Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Нейман-заде, А. А. Шкаликов, Операторы Шрёдингера с сингулярными потенциалами из пространств мультипликаторов, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 5, 723–733

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1216>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 18:36:39

УДК 517.9, 517.43

ОПЕРАТОРЫ ШРЁДИНГЕРА С СИНГУЛЯРНЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ ИЗ ПРОСТРАНСТВ МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ

М. И. Нейман-заде, А. А. Шкаликов

В работе изучаются операторы Шрёдингера $T + Q$, где $T = -\Delta$ – оператор Лапласа, а Q – оператор умножения на обобщенную функцию. Рассматриваются также обобщения для случая полигармонического оператора $T = (-\Delta)^n$.

Библиография: 20 названий.

Введение. В работе изучаются операторы Шрёдингера $T + Q$, где $T = -\Delta$ – оператор Лапласа, а Q – оператор умножения на обобщенную функцию. Рассматриваются также обобщения для случая полигармонического оператора $T = (-\Delta)^n$. Операторы такого типа появились в физических работах 30-х годов в связи с задачей рассеяния нейтральных частиц на ядре, когда взаимодействие является сильным на малых расстояниях и пренебрежимо малым на средних и больших (см. [1]). Модельным потенциалом такого взаимодействия является δ -функция Дирака.

Математическое исследование оператора $-\Delta + \mu\delta(x)$ было предпринято Березиным и Фаддеевым [2], Минлосом и Фаддеевым [3], Березиным [4]. В работах [2], [3] оператор $-\Delta + \mu\delta(x)$ понимался как расширение оператора $T_0 = -\Delta$ с областью $\mathcal{D}(T_0) = C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$. Эта тема вызвала большое число работ. В основном изучались сингулярные потенциалы, сосредоточенные на многообразиях и дискретных наборах точек. Укажем здесь работы [5]–[9] и книги [10], [11], где можно найти более полную библиографию. Недавно начал развиваться метод [4], основанный на резольвентных тождествах.

Знакомясь с этой темой, мы не нашли работ, где исследовались сингулярные потенциалы с носителями на множествах ненулевой меры, кроме статей [12], [13], где рассматривался потенциал $1/x$ в $L_2[\mathbb{R}^1]$. Возникает задача: для каких сингулярных функций $q(x)$ можно корректно определить оператор $-\Delta + q(x)$?

Естественный подход к решению этой задачи – воспользоваться методом квадратичных форм. Необходимое условие, чтобы этот метод работал, состоит в следующем: функция q должна быть мультипликатором из пространства $H^1(\mathbb{R}^n)$ в $H^{-1}(\mathbb{R}^n)$, т.е. умножение на нее есть ограниченный оператор из H^1 в H^{-1} . Однако, исследований на тему, когда функция является мультипликатором в этих пространствах, мы не обнаружили, за исключением одного результата в книге [14], который будет использоваться в работе (см. теорему 6). Конечно, задача описания пространства мультипликаторов

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 98-01-01000 и № 96-15-96091.

$M[H^m \rightarrow H^{-m}]$ интересна не только с точки зрения теории операторов Шрёдингера, но представляет и самостоятельный интерес.

Имеется еще одна важная задача: если оператор $-\Delta + q$ с сингулярным потенциалом q уже определен, то можно ли его в некотором смысле приблизить операторами с гладкими потенциалами, по крайней мере так, чтобы спектры приближающих операторов были близки к спектру исходного?

Целью заметки является решение перечисленных здесь задач. В первом разделе мы даем определение суммы операторов в общих терминах, основанное на методе квадратичных форм. Ядром метода является известная КЛМН-теорема (см. [15, гл. X]). Здесь в нужной нам форме приводятся ее полезные обобщения. Отметим, что подробный анализ возможности определения суммы операторов дан в недавней работе [16]. Во втором разделе мы приводим абстрактное обобщение следующего результата: если последовательность функций q_n сходится к q в пространстве мультипликаторов, то последовательность операторов $-\Delta + q_n$ сходится к $-\Delta + q$ в смысле равномерной резольвентной сходимости, и имеет место сходимость спектров. В третьем разделе мы выделяем два важных подпространства в пространстве мультипликаторов $M[H^\theta \rightarrow H^{-\theta}]$ и приводим достаточные условия принадлежности функций этим подпространствам. В четвертом разделе мы формулируем итоговый результат и приводим примеры.

1. Определение суммы симметрических операторов. Пусть T – самосопряженный полуограниченный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Далее удобно считать, что $T \geq I$, где I – тождественный оператор. С оператором T свяжем шкалу гильбертовых пространств $\mathfrak{H}_\theta$. При $\theta \geq 0$ положим $\mathfrak{H}_\theta = \mathcal{D}(T^{\theta/2})$ с нормой $\|x\|_\theta = \|T^{\theta/2}x\|$, а $\mathfrak{H}_{-\theta}$ определим как пространство, дуальное к $\mathfrak{H}_\theta$ по отношению к $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0$. В частности, $\mathfrak{H}_2 = \mathcal{D}(T)$. Через $(\cdot, \cdot)$ обозначаем скалярное произведение в $\mathfrak{H}$; это же обозначение сохраняем для дуального скалярного произведения элементов $\mathfrak{H}_{-1}$ и $\mathfrak{H}_1$, полагая

$$(x, y) = (T^{-1/2}x, T^{1/2}y), \quad x \in \mathfrak{H}_{-1}, \quad y \in \mathfrak{H}_1.$$

