Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А.-Р. К. Рамазанов, Представление пространства полианалитических функций в виде прямой суммы ортогональных подпространств. Приложение к рациональным аппроксимациям, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 5, 741–759

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1218>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 15:39:11

УДК 517.5

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ВИДЕ ПРЯМОЙ СУММЫ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ. ПРИЛОЖЕНИЕ К РАЦИОНАЛЬНЫМ АППРОКСИМАЦИЯМ

А. К. Рамазанов

Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$, $L_2(D)$ – пространство функций, суммируемых с квадратом по площади в D ; $A_k(D)$ – множество всех k -аналитических в D функций ($A_1(D) = A(D)$ – множество всех аналитических в D функций); $A_k L_2(D) = L_2(D) \cap A_k(D)$, $A_1 L_2(D) = A L_2(D)$;

$$A_k L_2^0(D) = \left\{ f : f(z) = \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} ((1 - z \bar{z})^{k-1} F(z)), \right. \\ \left. F \in A(D), f \in A_k L_2(D) \right\}.$$

Доказано, что подпространства $A_k L_2^0(D)$, $k = 1, 2, \dots$, взаимно ортогональны и пространство $A_m L_2(D)$ является прямой суммой таких подпространств при $k = 1, 2, \dots, m$. Найдено ядро оператора ортогонального проектирования пространства $A_m L_2(D)$ на его подпространства $A_k L_2^0(D)$. Эти результаты применяются для изучения свойств полирациональных функций наилучшего приближения в метрике $L_2(D)$.

Библиография: 12 названий.

Функция $f(z)$, которая имеет в области G непрерывные частные производные по x и y до порядка $m \geq 1$, называется *полианалитической функцией* (п.а.ф.) *порядка m* (*m -аналитической*) в области G , если в этой области она удовлетворяет обобщенному уравнению Коши–Римана $\partial^m f / \partial \bar{z}^m = 0$.

Известно, что любую m -аналитическую функцию в области G можно единственным образом представить в виде (см. [1])

$$f(z) = \varphi_0(z) + \bar{z} \varphi_1(z) + \dots + \bar{z}^{m-1} \varphi_{m-1}(z), \quad (1)$$

где φ_k голоморфны в G . В случае, когда $G = D := \{z : |z| < 1\}$, равенство (1) можно преобразовать к виду (см. [2])

$$f(z) = P(z, \bar{z}) + g_0(z) + (1 - |z|^2) g_1(z) + \dots + (1 - |z|^2)^{m-1} g_{m-1}(z), \quad (2)$$

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 99-01-00119.

где g_k голоморфны в D , $P(z, \bar{z}) = P_0 + \bar{z}P_1(z) + \dots + \bar{z}^{m-1}P_{m-1}(z)$, $P_0 = \text{const}$, $P_k(z)$ при $k \geq 1$ — полином от z степени не выше $k-1$.

В дальнейшем функции φ_k и g_k будем называть *голоморфными компонентами* п.а.ф.

П.а. функциям посвящена книга [1]. В работах Е. П. Долженко и В. И. Данченко [2]–[6] исследованы различные вопросы граничного поведения п.а.ф. с использованием представления (2), получены интегральные представления для п.а.ф. В этой работе изучаются различные свойства п.а.ф. из пространства $L_2(D)$.

1. Представление полианалитических функций в виде прямой суммы.

Введем необходимые обозначения. $L_2(D)$ обозначает пространство комплекснозначных функций f с обычной нормой

$$\|f\|_2 = \left\{ \iint_D |f(z)|^2 dx dy \right\}^{1/2}; \quad (3)$$

$A_k(D)$ — множество всех k -аналитических в D функций ($A_1(D) = A(D)$ — множество всех аналитических в D функций); $A_k L_2(D) = L_2(D) \cap A_k(D)$, $A_1 L_2(D) = A L_2(D)$;

$$A_k L_2^0(D) = \left\{ f : f(z) = \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} ((1 - z\bar{z})^{k-1} F(z)), F \in A(D), f \in A_k L_2(D) \right\};$$

$C^{(n)}(\bar{D})$ — обозначает класс n раз непрерывно дифференцируемых на $\bar{D}$ функций. При $n = \infty$ этот класс будем обозначать через $C^\infty(\bar{D})$.

Всюду ниже

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad \binom{n}{k} = 0 \quad \text{при } k > n \text{ и при } k < 0.$$

Мы также будем пользоваться формулой Грина

$$\iint_D f(z) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \overline{g(z)} dx dy = \frac{1}{2i} \int_{\partial D} f(z) \overline{g(z)} dz - \iint_D \overline{g(z)} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) dx dy,$$

которая справедлива для любых функций $f, g \in C^1(\bar{D})$.

ТЕОРЕМА 1. *П.а.ф.*

$$f(z) = \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} ((1 - z\bar{z})^{k-1} F(z))$$

принадлежит пространству $A_k L_2^0(D)$ тогда и только тогда, когда $F \in A L_2(D)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. а) Система функций

$$\frac{1}{(k-1)!} \sqrt{\frac{n+k}{\pi}} \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} \{ (1 - z\bar{z})^{k-1} z^n \}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

образуют ортонормированный базис из полимногочленов в пространстве $A_k L_2^0(D)$.

б) Если при некотором натуральном k п.а.ф. $\frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} \{ (1 - z\bar{z})^{k-1} g(z) \}$ принадлежит пространству $A_k L_2^0(D)$ и $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, $z \in D$, то

$$\iint_D \left| \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} \{ (1 - z\bar{z})^{k-1} g(z) \} \right|^2 dx dy = \pi ((k-1)!)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|b_n|^2}{n+k}. \quad (4)$$

ТЕОРЕМА 2. Подпространства $A_k L_2^0(D)$ ($k = 1, 2, \dots$) попарно ортогональны и пространство $A_m L_2(D)$ является прямой суммой первых m из них, т.е.

$$A_m L_2(D) = A_1 L_2(D) \oplus A_2 L_2^0(D) \oplus \dots \oplus A_m L_2^0(D).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теорема 2 без доказательства анонсирована в [7].

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $f \in A_m L_2(D)$, то функции $(1 - |z|^2)^{m-1} \varphi_j(z)$, $j = 0, 1, \dots, m-1$, принадлежат пространству $L_2(D)$, где φ_j – компонента п.а.ф. f в представлении (1).

СЛЕДСТВИЕ 3. Система функций

$$\frac{1}{(k-1)!} \sqrt{\frac{n+k}{\pi}} \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} \{(1 - z\bar{z})^{k-1} z^n\}, \quad k = 1, 2, \dots, m; \quad n = 0, 1, \dots,$$

образует ортонормированный базис из полимногочленов в пространстве $A_m L_2(D)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В работе [8] намечен план доказательства полноты системы из следствия 3 посредством метода ортогонализации. Предлагаемое в данной работе доказательство, по моему, является более простым.

