Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Асташкин, Ф. А. Сукочев, Сравнение сумм независимых и дизъюнктивных функций в симметричных пространствах, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 4, 483–489

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm122>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 04:22:27

СРАВНЕНИЕ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ И ДИЗЬЮНКТНЫХ ФУНКЦИЙ В СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

С. В. Асташкин, Ф. А. Сукочев

В работе изучаются суммы независимых функций (случайных величин) в симметричном пространстве X на $[0, 1]$. Наш подход является операторным и близко связан с методами, развитыми, прежде всего, М. Ш. Браверманом. Главные результаты относятся к экспоненциальным пространствам Орлича $\exp(L_p)$, $1 \leq p \leq \infty$, и пространствам Лоренца Λ_ψ . В качестве следствий мы получаем результаты, дополняющие хорошо известную теорему Джонсона и Шехтмана о том, что из условия $L_p \subset X$, $p < \infty$, следует эквивалентность норм сумм независимых функций и их дизъюнктных “копий”. Кроме того, доказано утверждение, в определенном смысле обратное к этой теореме.

Библиография: 10 названий.

1. Введение. Работа посвящена изучению сумм независимых функций в симметричных пространствах. Хорошо известно, что такие суммы ведут себя зачастую подобно суммам имеющих то же распределение дизъюнктных функций. Так, в 1970 году Розенталь [1] доказал замечательное неравенство, из которого следует, что для произвольной последовательности $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ независимых функций из $L_p[0, 1]$, $p \geq 2$, таких, что $\int_0^1 f_k(t) dt = 0$, отображение $f_k \rightarrow \bar{f}_k$, где

$$\bar{f}_k(t) := f_k(t - k + 1)\chi_{[k-1, k)}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

продолжается до изоморфизма между замкнутой линейной оболочкой $[f_k]_{k=1}^\infty$ (взятой в $L_p[0, 1]$) и замкнутой линейной оболочкой $[\bar{f}_k]_{k=1}^\infty$ (взятой в $L_p[0, \infty) \cap L_2[0, \infty)$). В [2] неравенство Розенталя было обобщено на случай пространств Лоренца $L_{p,q}$, $2 < p < \infty$, $0 < q < \infty$. Значительное продвижение в этом направлении было затем сделано Джонсоном и Шехтманом [3, теорема 1], которые ввели пространства Y_X и Z_X на $[0, \infty)$, построенные по данному симметричному пространству X на $[0, 1]$, и показали, что любая конечная последовательность $\{f_k\}_{k=1}^n$ независимых, в среднем равных нулю (соответственно положительных) функций в X эквивалентна (равномерно по n) последовательности их дизъюнктных сдвигов в Y_X (соответственно Z_X) при условии, что X содержит $L_p[0, 1]$ при некотором $p < \infty$. В частности, из их результата непосредственно следует, что если $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность независимых функций в симметричном пространстве X такая, что для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^n \lambda(\{f_k \neq 0\}) \leq 1 \tag{1}$$

(λ – мера Лебега), то отображение $f_k \rightarrow \bar{f}_k, k \geq 1$, между $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ и последовательностью их дизъюнктивных “копий” $\{\bar{f}_k\}_{k=1}^\infty$ продолжается до изоморфизма между замкнутыми линейными оболочками $[f_k]_{k=1}^\infty$ и $[\bar{f}_k]_{k=1}^\infty$ в X при условии, что X содержит $L_p[0, 1]$ для некоторого $p < \infty$.

В этой работе изучается более общий вопрос: для каких симметричных пространств X и Y на $[0, 1]$ существует константа $C = C(X, Y) > 0$ такая, что для каждой последовательности $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X$ независимых функций, удовлетворяющих условию (1), выполнено

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_Y \leq C \left\| \sum_{k=1}^n \bar{f}_k \right\|_X. \quad (2)$$

Наш подход основывается на изучении некоторого линейного оператора и близок подходу, развитому Браверманом [4] при изучении неравенства Розенталя и его модификаций в симметричных пространствах и, в свою очередь, использующему еще более ранние идеи и вероятностные конструкции Круглова [5]. Подробнее речь об этом пойдет в п. 3 – после того, как в п. 2 будут приведены все необходимые определения. В пп. 4 и 5 будут сформулированы основные результаты работы, относящиеся к экспоненциальным пространствам Орлича $\exp(L_p)$ и пространствам Лоренца Λ_ψ . Одно из полученных при этом следствий в случае $X = Y$ представляет из себя утверждение, в определенном смысле обратное к теореме Джонсона и Шехтмана [3, теорема 1].