Оператор $Q: \mathfrak{H}_1 \rightarrow \mathfrak{H}_{-1}$ (рассматриваемый как оператор из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_{-1}$) назовем *симметрическим*, если порожденная им в смысле дуального скалярного произведения квадратичная форма (Qv, v) является вещественной. По определению сопряженные пространства $\mathfrak{H}_1^*$ и $\mathfrak{H}_{-1}^*$ совпадают с $\mathfrak{H}_{-1}$ и $\mathfrak{H}_1$. Поэтому сопряженный оператор Q^* действует также из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_{-1}$ (см. определение в [17, гл. III, § 5.5]), и в случае симметрического оператора Q имеем $Q \subset Q^*$. Если $Q = Q^*$, то Q называют *самосопряженным*. Следующий результат эквивалентен известной КЛМН-теореме (см. [17, гл. II, § 1.6], [15, гл. X]): *Если симметрический оператор $Q: \mathfrak{H}_1 \rightarrow \mathfrak{H}_{-1}$ определен на всем $\mathfrak{H}_1$ и подчинен оператору T в смысле форм с T -гранью $\alpha < 1$, т.е.*

$$|(Qv, v)| < \alpha \|v\|_1^2 + \beta \|v\|^2, \quad v \in \mathfrak{H}_1, \quad \beta = \text{const},$$

то квадратичная форма $((T + Q)v, v)$, определенная на $\mathfrak{H}_1$, замкнута и полуограничена. Первую теорему о представлении (см. [17, гл. VI, § 2.1]) в этой ситуации можно переформулировать в следующем виде. *Оператор $L = T + Q: \mathfrak{H}_1 \rightarrow \mathfrak{H}_{-1}$ самосопряжен, а его сужение на область*

$$\mathcal{D}(L) = \{v \in \mathfrak{H}_1 \mid Tv + Qv \in \mathfrak{H}\}$$

является самосопряженным полуограниченным оператором в $\mathfrak{H}$.

Полезно иметь в виду следующее обобщение сформулированного результата.

ТЕОРЕМА 1. Пусть оператор $Q: \mathfrak{H}_1 \rightarrow \mathfrak{H}_{-1}$ определен на всем $\mathfrak{H}_1$ и симметричен. Если найдутся числа $\alpha < 1$, $\beta > 0$ такие, что

$$(Qv, v) \geq -\alpha \|v\|_1^2 - \beta \|v\|^2, \quad v \in \mathfrak{H}_1, \quad (1)$$

то оператор $T+Q: \mathfrak{H}_1 \rightarrow \mathfrak{H}_{-1}$ является самосопряженным, а его сужение $T \upharpoonright \mathfrak{H}$ на область

$$\mathcal{D}(T \upharpoonright \mathfrak{H}) = \{v \in \mathfrak{H}_1 \mid Tv + Qv \in \mathfrak{H}\}$$

является полуограниченным самосопряженным оператором в $\mathfrak{H}$. Другими словами: определенная на $\mathfrak{H}_1$ квадратичная форма $((T+Q)v, v)$ замкнута, а ассоциированный с этой формой оператор $T \upharpoonright \mathfrak{H} + Q$ полуограничен и самосопряжен в $\mathfrak{H}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как симметрический оператор Q определен на всем $\mathfrak{H}_1$, то он совпадает со своим сопряженным Q^* , а потому замкнут. Согласно теореме о замкнутом графике [17, гл. III, § 5.4] оператор $Q: \mathfrak{H}_1 \rightarrow \mathfrak{H}_{-1}$ ограничен. Поэтому найдется постоянная $\gamma > 0$ такая, что $|(Qv, v)| \leq \gamma \|v\|_1^2$. В силу оценки (1) имеем

$$(1 - \alpha) \|v\|_1^2 \leq ((T + Q + \beta)v, v) \leq (\gamma + 1) \|v\|_1^2 + \beta \|v\|^2, \quad v \in \mathfrak{H}_1. \quad (2)$$

Теперь доказательство завершается стандартным путем, так же как в КЛМН-теореме. Можно воспользоваться также методом продолжения по параметру для семейства операторов $T + \kappa Q$, $0 \leq \kappa \leq 1$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть линейал D_0 является плотным подмножеством в $\mathfrak{H}_1$, оператор $S_0: \mathfrak{H}_1 \rightarrow \mathfrak{H}_{-1}$ удовлетворяет условию

$$(S_0v, v) \geq (Tv, v) - \beta(v, v) \quad \forall v \in D_0, \quad \beta = \text{const},$$

а оператор $Q: \mathfrak{H}_1 \rightarrow \mathfrak{H}_{-1}$ определен на всем $\mathfrak{H}_1$ и удовлетворяет оценке (1). Пусть S – расширение по Фридрихсу полуограниченного оператора S_0 , а $\mathfrak{H}_S$ – область определения замыкания квадратичной формы (S_0v, v) . Тогда $\mathfrak{H}_S \subset \mathfrak{H}_1$, оператор $S+Q: \mathfrak{H}_S \rightarrow \mathfrak{H}_S^*$ самосопряжен, а его сужение $S \upharpoonright \mathfrak{H} + Q$ на область

$$\mathcal{D}(S \upharpoonright \mathfrak{H} + Q) = \{v \in \mathfrak{H}_S \mid Sv + Qv \in \mathfrak{H}\}$$