Для формулировки следующей теоремы введем еще одно обозначение:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_k^0(z, \zeta) &= \frac{1}{\pi((k-1)!)^2} \frac{\partial^{2(k-1)}}{\partial z^{k-1} \partial \bar{\zeta}^{k-1}} \\ &\times \left\{ (1 - z\bar{z})^{k-1} (1 - \zeta\bar{\zeta})^{k-1} \frac{(k-1)(1 - z\bar{\zeta}) + 1}{(1 - z\bar{\zeta})^2} \right\}, \\ \mathcal{R}_m(z, \zeta) &= \sum_{k=1}^m \mathcal{R}_k^0(z, \zeta), \quad z, \zeta \in D. \end{aligned}$$

Очевидно, что $\mathcal{R}_k^0(z, \zeta) = \overline{\mathcal{R}_k^0(\zeta, z)}$ и при фиксированном $\zeta \in D$ п.а.ф. $\mathcal{R}_k^0(z, \zeta)$ принадлежит пространству $A_k L_2^0(D)$.

Введем следующий интегральный оператор

$$P_k^0(f)(\zeta) = \iint_D f(z) \overline{\mathcal{R}_k^0(z, \zeta)} dx dy, \quad f \in L_2(D), \quad \zeta \in D, \quad z = x + iy. \quad (5)$$

Оператор, получаемый при замене ядра $\mathcal{R}_k^0(z, \zeta)$ в формуле (5) на ядро $\mathcal{R}_m(z, \zeta)$, будем обозначать через $P_m(f)$.

Тогда справедлива

ТЕОРЕМА 3. $P_k^0(f)$ ($P_m(f)$) – оператор ортогонального проектирования пространства $L_2(D)$ на его подпространство $A_k L_2^0(D)$ ($A_m L_2(D)$).

Из теоремы 2 следует, что любую п.а.ф. f из $A_m L_2(D)$ можно единственным образом представить в виде

$$f(z) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} \{(1 - z\bar{z})^{k-1} F_{k-1}(z)\}, \quad F_{k-1} \in A L_2(D).$$

Тогда, используя теорему 3, получаем

СЛЕДСТВИЕ 4. Если $f \in A_m L_2(D)$, то

$$\iint_D f(z) \overline{\mathcal{R}_k^0(z, \zeta)} dx dy = \frac{\partial^{k-1}}{\partial \zeta^{k-1}} \{ (1 - \zeta \bar{\zeta})^{k-1} F_{k-1}(\zeta) \}.$$

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $\varphi(z) = \frac{\partial^k}{\partial z^k} \{ (1 - z \bar{z})^k F(z) \}$ принадлежит пространству $A_{k+1} L_2^0(D)$. Тогда

$$F^{(n)}(\zeta) = \frac{n!}{\pi(k!)^2} \iint_D \varphi(z) \frac{\partial^k}{\partial \bar{z}^k} \left\{ (1 - z \bar{z})^k \bar{z}^n \frac{k(1 - \bar{z}\zeta) + n + 1}{(1 - \bar{z}\zeta)^{n+2}} \right\} dx dy, \\ \zeta \in D, \quad n = 0, 1, \dots$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из следствия 4 следует, что $\mathcal{R}_k^0(z, \zeta)$ является ядром ортогонального проектора, действующего из пространства $A_m L_2(D)$ на его подпространство $A_k L_2^0(D)$. При $k = 1$ это ядро совпадает с известным ядром Бергмана для круга D . В упоминавшейся уже работе [8] приводится (без доказательства) другое представление для $\mathcal{R}_m(z, \zeta)$:

$$\mathcal{R}_m(z, \zeta) = \frac{m}{\pi(1 - \zeta \bar{\zeta})^{2m}} \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \binom{m}{j+1} \binom{m+j}{m} \\ \times |1 - z \bar{\zeta}|^{2(m-1-j)} |z - \zeta|^{2j}. \quad (6)$$

СЛЕДСТВИЕ 6. Имеем

$$\|\mathcal{R}_k^0\|_2 = \sqrt{\mathcal{R}_k^0(z, z)} = \sqrt{\frac{2k-1}{\pi}} \frac{1}{1 - |z|^2}, \quad z \in D.$$

Теорему 3 можно использовать для получения оценок роста п.а.ф. при стремлении точки z к границе круга. Действительно, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 4а. 1) Если функция $\varphi \in A_k L_2^0(D)$, то

$$|\varphi(z)| \leq \sqrt{\frac{2k-1}{\pi}} \frac{1}{1 - |z|^2} \|\varphi\|_2, \quad z \in D. \quad (7)$$

2) Если функция $f \in A_m L_2(D)$, то

$$|f(z)| \leq \frac{m}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{1 - |z|^2} \|f\|_2, \quad z \in D. \quad (8)$$

Неравенства (7) и (8) являются точными. Знак равенства достигается соответственно при $\varphi(z) = \mathcal{R}_k^0(z, \zeta)$ и $f(z) = \mathcal{R}_m(z, \zeta) = \sum_{k=1}^m \mathcal{R}_k^0(z, \zeta)$.

Рассмотрим еще применение теоремы 3 к экстремальным задачам. Пусть $\zeta \in D$ — фиксированная точка и

$$M_\zeta^0(k) = \{f \in A_k L_2^0(D) : f(\zeta) = 1\}, \quad M_\zeta(m) = \{f \in A_m L_2(D) : f(\zeta) = 1\}.$$

Тогда, применив неравенства (7) и (8), получаем

ТЕОРЕМА 4b. 1) Экстремальная задача $\|f\|_2 \rightarrow \inf$, $f \in M_\zeta^0(k)$, имеет единственное решение f_0 :

$$f_0(z) = \frac{\mathcal{R}_k^0(z, \zeta)}{\mathcal{R}_k^0(\zeta, \zeta)}, \quad \|f_0\|_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2k-1}}(1 - \zeta\bar{\zeta}), \quad z, \zeta \in D.$$

2) Экстремальная задача $\|f\|_2 \rightarrow \inf$, $f \in M_\zeta(m)$, имеет единственное решение f_0 :

$$f_0(z) = \frac{\mathcal{R}_m(z, \zeta)}{\mathcal{R}_m(\zeta, \zeta)}, \quad \|f_0\|_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{m}(1 - \zeta\bar{\zeta}),$$

где $\mathcal{R}_m(z, \zeta) = \sum_{k=1}^m \mathcal{R}_k^0(z, \zeta)$, $z, \zeta \in D$.

Отметим, что неравенство (8) и пункт 2) теоремы 4b получены в [8], используя представление (6) для ядра $\mathcal{R}_m(z, \zeta)$.

Для доказательства сформулированных теорем нужны вспомогательные леммы.

ЛЕММА 1. Если $h_{k,n}(z) = \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} \{(1 - z\bar{z})^{k-1} z^n\}$, $k = 1, 2, \dots, m$; $n = 0, 1, \dots$, то

$$\begin{aligned} \iint_D h_{k,n}(z) \overline{h_{l,j}(z)} dx dy &= 0, \quad k \neq l, \\ \iint_D h_{k,n}(z) \overline{h_{k,j}(z)} dx dy &= \begin{cases} 0, & n \neq j, \\ \frac{\pi((k-1)!)^2}{n+k}, & n = j. \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Пусть $k < l$. Так как $h_{k,n} \in A_k L_2^0(D)$, то $\frac{\partial^{l-1}}{\partial \bar{z}^{l-1}} \{h_{k,n}(z)\} = 0$. Поэтому, применив к скалярному произведению в левой части равенства (9) формулу Грина $l-1$ раз, получаем (9).

