Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Г. Рыков, Распространение особенностей типа ударных волн в системе уравнений двумерной газовой динамики без давления, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 5, 760–769

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1219>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 14:38:58

УДК 533.6.011:51

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ТИПА УДАРНЫХ ВОЛН В СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ ДВУМЕРНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ БЕЗ ДАВЛЕНИЯ

Ю. Г. Рыков

В работе изучается система уравнений, состоящая из двумерного уравнения Бюргерса и уравнения неразрывности. Такая система была предложена Я. Б. Зельдовичем в 1970 году для описания формирования крупномасштабной структуры Вселенной. В настоящей статье для дивергентной формы записи этой системы (являющейся системой уравнений газовой динамики без давления) сформулировано строгое определение понятия обобщенного решения в терминах мер Радона и получено обобщение соотношений Ренкина–Гюгонио. На основании полученных соотношений показано, что вариационное представление обобщенных решений, справедливое для одномерной системы уравнений газовой динамики без давления, в двумерном случае, вообще говоря, не имеет места.

Библиография: 13 названий.

1. Введение. Основные определения. В работе изучаются особенности типа ударных волн для системы уравнений двумерной газовой динамики без давления

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho u_2)}{\partial x_2} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho u_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_1^2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho u_1 u_2)}{\partial x_2} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho u_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_1 u_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho u_2^2)}{\partial x_2} &= 0, \quad (t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2,\end{aligned}\tag{1}$$

где (u_1, u_2) имеет физический смысл вектора скорости, ρ имеет физический смысл плотности. Система (1) является нестрогой гиперболической системой законов сохранения, имеющей три совпадающих характеристических значения и неполную систему собственных векторов. Благодаря таким свойствам в местах возникновения ударных волн (т.е. местах разрыва вектора скорости) имеет место образование сингулярностей типа δ -функций на поверхности u функции плотности. Поэтому (1) можно рассматривать как

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00377.

модель процесса концентрации вещества (например, в теории образования крупномасштабной структуры Вселенной, см. ниже). Мы будем исследовать задачу Коши для (1)

$$\begin{aligned}\rho(0, x_1, x_2) &\equiv 1, \\ u_1(0, x_1, x_2) &= u_1^{(0)}(x_1, x_2), \\ u_2(0, x_1, x_2) &= u_2^{(0)}(x_1, x_2),\end{aligned}\tag{2}$$

где $u_1^{(0)}, u_2^{(0)}$ являются кусочно $C^1(\mathbb{R}^2)$ функциями и будут взяты в специальном виде, чтобы локально сформировать движущийся фронт ударной волны.

Для гладких функций система (1) эквивалентна следующей системе уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho u_2)}{\partial x_2} &= 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} &= 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= 0, \quad (t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2.\end{aligned}\tag{3}$$

Последние два уравнения в системе (3) представляют собой так называемое невязкое уравнение Бюргерса, которое было предложено (но в трехмерном случае) Я.Б. Зельдовичем [1] для описания формирования крупномасштабной структуры Вселенной. В дальнейшем этот подход, в частности, рассмотрение всей системы (3), был развит в последующих работах (см., например, [2] и содержащиеся там ссылки) с физической точки зрения. Но поскольку мы фактически имеем дело с законами сохранения массы и импульса, кажется более удобным и отвечающим существу дела как с математической, так и с физической точки зрения использовать систему уравнений в дивергентной форме (1), особенно если имеет место распространение ударных волн. Для одномерного варианта системы (1) частные обобщенные решения были построены в [3] (там также были предложены некоторые численные схемы), а теорема существования обобщенных решений в смысле мер Радона для широкого класса начальных данных была доказана в [4]–[6]. В [4], [5] обобщенные решения были построены с помощью вариационного принципа для подходящего уравнения Гамильтона–Якоби (см. [7]–[10] о вариационном принципе для одного квазилинейного уравнения первого порядка).

