y(1), \dots, y(t_s)$ с помощью булевых функций $G_1, \dots, G_{t_s}$:

[illegible]

Пользуясь тем, что функция $\varphi(t)$ монотонно не убывает и неограничена, выберем число t_{s+1} столь большим, чтобы выполнялись неравенства $t_{s+1} > t_s$ и

$$\log_2 d + m \sum_{i=1}^{t_s+1} 2^{n\varphi(i)} < \sum_{i=t_s+1}^{t_s+1} 2^{(n+1)\varphi(i)}. \quad (5)$$

В правой части неравенства (5) стоит величина, равная логарифму (по основанию 2) числа всех булевских $((n+1)\varphi(t_{s+1}), t_{s+1} - t_s)$ -операторов, i -й выход которых зависит от первых $(n+1)\varphi(i)$ входов $(t_s + 1 \leq i \leq t_{s+1})$. Поэтому если величина из левой части неравенства (5) не меньше логарифма числа $(\varphi(t_{s+1}), t_{s+1})$ -приближений всех $(n+1)$ -местных функций из класса $\mathbf{C}_\varphi^{m,n}$ (т.е. не меньше $\log_2(l_\varphi(\mathbf{C}_\varphi^{m,n}, n+1, t_{s+1}))$), то можно найти такие булевы функции $G_{t_s+1}, \dots, G_{t_{s+1}}$, зависящие соответственно от $(n+1)\varphi(t_s+1), \dots, (n+1)\varphi(t_{s+1})$ переменных, что $(\varphi(t_{s+1}), t_{s+1})$ -приближение функции $f(x_1, \dots, x_{n+1})$, определяемое через булевы функции $G_1, \dots, G_{t_s}, G_{t_s+1}, \dots, G_{t_{s+1}}$, будет отличаться от $(\varphi(t_{s+1}), t_{s+1})$ -приближений всех $(n+1)$ -местных функций из $\mathbf{C}_\varphi^{m,n}$. В связи с этим определяем: если

$$\log_2(l_\varphi(\mathbf{C}_\varphi^{m,n}, n+1, t_{s+1})) \leq \log_2 d + m \sum_{i=1}^{t_{s+1}} 2^{n\varphi(i)}, \quad (6)$$

Переходя ко второму “ярусу” формулы F , предположим, что формула F_i ($1 \leq i \leq r$) имеет вид

$$F_i = g_i(G_1^i, \dots, G_n^i),$$

где $g_i \in \mathbf{C}_\varphi^{(n)}$, а $G_1^i, \dots, G_n^i$ – либо формулы над $\mathbf{C}_\varphi^{(n)}$, либо символы переменных $x_1, \dots, x_p$. Так как $\varphi(t) \geq t$, в данном случае для вычисления значений $y_i(1), \dots, y_i(\varphi(t))$ необходимы, вообще говоря, значения $z_s(1), \dots, z_s(\varphi^{(2)}(t))$, если G_s^i есть формула, реализующая функцию $z_s = h_s$, и значения $x_j(1), \dots, x_j(\varphi^{(2)}(t))$, если G_s^i совпадает с переменной x_j . Таким образом, на этом этапе необходимо, вообще говоря, иметь $(\varphi^{(2)}(t), \varphi(t))$ -приближения функций f_i ($1 \leq i \leq r$).

Поднимаясь далее по формуле F “снизу вверх” и принимая во внимание, что $\varphi(t) \geq t$ и формула F содержит m символов функций из $\mathbf{C}_\varphi^{(n)}$, приходим к заключению, что для получения $(\varphi^{(m)}(t), t)$ -приближения функции f достаточно располагать $(\varphi^{(m)}(t), \varphi^{(m-1)}(t))$ -приближениями всех входящих в формулу F функций.

Число всех $(\varphi^{(m)}(t), \varphi^{(m-1)}(t))$ -приближений функций из $\mathbf{C}_\varphi^{(n)}$ равно

$$2^{\sum_{i=1}^{\varphi^{(m-1)}(t)} 2^{n\varphi(i)}}.$$

Следовательно, при любом натуральном p

$$l_{\varphi^{(m)}}(\mathbf{C}_\varphi^{m,n}, p, t) \leq d \cdot 2^m \sum_{i=1}^{\varphi^{(m-1)}(t)} 2^{n\varphi(i)}, \quad (7)$$

где d есть количество всех формул, содержащих m символов n -местных функций.