Пусть теперь $k = l$. Тогда, применив еще раз формулу Грина, аналогично получаем

$$\begin{aligned} \iint_D h_{k,n}(z) \overline{h_{l,j}(z)} dx dy &= (k-1)! \iint_D \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} \{z^{n+k-1}\} (1 - |z|^2)^{k-1} \bar{z}^j dx dy \\ &= (k-1)! \frac{(n+k-1)!}{n!} \iint_D (1 - |z|^2)^{k-1} z^n \bar{z}^j dx dy. \end{aligned} \quad (10)$$

При $n \neq j$ последний интеграл равен нулю. Если же $n = j$, то, переходя к полярным координатам, из (10) следует

$$\iint_D h_{k,n}(z) \overline{h_{l,j}(z)} dx dy = (k-1)! \frac{(n+k-1)!}{n!} \pi B(k, n+1), \quad (11)$$

где $B(k, n+1) = n!(k-1)!/(n+k)!$ – Эйлеров интеграл первого рода (см. [9, с. 750]). Подставляя значение $B(k, n+1)$ в равенство (11), завершаем доказательство леммы 1.

ЛЕММА 2. а) Если $n \geq k$, то

$$\sum_{m=0}^{2k} (-1)^m \left(\sum_{j=0}^m \binom{k}{j} \binom{n+j}{k} \binom{k}{m-j} \binom{n+m-j}{k} \right) = 1, \quad (12)$$

$$\sum_{m=0}^{2k} (-1)^m m \left(\sum_{j=0}^m \binom{k}{j} \binom{n+j}{k} \binom{k}{m-j} \binom{n+m-j}{k} \right) = 2k(n+1). \quad (13)$$

б) Если $n \leq k$, то

$$\sum_{m=0}^{2k} (-1)^m \left(\sum_{j=0}^m \binom{k}{n-j} \binom{k+j}{k} \binom{k}{n-m+j} \binom{k+m-j}{k} \right) = 1, \quad (14)$$

$$\sum_{m=0}^{2k} (-1)^m m \left(\sum_{j=0}^m \binom{k}{n-j} \binom{k+j}{k} \binom{k}{n-m+j} \binom{k+m-j}{k} \right) = 2n(k+1). \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Рассмотрим производящую функцию

$$g(t) = \frac{1}{(k!)^2} \{ ((1-t)^k t^n)^{(k)} \}^2, \quad \text{где } t \in (-\infty, \infty).$$

Пусть $n \geq k$. Тогда имеем

$$g(t) = \frac{1}{(k!)^2} \left\{ \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \frac{k!}{j!} (1-t)^j \frac{n!}{(n-j)!} t^{n-j} \right\}^2, \quad (16)$$

$$g(t) = t^{2(n-k)} \sum_{m=0}^{2k} (-1)^m \times \left(\sum_{j=0}^m \binom{k}{j} \binom{n+j}{k} \binom{k}{m-j} \binom{n+m-j}{k} \right) t^m. \quad (17)$$

Полагая $t = 1$, из равенств (16) и (17) получаем (12). Далее, вычислив производную $g'(t)$, используя равенства (16) и (17), и приравняв значения $g'(1)$, полученные из этих равенств, учитывая еще равенство (12), получаем (13). Равенства (14) и (15) доказываются аналогично, рассмотрев ту же самую функцию $g(t)$ при $n \leq k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть п.а.ф. $f \in A_k L_2^0(D)$ и

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Тогда, используя лемму 1 и неравенство Бесселя, получаем

$$\iint_D |f(z)|^2 dx dy \geq \pi((k-1)!)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|b_n|^2}{n+k},$$

т.е. $F \in AL_2(D)$.

Докажем достаточное условие.

Легко показать, что если $F \in AL_2(D)$, то для любого натурального числа j функция $(1 - |z|^2)^j F^{(j)}(z)$ принадлежит $L_2(D)$. Тогда, записав п.а.ф. $f(z) = \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}}((1 - z\bar{z})^{k-1} F(z))$ в виде

$$f(z) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{(k-1-j)} \binom{k-1}{j} \frac{(k-1)!}{j!} \bar{z}^{k-1-j} (1 - |z|^2)^j F^{(j)}(z),$$

завершаем доказательство теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Ортогональность подпространств $A_k L_2^0(D)$ следует из леммы 1. Будем доказывать теорему, используя метод математической индукции. Пусть она доказана для $m = l$. Представим пространство $A_{l+1} L_2(D)$ в виде прямой суммы подпространства $A_l L_2(D)$ и его ортогонального дополнения B . По предположению индукции тогда получаем

$$A_{l+1} L_2(D) = A_1 L_2(D) \oplus A_2 L_2^0(D) \oplus \dots \oplus A_l L_2^0(D) \oplus B.$$

Докажем, что подпространство B совпадает с $A_{l+1} L_2^0(D)$. Для этого достаточно доказать, что любая функция φ из $B \cap C^\infty(\bar{D})$, ортогональная всем подпространствам $A_k L_2^0(D)$, $k = 1, 2, \dots, l+1$, тождественно равна нулю в D .

Пусть п.а.ф. $\varphi \in B \cap C^\infty(\bar{D})$ имеет представление

$$\varphi(z) = \sum_{p=0}^l \bar{z}^p g_p(z) = \sum_{p=0}^l \bar{z}^p \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,p} z^n.$$

Учитывая условие ортогональности функции φ подпространствам $A_k L_2^0(D)$, $k = 1, 2, \dots, l+1$, получаем

$$\iint_D \frac{\partial^{k-1}}{\partial \bar{z}^{k-1}} \{ (1 - z\bar{z})^{k-1} \bar{z}^\nu \} \varphi(z) dx dy = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots \quad (18)$$

При $k = 1$ равенство (18) принимает вид

$$\iint_D \bar{z}^\nu \sum_{p=0}^l \bar{z}^p \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,p} z^n dx dy = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots$$

Отсюда, переходя к полярным координатам и вычислив последний интеграл, получаем

$$\sum_{p=0}^l \frac{1}{\nu + p + 1} a_{\nu+p,p} = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots \quad (19)$$