Были предприняты определенные усилия, чтобы построить обобщенные решения для (1) по аналогии с одномерным случаем с помощью вариационного принципа, который можно написать для двумерного невязкого уравнения Бюргерса и затем обобщить, используя соответствующее уравнение Гамильтона–Якоби. Далее мы покажем, что, вообще говоря, это невозможно. Изучение задач, связанных с многомерными системами законов сохранения, где возникают разные типы особенностей, представляет значительные трудности, см., например, работы [11]–[13]. В настоящей работе исследуется “простейший” вырожденный случай двумерной системы, когда характеристики могут быть вычислены явно. Тем не менее, обобщенные решения системы (1) (см. определение 1 ниже) демонстрируют более сложный характер поведения по сравнению с обобщенными решениями для одного двумерного уравнения первого порядка типа Гамильтона–Якоби.

Как уже было отмечено, для гладких функций система (1) эквивалентна системе (3), и при достаточно малых значениях времени и для достаточно гладких начальных данных можно применять метод характеристик. Поэтому до возникновения особенностей решения задачи (1), (2) выглядят следующим образом

$$\begin{aligned}\rho(t, x_1, x_2) &= \frac{\partial(a, b)}{\partial(x_1, x_2)}, \\ u_1(t, x_1, x_2) &= u_1(0, a, b); \quad u_2(t, x_1, x_2) = u_2(0, a, b),\end{aligned}\quad (4)$$

где функции $a(t, x_1, x_2)$, $b(t, x_1, x_2)$ могут быть найдены из уравнений

$$x_1 = a + tu_1(0, a, b); \quad x_2 = b + tu_2(0, a, b). \quad (5)$$

Однако хорошо известно, что характеристики системы (3) могут пересекаться за конечное время даже в случае бесконечно гладких начальных данных. Следовательно, будут образовываться особенности: разрывы для вектора скорости (u_1, u_2) и δ -функции для плотности ρ , что соответствует процессу концентрации вещества в некоторых точках или вдоль некоторых кривых. Поэтому необходимо понятие обобщенного решения задачи (1), (2), которое ввиду характера возникающих особенностей естественно формулировать в терминах мер Радона.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $(P_t(dx_1, dx_2), (I_1)_t(dx_1, dx_2), (I_2)_t(dx_1, dx_2))$ – семейства мер Радона, определенных на Борелевских подмножествах $\mathbb{R}^2$, слабо непрерывных по t и таких, что $P_t \geq 0$, а $(I_1)_t, (I_2)_t$ – абсолютно непрерывны относительно P_t для почти всех $t > 0$. Определим вектор-функцию $(u_1(t, x_1, x_2), u_2(t, x_1, x_2))$ как производные Радона–Никодима

$$u_1(t, x_1, x_2) = \frac{d(I_1)_t}{dP_t}; \quad u_2(t, x_1, x_2) = \frac{d(I_2)_t}{dP_t}. \quad (6)$$

Тогда $(P_t, (I_1)_t, (I_2)_t)$ назовем *обобщенным решением* задачи (1), (2), если: 1) для любых функций $f, g, h \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$ (пространство непрерывно дифференцируемых функций с компактным носителем) и любых $0 < t_1 < t_2 < +\infty$ выполняются интегральные тождества

$$\begin{aligned}& \iint f(x_1, x_2) P_{t_2}(dx_1, dx_2) - \iint f(x_1, x_2) P_{t_1}(dx_1, dx_2) \\&= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iint \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) (I_1)_\tau(dx_1, dx_2) \right. \\& \quad \left. + \iint \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) (I_2)_\tau(dx_1, dx_2) \right\} d\tau,\end{aligned}\quad (7)$$

$$\begin{aligned}& \iint g(x_1, x_2) (I_1)_{t_2}(dx_1, dx_2) - \iint g(x_1, x_2) (I_1)_{t_1}(dx_1, dx_2) \\&= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iint \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2) u_1(\tau, x_1, x_2) (I_1)_\tau(dx_1, dx_2) \right. \\& \quad \left. + \iint \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2) u_2(\tau, x_1, x_2) (I_1)_\tau(dx_1, dx_2) \right\} d\tau,\end{aligned}\quad (8)$$

$$\begin{aligned}
& \iint h(x_1, x_2)(I_2)_{t_2}(dx_1, dx_2) - \iint h(x_1, x_2)(I_2)_{t_1}(dx_1, dx_2) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iint \frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1, x_2)u_1(\tau, x_1, x_2)(I_2)_\tau(dx_1, dx_2) \right. \\
&\quad \left. + \iint \frac{\partial h}{\partial x_2}(x_1, x_2)u_2(\tau, x_1, x_2)(I_2)_\tau(dx_1, dx_2) \right\} d\tau, \quad (9)
\end{aligned}$$