является самосопряженным полуограниченным оператором в $\mathfrak{H}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий теоремы имеем оценку

$$((S_0 + Q + 2\beta)v, v) \geq (1 - \alpha) \|v\|_1^2, \quad v \in D_0. \quad (3)$$

Следовательно, квадратичная форма, порожденная оператором S_0+Q , полуограничена и допускает замыкание на некоторую область $\mathfrak{H}_S$. Из оценки (3) и плотности линейала D_0 в $\mathfrak{H}_1$ заключаем $\mathfrak{H}_S \subset \mathfrak{H}_1$. Остальные утверждения вытекают из определений.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Сформулированные теоремы отличаются лишь по форме. С одной стороны, теорема 1 есть частный случай теоремы 2 при $S_0 = T$. С другой стороны, теорему 2 легко вывести из теоремы 1, взяв вместо T оператор $S + \beta$. При этом пространства $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_{-1}$ заменяются на $\mathfrak{H}_S$ и $\mathfrak{H}_S^*$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теорему 2 можно переформулировать по-другому, если мы не хотим ограничиваться расширением по Фридрихсу. В формулировке можно предположить с самого начала, что S – самосопряженный оператор такой, что область определения $\mathfrak{H}_S$ ассоциированной с ним квадратичной формы вложена в $\mathfrak{H}_1$ и выполнена оценка (3) для $v \in \mathfrak{H}_S$. В этом случае утверждение теоремы сохраняет силу.

2. Приближения операторных сумм. Резольвентная сходимость и сходимость спектров. В рассматриваемых ниже примерах в качестве оператора Q выступают операторы умножения на обобщенную функцию q . Если сумма операторов уже определена, то правомерно ли (например, в компьютерных вычислениях) заменять сингулярную функцию q_n , близкую к q в смысле сходимости в некотором пространстве обобщенных функций? С этой точки зрения представляют интерес излагаемые ниже результаты.

Сначала напомним некоторые определения. Пусть $\{A_n\}$ – последовательность замкнутых операторов в банаховом пространстве $\mathcal{X}$. Будем говорить, что операторы A_n сходятся при $n \rightarrow \infty$ к оператору A в смысле *равномерной (сильной) резольвентной сходимости* и писать $A_n \xrightarrow{R} A$ ($A_n \xrightarrow{R} A$), если найдется число $\zeta \in \mathbb{C}$ такое, что $\zeta \in \rho(A) \cap \rho(A_n)$ для всех достаточно больших n и $(A_n - \zeta)^{-1}$ равномерно (сильно) сходятся к $(A - \zeta)^{-1}$. Известно [17, гл. VIII, теорема 2.25], что равномерная резольвентная сходимость влечет сходимость спектров $\sigma(A_n)$ к $\sigma(A)$ сверху. В случае гильбертова пространства и самосопряженных операторов A_n не только равномерная, но и сильная резольвентная сходимость влечет сходимость спектров снизу [17, гл. VIII, теорема 1.14]. Поэтому в случае самосопряженных операторов A_n имеем следующий результат: *если $A_n \xrightarrow{R} A$, то $\sigma(A_n) \rightarrow \sigma(A)$.*

ТЕОРЕМА 3. Пусть операторы S_0 и Q удовлетворяют условиям теоремы 2, а S – расширение по Фридрихсу оператора S_0 . Предположим, что операторы $Q_n: \mathfrak{H}_1 \rightarrow \mathfrak{H}_{-1}$ определены на всем $\mathfrak{H}_1$, для них выполнена оценка (1) и для всех $v \in \mathfrak{H}_1$

$$\|(Q - Q_n)v\|_{-1} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Тогда $S \tilde{+} Q_n \xrightarrow{R} S \tilde{+} Q$. Если оператор T^{-1} компактен в $\mathfrak{H}$ или соотношение (4) выполняется равномерно для v , удовлетворяющих условию $\|v\|_1 = 1$, то $S \tilde{+} Q_n \xrightarrow{R} S \tilde{+} Q$. В этом случае имеет место сходимость спектров

$$\sigma(S \tilde{+} Q_n) \rightarrow \sigma(S \tilde{+} Q).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно замечанию 1 достаточно доказать теорему для случая $S = T$. Пусть $T^{1/2}$ – квадратный корень из T . Очевидно, $T^{1/2}: \mathfrak{H}_\theta \rightarrow \mathfrak{H}_{\theta-1}$ есть изоморфизм. Поэтому операторы

$$K_n := T^{-1/2} Q_n T^{-1/2}: \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H} \quad (5)$$

ограничены, причем из условий теоремы и оценки (2) получаем

$$-\alpha \|x\|^2 - \beta \|T^{-1}x\|^2 \leq (K_n x, x) \leq \gamma \|x\|^2 + \beta \|T^{-1}x\|^2,$$

где $\alpha < 1$. Следовательно, операторы

$$Z_n := I - K_n - \rho T^{-1} \quad (6)$$

обратимы при $\rho < -\beta$, причем они сами и обратные к ним равномерно ограничены. Имеем

$$(T + Q_n - \rho)^{-1} = T^{-1/2} Z_n^{-1} T^{-1/2},$$

где левая часть понимается как оператор из $\mathfrak{H}_{-1}$ в $\mathfrak{H}_1$. Если в обозначениях (5) и (6) опустить индекс n , то последнее равенство остается справедливым для Q вместо Q_n . Тогда имеем

$$\begin{aligned} (T + Q_n - \rho)^{-1} - (T + Q - \rho)^{-1} &= (T + Q_n - \rho)^{-1} (Q - Q_n) (T + Q - \rho)^{-1} \\ &= T^{-1/2} Z_n^{-1} [T^{-1/2} (Q - Q_n) T^{-1/2}] Z^{-1} T^{-1/2}. \end{aligned}$$