При $k \geq 2$ из равенства (18), применив формулу Грина, получаем

$$\iint_D (1 - z\bar{z})^{k-1} \bar{z}^\nu \sum_{p=k-1}^l p \dots (p-k+2) \bar{z}^{p-k+1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,p} z^n \right) dx dy = 0,$$

$$k = 2, 3, \dots, l+1; \quad \nu = 0, 1, \dots$$

Как и выше, переходя к полярным координатам и вычислив интеграл в левой части последнего равенства, вместе с равенством (19) мы получаем следующую систему уравнений для коэффициентов компонент п.а.ф. φ :

$$\sum_{p=k-1}^l \frac{p \dots (p-k+2)}{(\nu+p-k+2) \dots (\nu+p+1)} a_{\nu+p-k+1,p} = 0,$$

$$k = 1, 2, \dots, l+1; \quad \nu = 0, 1, \dots \quad (20)$$

При каждом фиксированном ν система (20) имеет треугольный вид. Решая эту систему, получаем $a_{n,p} = 0$ при $p = 0, 1, \dots, l$ и $n = 0, 1, \dots$, что и требовалось доказать.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Рассмотрим δ -функционал в пространстве $A_k L_2^0(D)$:

$$\delta(\varphi(z)) = \varphi(\zeta), \quad \zeta \in D, \quad \varphi \in A_k L_2^0(D).$$

Используя следствие 1, нетрудно установить непрерывность δ -функционала в метрике, определяемой равенством (3), для функций из пространства $A_k L_2^0(D)$. Поэтому из теоремы об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве следует, что существует функция из пространства $A_k L_2^0(D)$, которая определяет этот функционал. Обозначим эту функцию через $\mathcal{R}_k^0(z, \zeta)$. Тогда мы получаем

$$\iint_D \varphi(z) \overline{\mathcal{R}_k^0(z, \zeta)} dx dy = \varphi(\zeta), \quad \zeta \in D, \quad (21)$$

для любой функции $\varphi \in A_k L_2^0(D)$.

Функция $\mathcal{R}_k^0(z, \zeta)$ называется *воспроизводящим ядром* пространства $A_k L_2^0(D)$. Учитывая равенство (21), разложим ядро $\mathcal{R}_k^0(z, \zeta)$ в ряд Фурье по ортонормированной системе функций (см. следствие 1) $e_{k,n}(z)$ из пространства $A_k L_2^0(D)$:

$$\mathcal{R}_k^0(z, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} e_{k,n}(z) \overline{e_{k,n}(\zeta)}. \quad (22)$$

После несложных вычислений из равенства (22) получаем требуемое представление для ядра $\mathcal{R}_k^0(z, \zeta)$, которое вместе с равенством (21) завершает доказательство теоремы 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. Из теоремы 2 следует, что для любой функции $f \in A_m L_2(D)$ существуют такие функции $F_{k-1} \in AL_2(D)$, $k = 1, 2, \dots, m$, для которых справедливо равенство

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} \{ (1 - z\bar{z})^{k-1} F_{k-1}(z) \} \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \bar{z}^j (-1)^j \sum_{k=j+1}^m \binom{k-1}{j} (z^j F_{k-1}(z))^{(k-1)}. \end{aligned}$$

Отсюда, используя представление (1) для п.а.ф. f , получаем

$$\varphi_j(z) = (-1)^j \sum_{k=j+1}^m \binom{k-1}{j} (z^j F_{k-1}(z))^{(k-1)}, \quad j = 0, 1, \dots, m-1. \quad (23)$$

Легко показать, что условие $g \in AL_2(D)$ является необходимым и достаточным условием для того, чтобы функция $(1 - |z|^2)^{k-1} g^{(k-1)}(z)$ принадлежала пространству $A_k L_2(D)$ при любом фиксированном натуральном числе k . Поэтому из равенства (23) следует утверждение следствия 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 6. Нам удобнее найти норму $\mathcal{R}_{k+1}^0(z, \zeta)$. Используя равенство (22), получаем

$$\begin{aligned} \pi \mathcal{R}_{k+1}^0(\zeta, \zeta) &= \pi \sum_{n=0}^{\infty} e_{k,n}(\zeta) \overline{e_{k,n}(\zeta)} = \sum_{n=0}^k (n+k+1) \\ &\times \left\{ \sum_{m=0}^{2n} (-1)^m \left(\sum_{j=0}^m \binom{k}{n-j} \binom{k+j}{k} \binom{k}{n-m+j} \binom{k+m-j}{k} \right) t^m \right\} t^{k-n} \\ &+ \sum_{n=k+1}^{\infty} (n+k+1) \\ &\times \left\{ \sum_{m=0}^{2k} (-1)^m \left(\sum_{j=0}^m \binom{k}{j} \binom{n+j}{k} \binom{k}{m-j} \binom{n+m-j}{k} \right) t^m \right\} t^{n-k}, \end{aligned}$$

где $t = |\zeta|^2$, $\zeta \in D$.

Вводя обозначение $\nu = m + k - n$ при $n \leq k$ и $\nu = m + n - k$ при $n > k$, а затем переставив знаки суммирования, далее имеем

$$\begin{aligned} \pi \mathcal{R}_{k+1}^0(\zeta, \zeta) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} t^{\nu} = \sum_{n=0}^k (n+k+1) \left\{ \sum_{\nu=k-n}^{k+n} (-1)^{\nu+n-k} \right. \\ &\times \left(\sum_{j=0}^{\nu+n-k} \binom{k}{n-j} \binom{k+j}{k} \binom{k}{k-\nu+j} \binom{\nu+n-j}{k} \right) t^{\nu} \Big\} \\ &+ \sum_{m=0}^{2k} (-1)^m \left\{ \sum_{\nu=m+1}^{\infty} (\nu - m + 2k + 1) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\sum_{j=0}^m \binom{k}{j} \binom{\nu+k-j}{k} \binom{k}{m-j} \binom{\nu+k-m+j}{k} \right) t^\nu \Bigg\} \\
& = \sum_{\nu=0}^k \left\{ \sum_{n=k-\nu}^k (-1)^{\nu+n-k} (n+k+1) \right. \\
& \quad \times \left(\sum_{j=0}^{\nu+n-k} \binom{k}{n-j} \binom{k+j}{k} \binom{k}{k-\nu+j} \binom{\nu+n-j}{k} \right) \Bigg\} t^\nu \\
& \quad + \sum_{\nu=k+1}^{2k} \left\{ \sum_{n=\nu-k}^k (-1)^{\nu+n-k} (n+k+1) \right. \\
& \quad \times \left(\sum_{j=0}^{\nu+n-k} \binom{k}{n-j} \binom{k+j}{k} \binom{k}{k-\nu+j} \binom{\nu+n-j}{k} \right) \Bigg\} t^\nu \\
& \quad + \sum_{\nu=1}^{2k} \left\{ \sum_{m=0}^{\nu-1} (-1)^m (\nu-m+2k+1) \right. \\
& \quad \times \left(\sum_{j=0}^m \binom{k}{j} \binom{\nu+k-j}{k} \binom{k}{m-j} \binom{\nu+k-m+j}{k} \right) \Bigg\} t^\nu \\
& \quad + \sum_{\nu=2k+1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=0}^{2k} (-1)^m (\nu-m+2k+1) \right. \\
& \quad \times \left(\sum_{j=0}^m \binom{k}{j} \binom{\nu+k-j}{k} \binom{k}{m-j} \binom{\nu+k-m+j}{k} \right) \Bigg\} t^\nu. \tag{24}
\end{aligned}$$