где знак $\iint$ обозначает интегрирование по всему пространству $\mathbb{R}^2$;

2) в слабом смысле при $t \rightarrow +0$

$$P_t \rightarrow da db; \quad (I_1)_t \rightarrow u_1(0, a, b) da db;$$

$$(I_2)_t \rightarrow u_2(0, a, b) da db.$$

В отношении системы (3) имеет место хорошо известное представление Хопфа–Коула [7] для решений с потенциальной начальной скоростью. Это представление может быть получено с помощью метода малой вязкости (т.е. добавления операторов второго порядка с малым параметром ε в правую часть последних двух уравнений (3) и последующего устремления ε к нулю) и позволяет определить местоположение особенностей. А именно,

$$(u_1, u_2) = \nabla_{(x_1, x_2)} \Psi(t, x_1, x_2), \quad (10)$$

где

$$\Psi(t, x_1, x_2) = \min_{a, b} \left\{ S_0(a, b) + \frac{(x_1 - a)^2}{2t} + \frac{(x_2 - b)^2}{2t} \right\},$$

S_0 представляет собой потенциал начальной скорости. Представление (10) имеет место в областях гладкости Ψ и дает возможность найти то множество точек, где возникнут особенности. А именно, сингулярными точками Ψ будут такие точки (t, x_1, x_2) , что глобальный минимум по переменным (a, b) выражения в фигурных скобках достигается более, чем в одной точке. Для одномерного случая представление (10) дает возможность построить обобщенное решение для одномерного аналога задачи (1), (2), см. [4], [5] (также и для непостоянной начальной плотности). Оказывается, что в двумерном случае обобщенное решение задачи (1), (2) в смысле определения 1 не может быть построено с помощью представления (10).

В п. 2 будут сформулированы условия на начальные данные (2), которые являются естественными ограничениями для возникновения ударной волны, и затем, предполагая, что такая ударная волна существует и является решением задачи (1), (2) в смысле определения 1, будут выведены формулы для скорости вдоль ударной волны. Эти формулы являются обобщениями соотношений Ренкина–Гюгоньо для гиперболических систем законов сохранения. В п. 3 показано, что в случае потенциальной начальной скорости полученные формулы определяют поверхность особенностей (в пространстве (t, x_1, x_2)), которая, вообще говоря, не совпадает с аналогичной поверхностью, определяемой с помощью представления (10).

Далее ниже буквенные индексы (кроме i, j и t) будут обозначать соответствующие частные производные.

2. Распространение фронта ударной волны. Обозначим координаты в плоскости $\mathbb{R}^2 \times \{t = 0\}$ через (a, b) . Пусть в плоскости (a, b) существует C^1 кривая $\mathcal{G} = (A(l), B(l))$, l – параметр вдоль кривой, такая, что $A_l \geq 0$, $B_l \geq 0$ или $A_l \geq 0$, $B_l \leq 0$; $A_l B_l \neq 0$. Предположим, что кривая $\mathcal{G}$ также может быть задана как решение уравнения $G(a, b) = 0$, $G \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Тогда рассмотрим следующие начальные данные (2)

$$\begin{aligned}\rho_0(a, b) &\equiv 1, \\ u_1^{(0)}(a, b) &= u_{1,-} + (u_{1,+} - u_{1,-})H(G(a, b)), \\ u_2^{(0)}(a, b) &= u_{2,-} + (u_{2,+} - u_{2,-})H(G(a, b)),\end{aligned}\quad (11)$$

где H – функция Хевисайда, т.е. $H(\theta) = 0$ для $\theta < 0$, $H(\theta) = 1$ для $\theta > 0$; и выполнены следующие условия:

I) для $(i = 1, 2)$

$$u_{i,-}(a, b) \in C^1(\overline{\mathcal{G}^-}), \quad u_{i,+}(a, b) \in C^1(\overline{\mathcal{G}^+}),$$

$\mathcal{G}^- \equiv \{(a, b) : G(a, b) < 0\}$, $\mathcal{G}^+ \equiv \{(a, b) : G(a, b) > 0\}$.