Здесь все множители – ограниченные операторы в $\mathfrak{H}$, причем Z_n^{-1} равномерно ограничены. Условие (4) влечет $T^{-1/2} (Q - Q_n) T^{-1/2} \rightarrow 0$ в пространстве $\mathfrak{H}$. Заметим, что $(T + Q_n - \rho)^{-1}$ есть сужение оператора $(T + Q_n - \rho)^{-1}$; то же верно, если Q_n заменить на Q . Поэтому $T + Q_n \xrightarrow{R} T + Q$. Если оператор T^{-1} компактен, то тем же свойством обладает оператор $T^{-1/2}$. Умножение как справа, так и слева на компактный оператор переводит сильную сходимость в равномерную. Сходимость также равномерна, если условие (4) выполняется равномерно на единичной сфере в $\mathfrak{H}_1$. Но равномерная резольвентная сходимость, как уже отмечалось, влечет сходимость спектров.

ТЕОРЕМА 4. Пусть операторы S_0 и S такие же, как в теореме 2, а оператор $Q: \mathfrak{H}_1 \rightarrow \mathfrak{H}_{-1}$ симметричен и компактен. Тогда справедливо утверждение теоремы 2, более того, непрерывные спектры операторов $S + Q$ и S совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие компактности оператора $Q: \mathfrak{H}_1 \rightarrow \mathfrak{H}_{-1}$ влечет условие его подчиненности оператору T в смысле форм с произвольно малой T -гранью $\alpha > 0$. Поэтому утверждение теоремы 2 справедливо. Далее, спектр оператора $S + Q: \mathfrak{H}_S \rightarrow \mathfrak{H}_S^*$ совпадает со спектром его сужения $S + Q: \mathcal{D}(S + Q) \rightarrow \mathfrak{H}$. То же верно и для непрерывных компонент спектра. Согласно определению точка ρ не принадлежит непрерывному спектру оператора $S + Q$, если и только если оператор $S + Q - \rho: \mathfrak{H}_S \rightarrow \mathfrak{H}_S^*$ является фредгольмовым. Но $\mathfrak{H}_S$ непрерывно вложено в $\mathfrak{H}_1$. Поэтому если $Q: \mathfrak{H}_1 \rightarrow \mathfrak{H}_{-1}$ компактен, то $Q: \mathfrak{H}_S \rightarrow \mathfrak{H}_S^*$ также компактен. Согласно второй теореме устойчивости [17, гл. IV] компактные слагаемые не влияют на свойство оператора быть фредгольмовым. Поэтому $\sigma_c(S + Q) = \sigma_c(S + Q) = \sigma_c(S)$. Теорема доказана.

3. Мультипликаторы в пространствах Соболева. Пусть $H_p^\theta(\mathbb{R}^n)$, $\theta \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$, – пространства Соболева, норма в которых определена равенством

$$\|u\|_{H_p^\theta} = \|F^{-1}(1 + |x|^2)^{\theta/2} Fu\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

где F – преобразование Фурье. Далее полагаем $\mathfrak{H}_\theta = H_2^\theta(\mathbb{R}^n)$. Через D обозначаем пространство основных функций $D := C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Мы будем изучать мультипликаторы из пространства $\mathfrak{H}_\theta$ в $\mathfrak{H}_{-\theta}$. Формальное определение следующее: $\varphi \in D'$ мультипликатор, если для всех $g \in \mathfrak{H}_\theta$ произведение $\varphi g \in \mathfrak{H}_{-\theta}$. Однако произведение на обобщенную функцию φ определено лишь для $g \in C^\infty$, поэтому это определение подлежит коррекции. Функцию $\varphi \in D'$ назовем *мультипликатором* из $\mathfrak{H}_\theta$ в $\mathfrak{H}_{-\theta}$, если существует постоянная C такая, что

$$|(\varphi g, f)| = |(\varphi, \bar{g}f)| \leq C \|g\|_\theta \|f\|_\theta \quad \forall f, g \in D. \quad (7)$$

Если это условие выполнено, то билинейная форма $(\varphi g, f)$ продолжается по непрерывности для всех $f, g \in \mathfrak{H}_\theta$. Если элемент g фиксирован, то $\varphi_g(f) := (\varphi g, f)$ является антилинейным непрерывным функционалом в $\mathfrak{H}_\theta$, т.е. принадлежит $\mathfrak{H}_{-\theta}$. Произведение φg теперь можно положить равным φ_g .

Мультипликатор φ определяет ограниченный линейный оператор $Q_\varphi: \mathfrak{H}_\theta \rightarrow \mathfrak{H}_{-\theta}$, определяемый равенством $Q_\varphi g = \varphi_g$. Если φ – вещественная функция, то Q_φ симметричен и определен на всем $\mathfrak{H}_\theta$, а потому самосопряжен.