При $\nu \geq 2k+1$ из (24) имеем

$$\begin{aligned}
a_\nu &= \sum_{m=0}^{2k} (-1)^m (\nu-m+2k+1) \\
& \quad \times \left(\sum_{j=0}^m \binom{k}{j} \binom{\nu+k-j}{k} \binom{k}{m-j} \binom{\nu+k-m+j}{k} \right). \tag{25}
\end{aligned}$$

Учитывая простейшие свойства биномиальных коэффициентов, отсюда получаем

$$\begin{aligned}
a_\nu &= \sum_{m=0}^{2k} (-1)^m (\nu+m+1) \\
& \quad \times \left(\sum_{j=0}^{2k-m} \binom{k}{j} \binom{\nu+k-j}{k} \binom{k}{2k-m-j} \binom{\nu-k+m+j}{k} \right) \\
&= \sum_{m=0}^k (-1)^m (\nu+m+1) \\
& \quad \times \left(\sum_{j=k-m}^k \binom{k}{j} \binom{\nu+k-j}{k} \binom{k}{2k-m-j} \binom{\nu-k+m+j}{k} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{m=k+1}^{2k} (-1)^m (\nu + m + 1) \\
 & \times \left(\sum_{j=0}^{2k-m} \binom{k}{j} \binom{\nu + k - j}{k} \binom{k}{2k-m-j} \binom{\nu - k + m + j}{k} \right).
 \end{aligned}$$

Положив $n = j - (k - m)$, далее имеем

$$\begin{aligned}
 a_\nu &= \sum_{m=0}^k (-1)^m (\nu + m + 1) \left(\sum_{n=0}^m \binom{k}{n} \binom{\nu + n}{k} \binom{k}{m-n} \binom{\nu + m - n}{k} \right) \\
 & + \sum_{m=k+1}^{2k} (-1)^m (\nu + m + 1) \\
 & \times \left(\sum_{n=m-k}^k \binom{k}{n} \binom{\nu + n}{k} \binom{k}{m-n} \binom{\nu + m - n}{k} \right).
 \end{aligned}$$

Так как $\binom{n}{j} = 0$ при $j > n$ и при $j < 0$, то для $m \geq k$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=0}^m \binom{k}{n} \binom{\nu + n}{k} \binom{k}{m-n} \binom{\nu + m - n}{k} \\
 &= \sum_{n=m-k}^k \binom{k}{n} \binom{\nu + n}{k} \binom{k}{m-n} \binom{\nu + m - n}{k}.
 \end{aligned}$$

Поэтому для коэффициента a_ν при $\nu \geq 2k + 1$ получаем

$$a_\nu = \sum_{m=0}^{2k} (-1)^m (\nu + m + 1) \left(\sum_{n=0}^m \binom{k}{n} \binom{\nu + n}{k} \binom{k}{m-n} \binom{\nu + m - n}{k} \right).$$

В силу равенств (12) и (13) отсюда следует, что при $\nu \geq 2k + 1$

$$a_\nu = \nu + 1 + 2k(\nu + 1) = (2k + 1)(\nu + 1).$$

Пусть теперь $k < \nu \leq 2k$. Тогда из (24) получаем

$$\begin{aligned}
 a_\nu &= \sum_{n=\nu-k}^k (-1)^{\nu+n-k} (n + k + 1) \\
 & \times \left(\sum_{j=0}^{\nu+n-k} \binom{k}{n-j} \binom{k+j}{k} \binom{k}{k-\nu+j} \binom{\nu+n-j}{k} \right) \\
 & + \sum_{m=0}^{\nu-1} (-1)^m (\nu - m + 2k + 1)
 \end{aligned}$$

$$\times \left(\sum_{j=0}^m \binom{k}{j} \binom{\nu+k-j}{k} \binom{k}{m-j} \binom{\nu+k-m+j}{k} \right). \quad (26)$$

Введя обозначение $n+k=m$, а затем переписав слагаемые в обратном порядке относительно m , первую сумму из (26) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} A &= \sum_{m=\nu}^{2k} (-1)^{\nu+m} (m+1) \\ &\quad \times \left(\sum_{j=0}^{\nu+m-2k} \binom{k}{m-k-j} \binom{k+j}{j} \binom{k}{\nu-j} \binom{\nu+m-k-j}{k} \right) \\ &= \sum_{m=\nu}^{2k} (-1)^m (\nu-m+2k+1) \\ &\quad \times \left(\sum_{j=0}^{2\nu-m} \binom{k}{\nu+k-m-j} \binom{k+j}{j} \binom{k}{\nu-j} \binom{2\nu-m+k-j}{k} \right) \\ &= \sum_{m=\nu}^{2k} (-1)^m (\nu-m+2k+1) \\ &\quad \times \left(\sum_{j=\nu-k}^{\nu+k-m} \binom{k}{\nu+k-m-j} \binom{k+j}{j} \binom{k}{\nu-j} \binom{2\nu-m+k-j}{k} \right). \end{aligned}$$

Положив $n=j+m-\nu$ и воспользовавшись простейшими свойствами биномиальных коэффициентов, далее получаем ($m \geq \nu > k$)

$$\begin{aligned} A &= \sum_{m=\nu}^{2k} (-1)^m (\nu-m+2k+1) \\ &\quad \times \left(\sum_{n=m-k}^k \binom{k}{n} \binom{\nu+k-n}{k} \binom{k}{m-n} \binom{\nu+k-m+n}{k} \right) \\ &= \sum_{m=\nu}^{2k} (-1)^m (\nu-m+2k+1) \\ &\quad \times \left(\sum_{n=0}^m \binom{k}{n} \binom{\nu+k-n}{k} \binom{k}{m-n} \binom{\nu+k-m+n}{k} \right). \end{aligned}$$

Подставляя полученное значение A в (26), мы получаем такое же выражение для a_ν , как и в равенстве (25). Следовательно, и при $k < \nu \leq 2k$ имеем $a_\nu = (2k+1)(\nu+1)$.

Рассмотрим теперь случай $0 \leq \nu \leq k$.