II) $A_l u_{2,-} - B_l u_{1,-} \leq 0$ и $A_l u_{2,+} - B_l u_{1,+} \geq 0$ на $\mathcal{G}$ в случае $A_l \geq 0$, $B_l \geq 0$ или $A_l u_{2,-} - B_l u_{1,-} \geq 0$ и $A_l u_{2,+} - B_l u_{1,+} \leq 0$ на $\mathcal{G}$ в случае $A_l \geq 0$, $B_l \leq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. 1) Заметим, что условия I) говорят о том, что для всякой точки $(a^*, b^*) = (A(l^*), B(l^*)) \in \mathcal{G}$ существует некоторая область $Q \subset \mathbb{R}^2 \times [0, T(l^*)]$, $T(l^*) > 0$, $(a^*, b^*) \in Q \cap \{t = 0\}$ такая, что преобразования

$$x_1 = a + t u_{1,j}(a, b),$$

$$x_2 = b + t u_{2,j}(a, b) \quad (j = +, -)$$

являются невырожденными для всякого $0 < t < T(l^*)$, характеристические прямые (5) с $u_i(0, a, b) = u_{i,-}$ ($i = 1, 2$) не пересекаются и характеристические прямые (5) с $u_i(0, a, b) = u_{i,+}$, ($i = 1, 2$) не пересекаются.

В то же время условия II) говорят о том, что для $0 < t < T(l^*)$ существует другая область $Q_1 \subset Q$, где существуют ровно две характеристические прямые, начинающиеся по разные стороны от кривой $\mathcal{G}$ и приходящие в одну и ту же точку Q_1 (собственно говоря, поверхность ударной волны должна лежать в множестве Q_1).

Поэтому приведенные выше условия являются достаточно естественными для того, чтобы предположить существование ударной волны локально по пространству в течение некоторого времени $T(l^*) > 0$.

Таким образом, можно искать решение задачи (1), (11) в виде

$$\begin{aligned}\rho(t, x_1, x_2) &= \rho_- + (\rho_+ - \rho_-)H(S) + \tilde{P}_t \delta(S), \\ \rho u_1(t, x_1, x_2) &= \rho_- u_{1,-} + (\rho_+ u_{1,+} - \rho_- u_{1,-})H(S) + (\tilde{I}_1)_t \delta(S), \\ \rho u_2(t, x_1, x_2) &= \rho_- u_{2,-} + (\rho_+ u_{2,+} - \rho_- u_{2,-})H(S) + (\tilde{I}_2)_t \delta(S),\end{aligned}\quad (12)$$

где $\rho_j(t, x_1, x_2)$, $u_{i,j}(t, x_1, x_2)$, $S(t, x_1, x_2) \in C^1(R_+ \times R^2)$ ($i = 1, 2$; $j = +, -$) и удовлетворяют (1) в классическом смысле; решение уравнения $S(t, x_1, x_2) = 0$ представляет

собой некоторую поверхность $\mathcal{S}$ в $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$ такую, что $\mathcal{S} \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^2) = \mathcal{G}$; $\tilde{P}_t, (\tilde{I}_1)_t, (\tilde{I}_2)_t \in C^1(\mathcal{S})$; H – функция Хевисайда, упомянутая выше, δ – стандартная δ -функция Дирака.

Если обобщенное решение в смысле определения 1 задачи (1), (11) существует, то ввиду формул (6) определен вектор скорости $\tilde{U} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ на поверхности $\mathcal{S}$, и из каждой точки кривой $\mathcal{G}$ можно провести интегральную кривую поля $\tilde{U}$ на $\mathcal{S}$. Пусть $(x_1^s(t, l), x_2^s(t, l))$ является соответствующей параметризацией $\mathcal{S}$ (l – параметр вдоль $\mathcal{G}$) и $d(x_1^s)/dt = \tilde{u}_1$, $d(x_2^s)/dt = \tilde{u}_2$. Тогда в соответствии с формулами (5), учитывая условия I), II), определим функции $a_j(t, l), b_j(t, l) \in C^1(\mathcal{S})$ ($j = +, -$) как координаты начальных точек для характеристик, приходящих в момент времени t в одну и ту же точку поверхности $\mathcal{S}$.