Билинейная форма в гильбертовом пространстве определяется квадратичной формой, поэтому определение (7) можно заменить следующим

$$|(\varphi f, f)| \leq \alpha \|f\|_\theta^2 + \beta \|f\|^2 \leq \alpha' \|f\|_\theta^2.$$

Нижнюю грань чисел α' , при которых справедливы эти неравенства, называют *нормой* φ , а нижнюю грань чисел α (с произвольной константой β) называют *существенной нормой*. Пространство мультипликаторов $M[\mathfrak{H}_\theta \rightarrow \mathfrak{H}_{-\theta}]$, наделенное обычной нормой, является банаховым пространством. Далее обозначаем его через $M[\theta]$. Через $\|\varphi\|_{M[\theta]}$ и $\text{ess } \|\varphi\|_{M[\theta]}$ обозначаем норму и существенную норму элементов $\varphi \in M[\theta]$. Полезно ввести еще понятие *существенной нижней грани мультипликатора* φ . Она совпадает с верхней гранью чисел γ таких, что

$$(\varphi f, f) \geq \gamma \|f\|_\theta^2 - \beta \|f\|^2$$

при всевозможных β .

Аналогично определяется пространство мультипликаторов $M[\mathfrak{H}_\theta \rightarrow \mathfrak{H}]$. Оно состоит из функций $\varphi \in L_{2, \text{loc}}$, для которых

$$|(\varphi f, g)| \leq C \|f\|_\theta \|g\|_0 \quad \forall f, g \in D.$$

В пространстве $M[\theta]$ полезно выделить подпространства $\overset{0}{M}[\theta]$ и $M_0[\theta]$. Подпространство $\overset{0}{M}[\theta]$ состоит из мультипликаторов φ , которые можно приблизить с произвольной точностью по норме $M[\theta]$ функциями из основного пространства D . Отметим, что умножение на функцию $\varphi \in D$ является не только ограниченным, но и компактным оператором из $\mathfrak{H}_\theta$ в $\mathfrak{H}_{-\theta}$. Действительно, если $\varphi \in D$, то носитель φ финитен, поэтому утверждение следует из компактности вложения $H_2^\theta(\Omega) \subset H_2^{-\theta}(\Omega)$, где Ω – произвольная компактная область, содержащая носитель φ . Если $\|Q_\varphi\|$ – норма оператора $Q_\varphi: \mathfrak{H}_\theta \rightarrow \mathfrak{H}_{-\theta}$, то из определения следует $\|Q_\varphi\| = \|\varphi\|_{M[\theta]}$. Поэтому если $\varphi \in \overset{0}{M}[\theta]$ и $\varphi_n \rightarrow \varphi$ по норме $M[\theta]$, $\varphi_n \in D$, то предел Q_φ компактных операторов Q_{φ_n} (по норме пространства операторов из $\mathfrak{H}_\theta$ в $\mathfrak{H}_{-\theta}$) также является компактным оператором из $\mathfrak{H}_\theta$ в $\mathfrak{H}_{-\theta}$. Таким образом, $\overset{0}{M}[\theta]$ состоит из компактных мультипликаторов. Подпространство $M_0[\theta]$ определим как множество $\varphi \in M[\theta]$, для которых существенная норма равна 0. Очевидно, $M_0[\theta] \supset \overset{0}{M}[\theta]$.

Приведем несколько достаточных условий принадлежности функций пространствам $\overset{0}{M}[\theta]$ и $M_0[\theta]$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\theta > n/2$ (здесь n – число переменных x функций из пространства $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R}^n)$). Тогда

$$\mathfrak{H}_{-\theta} \subset \overset{0}{M}[\theta]$$

и справедлива оценка

$$\|\varphi\|_{M[\theta]} \leq C \|\varphi\|_{-\theta}, \quad C = \text{const}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно (см. [14, гл. I, § 1.5] и имеющиеся там ссылки), что при $\theta > n/2$ пространства $\mathfrak{H}_\theta$ образуют алгебру, т.е. условие $f, g \in \mathfrak{H}_\theta$ влечет $fg \in \mathfrak{H}_\theta$ и

$$\|fg\|_\theta \leq C \|f\|_\theta \|g\|_\theta.$$

Пусть $\varphi \in \mathfrak{H}_{-\theta}$. Тогда для $f, g \in D$ имеем

$$|(\varphi f, g)| = |(\varphi, \bar{f}g)| \leq \|\varphi\|_{-\theta} \|\bar{f}g\|_\theta \leq C \|\varphi\|_{-\theta} \|f\|_\theta \|g\|_\theta.$$

Следовательно, $\varphi \in M[\theta]$, причем

$$\|\varphi\|_{M[\theta]} \leq C \|\varphi\|_{-\theta}. \quad (8)$$

По определению пространство $\overset{0}{M}[\theta]$ есть замыкание D по норме $M[\theta]$, а $\mathfrak{H}_{-\theta}$ – замыкание D по норме $\|\cdot\|_{-\theta}$. Поэтому оценка (8) влечет $\mathfrak{H}_{-\theta} \subset \overset{0}{M}[\theta]$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть θ целое, $\theta < n/2$ и $\gamma > n/\theta$. Тогда

$$H_\gamma^{-\theta}(\mathbb{R}^n) \subset \overset{0}{M}[\theta] \quad (9)$$

и справедлива оценка

$$\|\varphi\|_{M[\theta]} \leq C \|\varphi\|_{H_\gamma^{-\theta}}. \quad (10)$$

Если $\theta = n/2$, то аналогичное утверждение справедливо при $\gamma > 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем включение

$$H_\gamma^{-\theta}(\mathbb{R}^n) \subset M[\theta] \quad (11)$$

и оценку (10). Из этой оценки и плотности линейала D в $\mathfrak{H}_{-\theta}$, как и в предыдущей теореме, получим вложение (9).