Согласно условиям леммы для выбранного m и для положительного действительного α найдется такое t_2 , что при $t \geq t_2$ выполняется неравенство $\varphi^{(m-1)}(t) \leq (1 + \alpha)t$. Поэтому, полагая

$$e(t_2) = \sum_{i=1}^{\varphi^{(m-1)}(t_2)} 2^{n\varphi(i)},$$

при $t \geq t_2$ будем также иметь

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\varphi^{(m-1)}(t)} 2^{n\varphi(i)} &= e(t_2) + \sum_{i=\varphi^{(m-1)}(t_2)+1}^{\varphi^{(m-1)}(t)} 2^{n\varphi(i)} \\ &\leq e(t_2) + \sum_{i=1}^{(1+\alpha)t} 2^{n(1+\alpha)i} \leq e(t_2) + 2^{n(1+\alpha)(1+(1+\alpha)t)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Из (7) и (8) следует, что

$$\log_2(l_{\varphi^{(m)}}(\mathbf{C}_\varphi^{m,n}, p, t)) \leq \log_2 d + m \cdot (e(t_2) + 2^{n(1+\alpha)(1+(1+\alpha)t)}). \quad (9)$$

Возьмем теперь положительное действительное β и выберем такие натуральные t_1 , e и положительное действительное α , что $t_1 \geq t_2$ и при $t \geq t_1$ выполняется неравенство

$$\log_2 d + m e(t_2) + m 2^{n(1+\alpha)(1+(1+\alpha)t)} \leq e 2^{n(1+\beta)t}. \quad (10)$$

Из сопоставления неравенств (7), (9) и (10) вытекает утверждение леммы.

Непосредственно из построения видно, что для любого натурального m на шаге $m+1$ функция $f(x_1, \dots, x_{n+1})$ определяется таким образом, что ее $(\varphi^{(m)}(t_{m+1}), t_{m+1})$ -приближение отличается от $(\varphi^{(m)}(t_{m+1}), t_{m+1})$ -приближения любой $(n+1)$ -местной функции из $C_\varphi^{m,n}$. Теорема доказана.

Из полученных результатов вытекает, что совокупность функций вида $(1+\alpha)t$ определяет своеобразную границу. Для функций $\varphi(t)$, расположенных ниже этой границы, включение $C_\varphi^{(n+1)} \subset [C_\varphi^{(n)}]$ невозможно ни при каком n , $n \geq 1$. Напротив, для функций $\varphi(t)$, лежащих выше этой границы, соотношение $C_\varphi^{(n+1)} \subset [C_\varphi^{(n)}]$ (и даже соотношение $C_\varphi^{(n+1)} \subset [C_\varphi^{(2)}]$) выполняется.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Яблонский С. В. Введение в теорию функций k -значной логики // Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. I. М.: Наука, 1974. С. 9–66.
- [2] Колмогоров А. Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных. // Докл. АН СССР. 1956. Т. 108. № 2. С. 179–182.
- [3] Арнольд В. И. О функциях трех переменных // Докл. АН СССР. 1957. Т. 114. № 4. С. 679–681.
- [4] Колмогоров А. Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения // Докл. АН СССР. 1957. Т. 114. № 5. С. 953–956.
- [5] Витушкин А. Г. К тринадцатой проблеме Гильберта // Докл. АН СССР. 1954. Т. 95. № 4. С. 701–704.
- [6] Витушкин А. Г. О многомерных вариациях. М.: Гостехиздат, 1955.
- [7] Колмогоров А. Н. Оценки минимального числа элементов ε -сетей в различных функциональных классах и их применение к вопросу о представимости функций нескольких переменных суперпозициями функций меньшего числа переменных // УМН. 1955. Т. 10. № 1(63). С. 192–195.
- [8] Витушкин А. Г., Хенкин Г. М. Линейные суперпозиции функций // УМН. 1967. Т. 22. № 1. С. 77–124.
- [9] Vitushkin A. G. On representation of functions by means of superpositions and related topics // L'Enseignement math. 1977. V. 23. № 3–4. P. 255–320.
- [10] Марченков С. С. Об одном методе анализа суперпозиций непрерывных функций // Проблемы кибернетики. 1980. Т. 37. С. 5–17.
- [11] Гашков С. Б. О сложности приближенной реализации функциональных компактов в некоторых пространствах и о существовании функций с заданной по порядку сложностью // Фундаментальная и прикладная математика. 1996. Т. 2. № 3. С. 675–774.
- [12] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.

Институт прикладной математики им М. В. Келдыша РАН

Поступило
31.03.1998