Теперь определим отображение

$$\mathcal{L} : (a, b) \rightarrow (x_1, x_2) \quad (13)$$

следующим образом. Выпустим характеристическую прямую (принимая во внимание (11)) из точки (a, b)

$$x_1(\tau) = a + \tau u_1^{(0)}(a, b); \quad x_2(\tau) = a + \tau u_2^{(0)}(a, b) \quad (14)$$

и рассмотрим время τ_0 пересечения прямой (14) и поверхности $\mathcal{S}$. Тогда положим $\mathcal{L}_t(a, b) = (x_1(t), x_2(t))$, если $\tau_0 > t$, и $\mathcal{L}_t(a, b) = (x_1^s(t, l_0), x_2^s(t, l_0))$, если $\tau_0 \leq t$, где l_0 может быть найдено из соотношения $(x_1(\tau_0), x_2(\tau_0)) = (x_1^s(\tau_0, l_0), x_2^s(\tau_0, l_0))$.

Теперь мы в состоянии сформулировать обобщение соотношений Ренкина–Гюгонио.

ТЕОРЕМА 1. Пусть существует обобщенное в смысле определения 1 решение задачи (1), (11) в форме (12). Тогда справедливы следующие формулы

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1 &= (\tilde{I}_1)_t / \tilde{P}_t, \quad \tilde{u}_2 = (\tilde{I}_2)_t / \tilde{P}_t, \\ \tilde{P}_t &= \int_0^t [((a_+)_\tau (b_+)_l - (b_+)_\tau (a_+)_l) - ((a_-)_\tau (b_-)_l - (b_-)_\tau (a_-)_l)] d\tau, \\ (\tilde{I}_1)_t &= \int_0^t [u_{1,+}((a_+)_\tau (b_+)_l - (b_+)_\tau (a_+)_l) - u_{1,-}((a_-)_\tau (b_-)_l - (b_-)_\tau (a_-)_l)] d\tau, \\ (\tilde{I}_2)_t &= \int_0^t [u_{2,+}((a_+)_\tau (b_+)_l - (b_+)_\tau (a_+)_l) - u_{2,-}((a_-)_\tau (b_-)_l - (b_-)_\tau (a_-)_l)] d\tau. \end{aligned} \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть на плоскости (a, b) существует некоторое семейство областей $D(\tau)$ с ориентированными границами $\partial D(\tau)$ такое, что $D(\tau_1) \subset D(\tau_2)$ для $0 < \tau_1 < \tau_2 < T$. Пусть $\partial D(\tau)$ является замкнутой кривой $(a(\tau, l), b(\tau, l))$, l – параметр вдоль кривой, $a, b \in C^1([\tau_1, \tau_2] \times \mathbb{R})$. Тогда легко проверить справедливость следующей формулы

$$\frac{d}{d\tau} \iint_{D(\tau)} \varphi da db = \iint_{D(\tau)} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} da db + \oint_{\partial D(\tau)} \varphi (a_\tau b_l - b_\tau a_l) dl, \quad (17)$$

где $\varphi \in C^1([\tau_1, \tau_2] \times \overline{\bigcup_{\tau \in [\tau_1, \tau_2]} D(\tau)})$.