Воспользуемся следующим результатом [14, гл. I, § 1.5]. Если $\psi \in M[\mathfrak{H}_\theta \rightarrow \mathfrak{H}]$, то для любого мультииндекса α , $|\alpha| \leq \theta/2$, имеем $D^\alpha \psi \in M[\theta]$, причем отображение $\psi \rightarrow D^\alpha \psi$ непрерывно.

Предположим, что уже доказано непрерывное вложение

$$L_\gamma(\mathbb{R}^n) \subset M[\mathfrak{H}_\theta \rightarrow \mathfrak{H}]. \quad (12)$$

Известно, что $\varphi \in H_\gamma^{-\theta}(\mathbb{R}^n)$, если и только если $\varphi = \sum_{|\alpha| \leq \theta} D^\alpha \psi_\alpha$, $\psi \in L_\gamma(\mathbb{R}^n)$. Поэтому из вложения (12) и сформулированного результата будет следовать вложение (11).

Пусть $\psi \in L_\gamma(\mathbb{R}^n)$. По условию теоремы $p := \gamma/2 > 1$. Положим $q^{-1} = 1 - p^{-1}$. Для функций $f \in D$ имеем

$$\|\psi f\|_{L_2} = \|\psi^2 f^2\|_{L_1} \leq \|\psi^2\|_{L_p} \|f^2\|_{L_q} = \|\psi\|_{L_\gamma} \|f\|_{L_{2q}}. \quad (13)$$

Из теоремы Соболева [18, гл. 4.6.2] имеем вложение $H_2^\theta \subset L_{2q}$, если выполнено неравенство $n/(2q) \geq n/2 - \theta$, которое эквивалентно условию теоремы $\gamma \geq n/\theta$. Поэтому $\|f\|_{L_{2q}} \leq C \|f\|_\theta$ и из оценки (13) следует справедливость вложения (12), а также его непрерывность. В случае $n = 2\theta$, $\gamma > 2$ теорема вложения Соболева также применима и доказательство полностью сохраняется.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\theta < n/2$ и $\gamma > n/2\theta$. Тогда

$$L_\gamma(\mathbb{R}^n) \subset \overset{0}{M}[\theta], \quad \|\varphi\|_{M[\theta]} \leq C \|\varphi\|_{L_\gamma}.$$

Если $\theta = n/2$, то аналогичное утверждение справедливо при $\gamma > n/(2\theta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию имеем $\gamma > 1$. Положим $\beta^{-1} = 1 - \gamma^{-1}$. Для $f \in D$, как и в теореме 7, получаем оценки

$$|(\varphi f, f)| = \|\varphi f^2\|_{L_1} \leq \|\varphi\|_{L_\gamma} \|f\|_{L_{2\beta}} \leq C \|\varphi\|_{L_\gamma} \|f\|_\theta,$$

если выполнено неравенство $n/(2\beta) \geq n/2 - \theta$, которое эквивалентно условию $\gamma \geq n/(2\theta)$. При $\theta = n/2$ доказательство сохраняется.

ТЕОРЕМА 8. Пусть функция φ зависит от s переменных и является мультипликатором из $H_2^\theta(\mathbb{R}^s)$ в $H_2^{-\theta}(\mathbb{R}^s)$, а функция $\psi(y)$ зависит от k переменных и принадлежит $L_\infty(\mathbb{R}^k)$. Пусть $n = k + s$, а число θ целое. Тогда $\varphi(x)\psi(y) \in M[\theta]$ (в пространстве n переменных) и справедлива оценка

$$\|\varphi\psi\|_{M[\theta]} \leq \|\varphi\|_{M[\theta]} \|\psi\|_{L_\infty}. \quad (14)$$

Кроме того, если $\varphi \in \overset{0}{M}[\theta]$ или $\varphi \in M_0[\theta]$, то $\varphi\psi \in M_0[\theta]$ в пространстве $\mathbb{R}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для функций $f(x, y) \in D(\mathbb{R}^n)$ норма в $\mathfrak{H}_2^\theta(\mathbb{R}^n)$ определяется равенством

$$\|f(x, y)\|_{H_2^\theta(\mathbb{R}^s)}^2 = \int_{\mathbb{R}^s} \sum_{|\alpha| \leq \theta} \left| \frac{\partial^\alpha f(x, y)}{\partial x^\alpha} \right|^2 dx.$$

Поэтому

$$\int_{\mathbb{R}^k} \|f(x, y)\|_{H_2^\theta(\mathbb{R}^s)}^2 \leq \|f(x, y)\|_{H_2^\theta(\mathbb{R}^{s+k})}^2.$$

Далее, учитывая, что φ – мультипликатор, получаем

$$|(\varphi\psi f, f)_{\mathbb{R}^s}| \leq |\psi(y)| \|\varphi\|_{M[\theta]} \|f(x, y)\|_{H_2^\theta(\mathbb{R}^s)}^2.$$

Проинтегрировав это неравенство по $\mathbb{R}^k$, получим оценку (14).