Заметим, что при $m \geq \nu$

$$\sum_{j=0}^m \binom{k}{\nu-j} \binom{k+j}{k} \binom{k}{\nu-m+j} \binom{k+m-j}{k}$$

$$= \sum_{j=m-\nu}^{\nu} \binom{k}{\nu-j} \binom{k+j}{k} \binom{k}{\nu-m+j} \binom{k+m-j}{k}. \quad (27)$$

Из равенства (24) следует, что при $\nu \leq k$

$$\begin{aligned} a_{\nu} &= \sum_{n=k-\nu}^k (-1)^{\nu+n-k} (n+k+1) \\ &\quad \times \left(\sum_{j=0}^{\nu+n-k} \binom{k}{n-j} \binom{k+j}{k} \binom{k}{k-\nu+j} \binom{\nu+n-j}{k} \right) \\ &\quad + \sum_{m=0}^{\nu-1} (-1)^m (\nu-m+2k+1) \\ &\quad \times \left(\sum_{j=0}^m \binom{k}{j} \binom{\nu+k-j}{k} \binom{k}{m-j} \binom{\nu+k-m+j}{k} \right) \\ &= A_1 + A_2. \end{aligned}$$

Положим $m = n - (k - \nu)$. Тогда сумма A_1 примет вид

$$\begin{aligned} A_1 &= \sum_{m=0}^{\nu} (-1)^m (m+2k+1-\nu) \\ &\quad \times \sum_{j=0}^m \binom{k}{\nu-j} \binom{k+j}{k} \binom{k}{\nu-m+j} \binom{k+m-j}{k}. \end{aligned}$$

Преобразуем сумму A_2 . Для этого сделаем замену $m = 2\nu - n$. Тогда получим

$$\begin{aligned} A_2 &= \sum_{n=\nu+1}^{2\nu} (-1)^n (n+2k+1-\nu) \\ &\quad \times \left(\sum_{j=0}^{2\nu-n} \binom{k}{j} \binom{\nu+k-j}{k} \binom{k}{2\nu-n-j} \binom{k-\nu+n+j}{k} \right). \end{aligned}$$

Положим $j + n - \nu = i$. Тогда, учитывая равенство (27) и возвращаясь к старым переменным, A_2 примет вид

$$\begin{aligned} A_2 &= \sum_{m=\nu+1}^{2\nu} (-1)^m (m+2k+1-\nu) \\ &\quad \times \sum_{j=0}^m \binom{k}{\nu-j} \binom{k+j}{k} \binom{k}{\nu-m+j} \binom{k+m-j}{k}. \end{aligned}$$

Используя полученные значения A_1 и A_2 и равенства (14), (15), окончательно находим

$$a_{\nu} = A_1 + A_2 = \sum_{m=0}^{2\nu} (-1)^m (m+2k+1-\nu)$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{j=0}^m \binom{k}{\nu-j} \binom{k+j}{k} \binom{k}{\nu-m+j} \binom{k+m-j}{k} \\ & = (2k+1)(\nu+1). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\pi \mathcal{R}_{k+1}^0(\zeta, \zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (2k+1)(\nu+1)t^{\nu} = \frac{2k+1}{(1-t)^2},$$

где $t = |\zeta|^2$.

Следствие 6 доказано.

2. Рациональная аппроксимация. Обозначим через $\mathcal{R}_n$ – класс всех рациональных функций степени не выше n с полюсами вне круга D .

П.а. функцию вида

$$r(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \bar{z}^k r_{n_k}(z), \quad r_{n_k} \in \mathcal{R}_{n_k}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

будем называть *полирациональной функцией* (п.р.ф.) *порядка m* (m -рациональной функцией).

По теореме 2 любую п.а.ф. $f \in A_m L_2(D)$ можно единственным образом представить в виде

$$f(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k}{\partial z^k} \{ (1 - z\bar{z})^k F_k(z) \}, \quad F_k \in AL_2(D), \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (28)$$

Используя теорему 3, можно показать, что для п.р.ф. $r(z)$ ее компоненты F_k в представлении (28) могут быть и не рациональными функциями. Поэтому для данной п.а.ф. $f \in A_m L_2(D)$ ее п.р.ф. наилучшего приближения в метрике (3) будем искать в виде

$$r(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k}{\partial z^k} \{ (1 - z\bar{z})^k r_{n_k}(z) \}, \quad r_{n_k} \in \mathcal{R}_{n_k}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (29)$$

Для данного мультииндекса $(n) = (n_0, n_1, \dots, n_{m-1})$ с неотрицательными компонентами, через

$$r_{(n)}(z; f) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k}{\partial z^k} \{ (1 - z\bar{z})^k r_{n_k}(z; f) \}, \quad r_{n_k} \in \mathcal{R}_{n_k}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (30)$$

будем обозначать m -рациональную функцию наилучшего приближения степени не выше (n) для m -аналитической функции (28) в метрике (3) среди п.р.ф. вида (29), а через $L_2 \hat{R}_{(n)}(f, D, m)$ – соответствующее отклонение п.а.ф. от п.р.ф. вида (29) в той же самой метрике. Очевидно, что

$$\|f - r_{(n)}(\cdot, f)\|_2^2 = \sum_{k=0}^{m-1} \left\| \frac{\partial^k}{\partial z^k} \{ (1 - z\bar{z})^k (F_k(z) - r_{n_k}(z; f)) \} \right\|_2^2. \quad (31)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из равенства (31) следует, что компонента $r_{n_k}(z; f)$ m -рациональной функции наилучшего приближения $r_{(n)}(z; f)$ вида (30) обладает следующим свойством

$$\left\| \frac{\partial^k}{\partial z^k} \{ (1 - z\bar{z})^k (F_k(z) - r_{n_k}(z; f)) \} \right\|_2 = \inf \left\{ \left\| \frac{\partial^k}{\partial z^k} \{ (1 - z\bar{z})^k (F_k(z) - \rho_{n_k}(z)) \} \right\|_2 ; \rho_{n_k} \in \mathcal{R}_{n_k} \right\},$$

т.е. $r_{n_k}(z; f)$ является рациональной функцией наилучшего приближения степени не выше n_k для компоненты F_k функции (28) в метрике, определяемой следующим равенством

$$\left\| \frac{\partial^k}{\partial z^k} \{ (1 - z\bar{z})^k F_k(z) \} \right\|_2 = \left\{ \iint_D \left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} \{ (1 - z\bar{z})^k F_k(z) \} \right|^2 dx dy \right\}^{1/2}. \quad (32)$$

Этим замечанием мы в дальнейшем будем пользоваться.

ТЕОРЕМА 5. Если при некотором целом k из отрезка $[0, m-1]$ компонента F_k m -аналитической функции (28) из $A_m L_2(D)$ не является рациональной функцией степени не выше n_k , то $\deg\{r_{n_k}(z; f)\} = n_k$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. При $m = 1$ теорема 5 доказана в [11], а при $m > 1$ она анонсирована в [10].

СЛЕДСТВИЕ 7. При условиях теоремы 5 $L_2 \tilde{R}_{(n)}(f, D, m)$ строго монотонно убывает по $k+1$ компоненте мультииндекса $(n) = (n_0, n_1, \dots, n_{m-1})$.

СЛЕДСТВИЕ 8. При условиях теоремы 5 $\|r_{(n)}(\cdot; f)\|_2$ строго монотонно возрастает по $k+1$ компоненте мультииндекса $(n) = (n_0, n_1, \dots, n_{m-1})$. В частности,

$$\|r_{(n-1)}(\cdot; f)\|_2 < \|r_{(n)}(\cdot; f)\|_2, \\ \{L_2 \tilde{R}_{(n)}(f, D, m)\}^2 = \|f\|_2^2 - \|r_{(n)}(\cdot; f)\|_2^2.$$

СЛЕДСТВИЕ 9. Если $f \in A_m L_2(D)$, то

$$\{L_2 \tilde{R}_{(n)}(f, D, m)\}^2 \leq \sum_{k=0}^{m-1} (k!)^2 \{L_2 R_{n_k}(F_k, D)\}^2 \leq m \{L_2 \tilde{R}_{(n)}(f, D, m)\}^2,$$

где $L_2 R_n(g, D)$ – наименьшее уклонение функции $g \in AL_2(D)$ от рациональных функций из $\mathcal{R}_n$ в метрике (3).