В п. 6, являющемся последней частью работы, мы распространим результаты на произвольные последовательности независимых функций (вообще говоря, не удовлетворяющие условию (1)), дополнив тем самым результаты работы [3].

2. Определения и обозначения. Через $S(\Omega)$ ($= S(\Omega, \mathcal{P})$) будет обозначаться линейное пространство всех измеримых конечных п.в. функций на пространстве с мерой $(\Omega, \mathcal{P})$, рассматриваемое с топологией сходимости по мере на множествах конечной меры.

Банахово пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ вещественнозначных функций, измеримых по Лебегу на интервале $[0, \alpha)$, $0 < \alpha \leq \infty$, называется *симметричным* (или *перестановочно-инвариантным*), если

- (i) из того, что $y \in E$ и $|x| \leq |y|$, следует $x \in E$ и $\|x\|_E \leq \|y\|_E$;
- (ii) из того, что $y \in E$ и $x^* = y^*$, следует $x \in E$ и $\|x\|_E = \|y\|_E$.

Здесь и далее λ – мера Лебега, а x^* – невозрастающая непрерывная справа *перестановка* $|x|$, т.е.

$$x^*(t) = \inf \{s \geq 0: \lambda(\{|x| > s\}) \leq t\}, \quad t > 0.$$

Если E – симметричное пространство на интервале $[0, \alpha)$, то *двойственное* (или *ассоциированное*) пространство $E^\times$ состоит из всех измеримых функций y , для которых

$$\|y\|_{E^\times} := \sup \left\{ \int_0^\alpha |x(t)y(t)| dt : x \in E, \|x\|_E \leq 1 \right\} < \infty.$$

Если E^* – пространство, сопряженное к E , то $E^\times \subset E^*$ и $E^\times = E^*$, если и только если E сепарабельно. Естественное вложение E в его второе двойственное $E^{\times \times}$ является

изометрической сюръекцией, если и только если E *максимально* (или имеет свойство *Fatou*), т.е. из того, что

$$\{f_n\}_{n \geq 1} \subseteq E, \quad f \in S[0, \alpha), \quad f_n \rightarrow f \text{ п.в. на } [0, \alpha), \quad \sup_n \|f_n\|_E < \infty,$$

следует

$$f \in E \quad \text{и} \quad \|f\|_E \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_E.$$

Норма $\|\cdot\|_E$ симметричного пространства E называется *порядково полунепрерывной*, если единичный шар E замкнут в E относительно сходимости почти всюду. Последнее эквивалентно тому, что естественное вложение E в его второе двойственное – изометрия.

Для любого симметричного пространства E на $[0, \alpha)$ справедливы непрерывные вложения

$$L_1[0, \alpha) \cap L_\infty[0, \alpha) \subseteq E \subseteq L_1[0, \alpha) + L_\infty[0, \alpha).$$

Через E^0 далее будем обозначать замыкание $L_1[0, \alpha) \cap L_\infty[0, \alpha)$ в E . Если $E \neq L_\infty$, то E^0 сепарабельно. И наконец, если E – симметричное пространство, то функция $\phi_E(t) := \|\chi_A(\cdot)\|_E$, где измеримое множество A удовлетворяет условию $\lambda(A) = t$, а χ_A – характеристическая функция этого множества, называется *фундаментальной функцией* E . Подробнее о симметричных пространствах см. монографии [6]–[8].

3. Свойство Круглова и оператор $\mathcal{K}$. Пусть f – измеримая функция (случайная величина) на $[0, 1]$ и $\mathcal{F}_f$ – ее функция распределения. Через $\pi(f)$ мы обозначим любую случайную величину на $[0, 1]$, характеристическая функция которой задается соотношением

$$\theta_{\pi(f)}(t) = \exp\left(\int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1) d\mathcal{F}_f(x)\right).$$

Следующее свойство интенсивно изучалось и использовалось Браверманом [4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Говорят, что симметричное пространство X имеет *свойство Круглова* ($X \in \mathbb{K}$), если из того, что $f \in X$, следует $\pi(f) \in X$.

Определим положительный линейный оператор, который тесно связан со свойством Круглова. Пусть $\{E_n\}$ – последовательность попарно дизъюнктивных подмножеств $[0, 1]$,

$$m(E_n) = \frac{1}{e \cdot n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для $f \in S([0, 1], \lambda)$ положим

$$\mathcal{K}f(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots) := \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n f(\omega_k) \chi_{E_n}(\omega_0). \quad (3)$$

Тогда

$$\mathcal{K}: S([0, 1], \lambda) \rightarrow S(\Omega, \mathcal{P}), \quad \text{где } (\Omega, \mathcal{P}) := \prod_{k=0}^{\infty} ([0, 1], \lambda_k)$$

(λ_k – мера Лебега на $[0, 1]$ для каждого $k \geq 0$).