Если $\varphi \in M_0[\theta]$, то при любом $\varepsilon > 0$

$$|(\varphi f, f)_{\mathbb{R}^s}| \leq \varepsilon \|f(x, y)\|_{H_2^\theta(\mathbb{R}^s)}^2 + C(\varepsilon) \|f(x, y)\|_{L_2(\mathbb{R}^s)}^2.$$

Отсюда легко получаем $\varphi\psi \in M_0[\theta]$.

4. Основная теорема и примеры.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $T = (-\Delta)^m + 1$, $\mathcal{D}(T) = H_2^{2m}(\mathbb{R}^n) =: \mathfrak{H}_{2m}$, $S_0 = T + u(x)$, где $u(x)$ – полуограниченная вещественная функция, принадлежащая $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}(S_0) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, а S – расширение по Фридрихсу оператора S_0 . Пусть $q(x) \in M_0[m]$ или $M[m]$, но нижняя существенная грань q больше -1 . Тогда $S \tilde{+} q(x)$ корректно определен как самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$, причем области определения квадратичных форм операторов S и $S \tilde{+} q(x)$ совпадают. Для любой последовательности гладких функций $q_n(x)$, сходящихся к $q(x)$ в пространстве $M[m]$, операторы $S + q_n$ сходятся к $S \tilde{+} q$ в смысле равномерной резольвентной сходимости, причем спектры аппроксимирующих операторов сходятся к спектру предельного. Если $q(x) \in \overset{0}{M}[m]$, то непрерывные спектры S и $S \tilde{+} q$ совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сформулированные утверждения следуют из теорем 2–4. Напомним лишь, что пространство $\overset{0}{M}[m]$ состоит из вполне непрерывных мультипликаторов.

Полученные в п. 3 результаты позволяют привести много нетривиальных примеров, в которых условия теоремы 10 выполняются.

ПРИМЕР 1. Пусть $T = -d^2/dx^2$ в пространстве $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R}^1)$, а Q – оператор умножения на функцию $q(x) \in H_2^{-1}(\mathbb{R}^1)$. В силу теоремы 6 $q \in \overset{0}{M}[1]$. Поэтому корректно определено расширение по Фридрихсу $T \overset{\sim}{+} q$ оператора $-d^2/dx^2 + q(x)$, заданного на $C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ квадратичной формой. Непрерывный спектр $T \overset{\sim}{+} q$ совпадает с $\mathbb{R}^+$. Для любой последовательности функций $q_n \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, сходящихся к q по норме H_2^{-1} , “классические” операторы Штурма–Лиувилля $T + q_n$ сходятся к $T \overset{\sim}{+} q$ в смысле равномерной резольвентной сходимости.

Отметим, что более детальный анализ (основанный на других методах) оператора Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами на оси и отрезке предложен в работе [19], которая выполнялась одновременно с этой работой.

ПРИМЕР 2. Пусть $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R}^n)$, $T(-\Delta)^m + 1$, $Q = \delta(x)$, где $(\delta(x), f) = f(0)$. Из теоремы вложения Соболева имеем $H_2^m(\mathbb{R}^n) \subset C(\mathbb{R}^n)$, если $m > n/2$, причем вложение компактно. Поэтому при любых $\varepsilon > 0$, $f \in D$ имеем

$$(\delta(x)f, f) = (\delta(x), |f|^2) = |f(0)|^2 \leq \varepsilon \|f\|_m^2 + C(\varepsilon) \|f\|^2.$$

Так как носитель $\delta(x)$ компактен, то $\delta(x)$ – вполне непрерывный мультипликатор в $M[m]$, если только $m > n/2$. Формулировку следствий из этого факта оставляем читателям.

ПРИМЕР 3. Пусть $T = -\Delta + 1$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$, а обобщенная функция $\delta_{\Gamma, q}$ задана равенством

$$\delta_{\Gamma, q}(f) = \int_{\Gamma} q(y)f(y) dy, \quad f(x) \in D. \quad (15)$$

Здесь $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, $x = (y, t) \in \mathbb{R}^n$, Γ – гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$ определяется равенством $t = 0$, а $q(y) \in L_\infty(\mathbb{R}^{n-1})$. Очевидно,

$$\delta_{\Gamma, q}(x) = \delta(t)q(y).$$

Из теоремы 5 следует, что $\delta(t) \in M_0[1]$. Из теоремы 8 тогда получаем $\delta_{\Gamma, q} \in M_0[1]$. Поэтому сумма $-\Delta \overset{\sim}{+} \delta_{\Gamma, q}$ корректно определена и справедливы другие утверждения, вытекающие из теоремы 9.

Заметим, что вместо плоскости в качестве Γ можно рассмотреть гладкую компактную поверхность коразмерности 1. С помощью разбиения единицы на поверхности Γ и замены координат, выпрямляющей поверхность, функцию $\delta_{\Gamma, q}$ можно представить в виде конечного числа слагаемых вида (15), где Γ – гиперплоскость, а $q(y)$ имеет компактный носитель. Поэтому в случае компактной поверхности Γ получаем $\delta_{\Gamma, q} \in \overset{0}{M}[1]$.

ПРИМЕР 4. Пусть Ω – гладкая область в $\mathbb{R}^n$ с компактной границей $\partial\Omega = \Gamma$. Рассмотрим функцию

$$q_{\Gamma, \alpha}(x) = \text{sign}_{\Omega}(x)(\text{dist}(x, \Gamma))^{-\alpha}, \quad (16)$$

где $\text{sign}_{\Omega}(x) = 1$, если $x \in \Omega$, и -1 , если $x \notin \Omega$.