Для формулировки следующей теоремы введем еще обозначения.

Пусть $r_{n_k}(z; f) = P_{n_k}(z)/Q_{n_k}(z)$, где P_{n_k} – некоторый многочлен степени не выше n_k , а

$$Q_{n_k}(z) = \prod_{j=1}^{l_k} (1 - z\bar{\alpha}_{j,k})^{\nu_{j,k}}, \quad |\alpha_{j,k}| < 1, \quad \sum_{j=1}^{l_k} \nu_{j,k} = \nu_k \leq n_k, \\ k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (33)$$

Если $g \in AL_2(D)$, то $g^{(-1,k)}$ будет обозначать первообразную для $z^k g(z)$ в круге D , которая при $z = 0$ равна нулю, т.е.

$$g^{(-1,k)}(z) = \int_0^z t^k g(t) dt, \quad z \in D.$$

ТЕОРЕМА 6. Если п.а.ф.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k}{\partial z^k} \{ (1 - z\bar{z})^k F_k(z) \}$$

принадлежит пространству $A_m L_2(D)$, то справедливы следующие интерполяционные равенства

$$F_k^{(s)}(0) = r_{n_k}^{(s)}(0; f), \quad s = 0, 1, \dots, 2(n_k - \nu_k), \quad (34)$$

$$F_k^{(-1,k)}(\alpha_{j,k}) = r_{n_k}^{(-1,k)}(\alpha_{j,k}; f), \quad j = 1, \dots, l_k, \quad (35)$$

$$F_k^{(p)}(\alpha_{j,k}) = r_{n_k}^{(p)}(\alpha_{j,k}; f), \quad j = 1, \dots, l_k, \quad p = 0, 1, \dots, 2\nu_{j,k} - 2, \quad (36)$$

$$k = 0, 1, \dots, m - 1.$$

Для данного мультииндекса $(n) = (n_0, n_1, \dots, n_{m-1})$ через $M_{(n)}(Q)$ обозначим подпространство п.р.ф. вида

$$r_{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k}{\partial z^k} \left\{ (1 - z\bar{z})^k \frac{P_{n_k}(z)}{Q_{n_k}(z)} \right\},$$

где многочлены $Q_{n_k}(z)$ определены равенствами (33) и фиксированы, а $P_{n_k}(z)$ принадлежат пространству многочленов степени не выше n_k , $k = 0, 1, \dots, m - 1$.

В случае приближения п.а.ф. $f \in A_m L_2(D)$ п.р. функциями из пространства $M_{(n)}(Q)$ в метрике пространства $L_2(D)$ получаем следующий критерий элемента наилучшего приближения.

ТЕОРЕМА 7. Пусть фиксированы мультииндекс $(n) = (n_0, n_1, \dots, n_{m-1})$, функция $f \in A_m L_2(D)$ и многочлены $Q_{n_k}(z)$, определяемые равенствами (33), при условии $\deg\{Q_{n_k}\} = \nu_k \leq n_k$, $k = 0, 1, \dots, m - 1$. Тогда для того чтобы п.р.ф.

$$r_{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k}{\partial z^k} \{ (1 - z\bar{z})^k r_{n_k}(z) \}, \quad r_{n_k}(z) = \frac{P_{n_k}(z)}{Q_{n_k}(z)},$$

была п.р. функцией наилучшего приближения из пространства $M_{(n)}(Q)$ для п.а.ф. $f \in A_m L_2(D)$ в метрике $L_2(D)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие равенства

$$F_k^{(s)}(0) = r_{n_k}^{(s)}(0), \quad s = 0, 1, \dots, n_k - \nu_k,$$

$$F_k^{(-1,k)}(\alpha_{j,k}) = r_{n_k}^{(-1,k)}(\alpha_{j,k}), \quad j = 1, \dots, l_k,$$

$$F_k^{(p)}(\alpha_{j,k}) = r_{n_k}^{(p)}(\alpha_{j,k}), \quad j = 1, \dots, l_k, \quad p = 0, 1, \dots, \nu_{j,k} - 2,$$

$$k = 0, 1, \dots, m - 1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. При $m = 1$ теоремы 6 и 7 доказаны в [12].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Пусть $\deg\{r_{n_k}(z; f)\} < n_k$. Как и в работе [12], рассмотрим функцию ($|\alpha| < 1$)

$$\Phi_k(\lambda) = \iint_D \left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} \left\{ (1 - z\bar{z})^k \left(F_k(z) - r_{n_k}(z; f) - \frac{\lambda}{1 - \bar{\alpha}z} \right) \right\} \right|^2 dx dy.$$

В силу замечания 4 $\Phi_k(0) \leq \Phi_k(\lambda)$. Поэтому $\partial\Phi_k/\partial\bar{\lambda} = 0$ при $\lambda = 0$, т.е.

$$\iint_D \frac{\partial^k}{\partial z^k} \{ (1 - z\bar{z})^k (F_k(z) - r_{n_k}(z; f)) \} \overline{\frac{\partial^k}{\partial z^k} \left\{ (1 - z\bar{z})^k \frac{1}{1 - \bar{\alpha}z} \right\}} dx dy = 0.$$

Отсюда, разлагая функцию $1/(1 - \bar{\alpha}z)$ ($|z| < 1$, $|\alpha| < 1$) в степенной ряд, получаем

$$\iint_D \frac{\partial^k}{\partial z^k} \{ (1 - z\bar{z})^k (F_k(z) - r_{n_k}(z; f)) \} \overline{\frac{\partial^k}{\partial z^k} \{ (1 - z\bar{z})^k z^j \}} dx dy = 0, \quad j = 0, 1, \dots \quad (37)$$

Из равенства (37) и следствия 1 следует, что полианалитическая функция

$$\frac{\partial^k}{\partial z^k} \{ (1 - z\bar{z})^k (F_k(z) - r_{n_k}(z; f)) \}$$

из пространства $A_{k+1}L_2^0(D)$ ортогональна этому же пространству, что в силу полноты пространства $A_{k+1}^0L_2(D)$ дает нам $F_k(z) = r_{n_k}(z; f)$, $z \in D$. Полученное противоречие доказывает теорему 5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Всюду ниже k – целое число из отрезка $[0, m - 1]$. Рассмотрим функцию (см. еще [12])

$$\Psi_k(\lambda) = \iint_D \left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} \left\{ (1 - z\bar{z})^k \left(F_k(z) - r_{n_k}(z; f) - \frac{P_{n_k}(z) + \lambda u(z)}{Q_{n_k}(z) + \lambda v(z)} \right) \right\} \right|^2 dx dy,$$

где u и v – произвольные многочлены степени не выше n_k .