Обозначим через Π некоторый круг на плоскости (a, b) такой, что $\Pi \times \{t\} \cap S_t \neq \emptyset$, $S_t \equiv S \cap \{t\} \times \mathbb{R}^2$. Обозначим через $D_-(t)$, $D_+(t)$ области на плоскости (x_1, x_2) , куда в момент времени t характеристические прямые приходят из точек (a_-, b_-) , (a_+, b_+) соответственно (заметим, что $D_-(t) \cup D_+(t) = \Pi \times \{t\}$ и $D_-(t) \cap D_+(t) = S_t$). Далее, рассмотрим правую часть интегрального тождества (7). Возьмем $f \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$ такую, что $\text{supp } f \subset \Pi$. Пусть $D_j^*(t) = \mathcal{L}_t^{-1}(D_j(t))$ ($j = +, -$), $S^*(t) = \mathcal{L}_t^{-1}(S_t)$. Определим функцию $f_t^*(a, b)$ так, что $f_t^*(a, b) = f(\mathcal{L}_t(a, b))$. Тогда, используя формулу (17), будем иметь

$$\begin{aligned} & \sum_{j=+,-} \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \iint_{D_j(t)} (f_{x_1} u_1 + f_{x_2} u_2) P_t(dx_1, dx_2) \right\} \\ &= \sum_{j=+,-} \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \iint_{D_j^*(t)} \left[f_{x_1}(a + tu_1^{(0)}, b + tu_2^{(0)}) u_1^{(0)}(a, b) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + f_{x_2}(a + tu_1^{(0)}, b + tu_2^{(0)}) u_2^{(0)}(a, b) \right] da db \right\} \\ &= \sum_{j=+,-} \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{d}{dt} \iint_{D_j^*(t)} f_t^* da db \right\} \\ & \quad - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{S_t} f(x_1^s(t, l), x_2^s(t, l)) \left[\left(\frac{\partial(a_-)}{\partial t} \frac{\partial(b_-)}{\partial l} - \frac{\partial(b_-)}{\partial t} \frac{\partial(a_-)}{\partial l} \right) \right. \\ & \quad \left. - \left(\frac{\partial(a_+)}{\partial t} \frac{\partial(b_+)}{\partial l} - \frac{\partial(b_+)}{\partial t} \frac{\partial(a_+)}{\partial l} \right) \right] dl. \end{aligned}$$

Рассматривая таким же образом правые части интегральных тождеств (8), (9) и принимая во внимание формулы (6), получим доказательство теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. Для любого l и $0 < t < T(l)$ справедливы следующие формулы

$$\begin{aligned} & \int_0^t [x_1^s(t, l) - a_+(\tau, l) - tu_{1,+}(\tau, l)] ((a_+)_{\tau}(b_+)_l - (b_+)_{\tau}(a_+)_l) d\tau \\ &= \int_0^t [x_1^s(t, l) - a_-(\tau, l) - tu_{1,-}(\tau, l)] ((a_-)_{\tau}(b_-)_l - (b_-)_{\tau}(a_-)_l) d\tau; \\ & \int_0^t [x_2^s(t, l) - b_+(\tau, l) - tu_{2,+}(\tau, l)] ((a_+)_{\tau}(b_+)_l - (b_+)_{\tau}(a_+)_l) d\tau \\ &= \int_0^t [x_2^s(t, l) - b_-(\tau, l) - tu_{2,-}(\tau, l)] ((a_-)_{\tau}(b_-)_l - (b_-)_{\tau}(a_-)_l) d\tau. \quad (18) \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим формулы (15) и запишем их в следующей форме

$$(x_1^s)_{\tau} P_{t=\tau} = (I_1)_{t=\tau}, \quad (x_2^s)_{\tau} P_{t=\tau} = (I_2)_{t=\tau}.$$

Проинтегрируем полученные равенства по τ от 0 до t и затем, интегрируя по частям,

получим

$$\begin{aligned}
 & \int_0^t (x_1^s(t) - x_1^s(\tau)) [((a_+)_\tau (b_+)_l - (b_+)_\tau (a_+)_l) - ((a_-)_\tau (b_-)_l - (b_-)_\tau (a_-)_l)] d\tau \\
 &= \int_0^t (t - \tau) [u_{1,+} ((a_+)_\tau (b_+)_l - (b_+)_\tau (a_+)_l) - u_{1,-} ((a_-)_\tau (b_-)_l - (b_-)_\tau (a_-)_l)] d\tau, \\
 & \int_0^t (x_2^s(t) - x_2^s(\tau)) [((a_+)_\tau (b_+)_l - (b_+)_\tau (a_+)_l) - ((a_-)_\tau (b_-)_l - (b_-)_\tau (a_-)_l)] d\tau \\
 &= \int_0^t (t - \tau) [u_{2,+} ((a_+)_\tau (b_+)_l - (b_+)_\tau (a_+)_l) - u_{2,-} ((a_-)_\tau (b_-)_l - (b_-)_\tau (a_-)_l)] d\tau.
 \end{aligned}$$