При $\alpha < 2$ обобщенная функция $q_{\Gamma, \alpha}(x)$ допускает регуляризацию (см. [20])

$$\text{V. P. } q_{\Gamma, \alpha}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\text{dist}(x, \Gamma) > \varepsilon} q_{\Gamma, \alpha}(x) f(x) dx.$$

Покажем, что при $\alpha < 3/2$ эта функция принадлежит пространству $\overset{0}{M}[1]$. С помощью гладкого разбиения единицы $\sum \psi_k \equiv 1$ эту функцию представим в виде конечного числа функций с компактными носителями, совпадающими с $\text{supp } \psi_k$, $k \geq 1$, и одной функции q_0 с носителем в окрестности ∞ , причем величину $\|q_0\|_{L_{\infty}}$ можно сделать произвольно малой. Достаточно рассмотреть только функции $\psi_k q_{\Gamma, \alpha}$, для которых $\text{supp } \psi_k \cap \Gamma \neq \emptyset$. Вблизи границы можно провести гладкую замену координат $x = (y, t)$ так, что $t = \text{sign}_{\Omega}(x) \text{dist}(x, \Gamma)$. Тогда получим

$$\psi_k q_{\Gamma, \alpha} = (\text{sign } t) |t|^{-\alpha} g(y) \chi(t, y),$$

где $\chi(t, y)$ – гладкая функция, умножение на которую не меняет мультипликативных свойств, а $g(y)$ – гладкая функция с компактным носителем.

Из теоремы 5 (при $n = 1$) следует $|t|^{-\alpha} \text{sign}(t) \in \overset{0}{M}[1]$, если $\alpha < 3/2$. Из теоремы 8 и компактности носителя $g(y)$ заключаем, что $g(y) |t|^{-\alpha} \text{sign}(t) \in \overset{0}{M}[1]$. Тем самым, при $\alpha < 3/2$ функция (16) лежит в $\overset{0}{M}[1]$, операторная сумма $-\Delta \tilde{+} q_{\Gamma, \alpha}$ определена и справедливы другие утверждения, сформулированные в теореме 9.

Основные результаты этой работы сообщались на семинарах в МГУ в 1998 году. Авторы благодарят проф. В. А. Кондратьева и А. Г. Костюченко за обсуждение результатов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 3. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1989.
- [2] Березин Ф. А., Фаддеев Л. Д. Замечания об уравнении Шрёдингера с сингулярным потенциалом // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137. № 7. С. 1011–1014.
- [3] Минлос Р. А., Фаддеев Л. Д. О точечном взаимодействии для системы из трех частиц в квантовой механике // Докл. АН СССР. 1961. Т. 141. № 6. С. 1335–1338.
- [4] Березин Ф. А. О модели Ли // Матем. сб. 1963. Т. 60. № 4. С. 425–446.
- [5] Gesztesy F., Simon B. Rank one perturbations at infinite coupling // J. Funct. Anal. 1995. V. 128. P. 245–252.
- [6] Kiselev A., Simon B. Rank one perturbations with infinitesimal coupling // J. Funct. Anal. 1995. V. 130. P. 345–356.
- [7] Фрагела А. К. О возмущении полигармонического оператора потенциалами с малыми носителями // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. № 1. С. 34–36.
- [8] Шондин Ю. Г. Возмущения на тонких множествах высокой коразмерности эллиптических операторов и теория расширений в пространстве с индефинитной метрикой // Зап. научн. сем. Ст.-Петербург. отдел. мат. инст. им. Стеклова (ПОМИ). 1995. Т. 222. Исследования по линейным операторам и теории функций. № 23. С. 246–292, 310–311.

- [9] Koshmanenko V., Karwowski W., Ota S. Schrödinger operator perturbed by operators related to null-sets // *Positivity*. 1998. V. 2. № 1. P. 77–99.
- [10] Albaverio S., Gestezy F., Hoegh-Krohn R., Holden H. *Some Exactly Solvable Models in Quantum Mechanics*. New York: Springer-Verlag, 1988.
- [11] Кошманенко В. Д. Сингулярные билинейные формы в теории возмущений самосопряженных операторов. Киев: Наукова Думка, 1993.
- [12] Gunson J. Perturbation theory for a Sturm–Liouville problem with an interior singularity // *Proc. R. Soc. London. A*. 1987. V. 414.
- [13] Kurasov P. On the Coulomb potentials in one dimension // *J. Phys. A*. 1996. V. 29. № 8. P. 1767–1771.
- [14] Мазья В. Г., Шапошникова Т. А. Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций. Л.: Изд. ЛГУ, 1986.
- [15] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 2. М.: Мир, 1978.
- [16] Каратаева Т. В., Кошманенко В. Д. Обобщенная сумма операторов // *Матем. заметки*. 1999. Т. 66. № 5. С. 671–682.
- [17] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
- [18] Трибель Х. Теория функциональных пространств. М.: Мир, 1986.
- [19] Савчук А. М., Шкаликов А. А. Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // *Матем. заметки*. 1999. Т. 66. № 6.
- [20] Гельфанд И. М., Шилев Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. Т. 1. М.: Физматгиз, 1959.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
03.03.1999