Так как $\Psi_k(0) \leq \Psi_k(\lambda)$, то $\partial\Psi_k/\partial\bar{\lambda} = 0$ при $\lambda = 0$. По теореме 5 $\deg\{r_{n_k}(z; f)\} = n_k$. Поэтому из равенства $\partial\Psi_k/\partial\bar{\lambda} = 0$ в силу произвольности многочленов u и v (степени не выше n_k) следует, что

$$\iint_D \frac{\partial^k}{\partial z^k} \{ (1 - z\bar{z})^k (F_k(z) - r_{n_k}(z; f)) \} \overline{\frac{\partial^k}{\partial z^k} \left\{ (1 - z\bar{z})^k \frac{T(z)}{Q_{n_k}^2(z)} \right\}} dx dy = 0 \quad (38)$$

для любого многочлена $T(z)$ степени не выше $2n_k$. Путем выбора многочлена $T(z)$ из равенства (38) получаем

$$\iint_D \frac{\partial^k}{\partial z^k} \{ (1 - z\bar{z})^k (F_k(z) - r_{n_k}(z; f)) \} \overline{\frac{\partial^k}{\partial z^k} \{ (1 - z\bar{z})^k z^s \}} dx dy = 0, \quad (39)$$

$$s = 0, 1, \dots, 2(n_k - \nu_k),$$

$$\iint_D \frac{\partial^k}{\partial z^k} \{ (1 - z\bar{z})^k (F_k(z) - r_{n_k}(z; f)) \} \overline{g_1(z)} dx dy = 0, \quad (40)$$

$$\iint_D \frac{\partial^k}{\partial z^k} \{ (1 - z\bar{z})^k (F_k(z) - r_{n_k}(z; f)) \} \overline{g_2(z)} dx dy = 0, \quad (41)$$

$$j = 1, 2, \dots, l_k; \quad p = 0, 1, \dots, 2\nu_{j,k} - 2,$$

где

$$g_1(z) = \frac{\partial^k}{\partial z^k} \left\{ (1 - z\bar{z})^k \frac{1}{1 - z\bar{\alpha}_{j,k}} \right\},$$

$$g_2(z) = \frac{\partial^k}{\partial z^k} \left\{ (1 - z\bar{z})^k z^p \frac{k(1 - z\bar{\alpha}_{j,k}) + p + 1}{(1 - z\bar{\alpha}_{j,k})^{p+2}} \right\}.$$

Из равенств (39) и (41), используя следствие 5, получаем равенства (34) и (36) теоремы 6. Для доказательства равенства (35) вычислим интеграл в левой части равенства (40).

Положим

$$F_k(z) - r_{n_k}(z; f) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j, \quad \alpha_{j,k} = \alpha.$$

Разложив функцию $1/(1 - z\bar{\alpha})$, $|z| < 1$, в степенной ряд, представим равенство (40) в виде

$$\iint_D \sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{\partial^k}{\partial z^k} \{ (1 - z\bar{z})^k z^j \} \overline{\sum_{j=0}^{\infty} \bar{\alpha}^j \frac{\partial^k}{\partial z^k} \{ (1 - z\bar{z})^k z^j \}} dx dy = 0.$$

Отсюда, используя лемму 1, получаем

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{\alpha^j}{j + k + 1} = 0,$$

что эквивалентно равенству (35).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7 проводится аналогично доказательству теоремы 4 из работы [12] с использованием замечания 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 9. Пусть $F_k(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j,k} z^j$ и

$$r_{n_k}(z; F_k) = \sum_{j=0}^{\infty} b_{j,k} z^j, \quad \rho_{n_k}(z; F_k) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{j,k} z^j$$

ее рациональные функции наилучшего приближения степени не выше n_k в метриках, определяемых равенствами (32) и (3) соответственно. Тогда, используя замечание 4 и равенство (4), мы получаем

$$\begin{aligned} \{L_2 \tilde{R}_{(n)}(f, D, m)\}^2 &= \pi \sum_{k=0}^{m-1} (k!)^2 \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|a_{j,k} - b_{j,k}|^2}{j + k + 1} \right\} \\ &\leq \pi \sum_{k=0}^{m-1} (k!)^2 \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|a_{j,k} - c_{j,k}|^2}{j + k + 1} \right\} \\ &\leq \sum_{k=0}^{m-1} (k!)^2 \{L_2 R_{n_k}(F_k, D)\}^2. \end{aligned} \quad (42)$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \{L_2 R_{n_k}(F_k, D)\}^2 &= \pi \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|a_{j,k} - c_{j,k}|^2}{j+1} \right\} \\ &\leq \pi \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j+k+1}{j+1} \frac{|a_{j,k} - b_{j,k}|^2}{j+k+1} \right\}. \end{aligned} \quad (43)$$

Из равенств (42) и (43) следует утверждение следствия 9.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Balk M. B. Polyanalytic Functions. Berlin: Akad. Verlag, 1991.
- [2] Долженко Е. П. О граничном поведении компонент полианалитической функции // Докл. РАН. 1994. Т. 338. № 5. С. 585–588.
- [3] Долженко Е. П., Данченко В. И. О граничном поведении решений обобщенного уравнения Коши–Римана // Алгебра и анализ. Тезисы докл. конференции, посвященной 100-летию Б. М. Гагаева. Казань, 1997. С. 70–73.
- [4] Долженко Е. П., Данченко В. И. О граничном поведении производных полианалитических функций // Современные проблемы теории функций. Тезисы докл. 9-й Саратовской зимней школы. Саратов, 1997. С. 54.
- [5] Долженко Е. П. О граничном поведении компонент полианалитической функции // Матем. заметки. 1998. Т. 63. № 6. С. 821–834.
- [6] Долженко Е. П., Данченко В. И. О граничном поведении решений обобщенного уравнения Коши–Римана // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1998. № 3. С. 16–25.
- [7] Рамазанов А. К. Представление пространства полианалитических функций в виде прямой суммы ортогональных подпространств // Международная конф. по теории приближения функций, посвященная памяти П. П. Коровкина. Тез. докл.. Калуга, 1996. С. 178–179.
- [8] Кошелев А. Д. Об kern функции для гильбертова пространства полианалитических функций в круге // Докл. АН СССР. 1977. Т. 232. № 2. С. 277–279.
- [9] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Наука, 1970.
- [10] Рамазанов А. К. О свойствах полирациональных функций наилучшего приближения // Современные проблемы теории функций и их приложения. Тез. докл. 8 Саратовской зимней школы. Саратов, 1996. С. 91.
- [11] Махмудов Х. М. О наилучших рациональных приближениях функций комплексного переменного, суммируемых по площади // Матем. заметки. 1989. Т. 45. № 4. С. 89–94.
- [12] Вячеславов Н. С., Рамазанов А. К. Интерполяционные свойства рациональных функций наилучшего приближения в среднем квадратическом на окружности и в круге // Матем. заметки. 1995. Т. 57. № 2. С. 228–239.

Калужский филиал МГТУ им. Н. Э. Баумана

Поступило

12.05.1998

Исправленный вариант

22.04.1999