Далее, используя формулы (14), приходим к утверждению теоремы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Заметим, что выражения (18) подобны формулам, выражающим динамику прилипания в [4], [5]. То есть “частицы”, соответствующие характеристическим прямым, выпущенным из точек $(a_j(\tau, l), b_j(\tau, l))$, $j = +, -$, $\tau < t$, l фиксировано, “сконцентрируются” в одной точке к моменту времени t .

3. Сравнение с вариационным представлением. Теперь сравним формулы (16) для ударных волн с формулами для поверхности особенностей, которые могут быть получены из вариационного представления (10) в случае потенциальных начальных данных. Пусть $\mathcal{F} = (x_1^v(t, l), x_2^v(t, l))$ представляет собой поверхность особенностей, полученную из (10). Тогда $\mathcal{F}$ может быть найдена как решение уравнения

$$F(a_+, b_+; t, x_1, x_2) - F(a_-, b_-; t, x_1, x_2) = 0, \quad (19)$$

где

$$F \equiv S_0(a, b) + \frac{(x_1 - a)^2}{2t} + \frac{(x_2 - b)^2}{2t},$$

и $a_j(t, x_1, x_2), b_j(t, x_1, x_2)$ ($j = +, -$) определяются из системы уравнений

$$F_a(a, b; t, x_1, x_2) = 0; \quad F_b(a, b; t, x_1, x_2) = 0.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть вектор начальной скорости в (11) является потенциальным и потенциал $S_0(a, b)$ имеет вид

$$\begin{cases} S_0(a, b) = 0 & \text{при } b > -\varepsilon f(a, b), \\ S_0(a, b) = b + \varepsilon f(a, b) & \text{при } b < -\varepsilon f(a, b), \end{cases} \quad (20)$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно мало, а функция $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $f(0, 0) = 0$, удовлетворяет условиям: существует такая окрестность точки $(a = 0, b = 0)$, что $f_{aa}(a, 0) \neq 0$ и кривая, определяемая из уравнения $b + \varepsilon f(a, b) = 0$, монотонна для всякого достаточно малого $\varepsilon > 0$.

Тогда формулы (15) и (19) задают различные поверхности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (19) легко вывести, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ в окрестности точки $(t = 0, x_1 = 0, x_2 = 0)$ уравнение поверхности особенностей имеет вид

$$x_2 = \frac{t}{2} - \varepsilon f\left(x_1, -\frac{t}{2}\right) + o(\varepsilon). \quad (21)$$

Теперь попытаемся найти поверхность особенностей, исходя из формул (15). При $\varepsilon = 0$ решение системы (15) выглядит следующим образом

$$x_1(t, l) = a_-(t, l) = a_+(t, l) = l, \quad x_2(t, l) = b_-(t, l) = -b_+(t, l) = \frac{t}{2}.$$

При $\varepsilon > 0$ будем искать решение (15) в форме

$$x_1(t, l) = l + \varepsilon \tilde{x}_1(t, l) + o(\varepsilon), \quad x_2(t, l) = \frac{t}{2} + \varepsilon \tilde{x}_2(t, l) + o(\varepsilon). \quad (22)$$

Тогда, учитывая соотношения

$$\begin{aligned} x_1(t, l) &= a_-(t, l) = a_+(t, l) + t\varepsilon f_a(a_+, b_+), \\ x_2(t, l) &= b_-(t, l) = b_+(t, l) + t(1 + \varepsilon f_b(a_+, b_+)), \end{aligned}$$

определим $\tilde{P}_t$, $(\tilde{I}_1)_t$, $(\tilde{I}_2)_t$ и найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{x}_1(t, l)}{\partial t} &= \frac{1}{2t} \int_0^t f_a d\tau, \\ \tilde{x}_2(t, l) &= -f(l, 0) - \frac{1}{4} \int_0^t \tau f_{aa} d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t f_b d\tau + \frac{1}{4t} \int_0^t \tau^2 f_{aa} d\tau, \end{aligned} \quad (23)$$

где значения производных функции $f(a, b)$ взяты в точке $(l, -\tau/2)$. Но функции (22) должны удовлетворять уравнению (21), что, учитывая (22), эквивалентно выполнению следующего тождества

$$f\left(l, -\frac{t}{2}\right) - f(l, 0) - \frac{1}{4} \int_0^t \left(\tau - \frac{\tau^2}{t}\right) f_{aa} d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t f_b d\tau \equiv 0,$$

где значения производных функции $f(a, b)$ взяты в точке $(l, -\tau/2)$. Отсюда, умножая на t , затем трижды дифференцируя по t и подставляя $t = 0$, получим $f_{aa}(l, 0) \equiv 0$, что противоречит условиям на функцию $f(a, b)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Единственным нетривиальным примером, известным автору, где вариационное представление обобщенного решения имеет место, является классическая двумерная задача Римана для (1) с постоянной в каждом квадранте $\mathbb{R}^2$ начальной скоростью (однако скорость должна иметь сжимающий характер, чтобы не возникало волн разрежения). Но тогда возникает другой тип сингулярности: δ -функция в точке для плотности.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Постоянная начальная плотность выбрана для простоты. После соответствующей модификации формул (16) все рассмотрения остаются справедливыми для непостоянной, достаточно гладкой функции начальной плотности $\rho(0, x_1, x_2)$.

Благодарности. Автор выражает благодарность Я. Г. Синаю и В. И. Оселедцу за стимулирующие дискуссии, Институту Миттаг-Леффлера, г. Стокгольм и Мюнхенскому университету, факультету теоретической физики, г. Мюнхен, где была написана эта работа.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Zeldovich Ya. B. Gravitational instability: an approximate theory for large density perturbations // *Astron. Astrophys.* 1970. V. 5. P. 84–89.
- [2] Shandarin S. F., Zeldovich Ya. B. The large-scale structure of the Universe: turbulence, intermittency, structures in a self-gravitating medium // *Rev. Modern Phys.* 1989. V. 61. № 2. P. 185–220.
- [3] Bouchut F. On zero-pressure gas dynamics // *Advances in Kinetic Theory and Computing. Series on Advances in Mathematics and Applied Sciences.* World Scientific. 1994. V. 22. P. 171–190.
- [4] Вейнан И., Рыков Ю. Г., Синай Я. Г. Вариационный принцип Лакса–Олейник для некоторых одномерных систем квазилинейных уравнений // *УМН.* 1995. Т. 50. № 1. С. 193–194.
- [5] Weinan E., Rykov Yu. G., Sinai Ya. G. Generalized variational principles, global weak solutions and behavior with random initial data for systems of conservation laws arising in adhesion particle dynamics // *Comm. Math. Phys.* 1996. V. 177. P. 349–380.
- [6] Grenier E. Existence globale pour le système des gas sans pression // *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. 1.* 1995. V. 321. P. 171–174.
- [7] Hopf E. The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ // *Comm. Pure Appl. Math.* 1950. V. 3. № 3. P. 201–230.
- [8] Lax P. D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation // *Comm. Pure Appl. Math.* 1954. V. 7. № 1. P. 159–193.
- [9] Lax P. D. Hyperbolic systems of conservation laws // *Comm. Pure Appl. Math.* V. 10. № 4. P. 537–566.
- [10] Олейник О. А. Задача Коши для нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка с разрывными начальными условиями // *Тр. ММО.* 1956. Т. 5. С. 433–454.
- [11] Majda A. Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables // *Appl. Math. Sci.* 1984. V. 53. P. 1–159.
- [12] DiPerna R. J. Compensated compactness and general systems of conservation laws // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1985. V. 292. № 2. P. 383–420.
- [13] Zhang T., Zheng Y. X. Conjecture on structure of solutions of Riemann problem for 2-D gas dynamic systems // *SIAM J. Math. Anal.* 1990. V. 21. № 3. P. 593–630.

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН
E-mail: rykov@spp.keldysh.ru

Поступило
 22.04.1998