Оператор $\mathcal{K}$ (точнее, близкий к нему) можно определить и несколько иначе. Пусть $f \in S([0, 1], \lambda)$ и $\{f_{n,k}\}_{k=1}^n$ – последовательность измеримых функций на $[0, 1]$ такая, что

- (i) функции $f_{n,1}, f_{n,2}, \dots, f_{n,n}, \chi_{E_n}$ независимы для каждого $n \in \mathbb{N}$,
- (ii) $\mathcal{F}_{f_{n,k}} = \mathcal{F}_f$ для всех $n \in \mathbb{N}, k = 1, 2, \dots, n$.

Определим

$$\mathcal{K}'f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n f_{n,k}(x) \chi_{E_n}(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (3')$$

Ясно, что функции распределения $\mathcal{K}f$ и $\mathcal{K}'f$ одинаковы для любой $f \in S([0, 1], \lambda)$. Так как в дальнейшем речь идет о симметричных пространствах, то мы можем $\mathcal{K}'f$ отождествлять с $\mathcal{K}f$.

Непосредственное вычисление, использующее (3) (или (3')), показывает, что $\theta_{\mathcal{K}f}(t) = \theta_{\pi(f)}(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Тем самым получаем простое, но важное утверждение, благодаря которому появляется возможность применять к изучению рассматриваемых вопросов интерполяционную технику.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если X – симметричное пространство на $[0, 1]$, то оператор $\mathcal{K}$ ограниченно действует в X тогда и только тогда, когда $X \in \mathbb{K}$.

Следующее утверждение имеет очень важное значение для всей работы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $X \subseteq Y$, где X и Y – симметричные пространства на $[0, 1]$. Рассмотрим следующие условия:

- (i) существует $C > 0$ такое, что (2) верно для произвольной последовательности $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X$ независимых функций, удовлетворяющих (1);
- (ii) существует $C > 0$ такое, что (2) верно для произвольной последовательности $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X$ независимых одинаково распределенных функций, удовлетворяющих (1);
- (iii) оператор $\mathcal{K}$ ограниченно действует из X в $Y^{\times \times}$;
- (iii') оператор $\mathcal{K}$ ограниченно действует из X в Y .

Справедливы импликации

$$(iii') \implies (i) \iff (ii).$$

Если же норма пространства Y порядково полунепрерывна, то

$$(i) \iff (ii) \iff (iii).$$

4. Оператор $\mathcal{K}$ в экспоненциальных пространствах Орлича. Пусть Φ – функция Орлича на $[0, \infty)$, т.е. Φ – непрерывная выпуклая возрастающая функция на $[0, \infty)$, $\Phi(0) = 0$ и $\Phi(\infty) = \infty$. Пространство Орлича $L_\Phi = L_\Phi[0, 1]$ состоит из всех функций f , измеримых на $[0, 1]$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{L_\Phi} = \inf \left\{ \rho > 0: \int_0^1 \Phi \left(\frac{|f(t)|}{\rho} \right) dt \leq 1 \right\}.$$

Пространство L_Φ всегда максимально, а сепарабельно тогда и только тогда, когда функция Φ удовлетворяет Δ_2 -условию в ∞ (см. [7] или [8]).

Экспоненциальное пространство Орлича $\exp(L_p)$ порождается функцией $N_p(t) := e^{t^p} - 1$, которая при $p \geq 1$ выпукла для всех $t \geq 0$, а при $p \in (0, 1)$ выпукла для достаточно больших t . Кроме того, положим $\exp(L_\infty) := L_\infty$.

Из результатов [5] и [4] следует, что оператор $\mathcal{K}$ ограниченно действует в $\exp(L_p)$, если и только если $p \in (0, 1]$. Для того чтобы охарактеризовать поведение этого оператора в пространствах $\exp(L_p)$, $p \in (1, \infty]$, введем множество $\mathcal{Y}_p$, состоящее из всех симметричных пространств Y таких, что оператор $\mathcal{K}$ ограниченно действует из $\exp(L_p)$ в Y . Определим также функции Орлича

$$M_p(t) := \exp\{|t| \ln^{1/p}(e + |t|)\} - 1, \quad t \in \mathbb{R}, \quad p > 0.$$

Следующее утверждение (в случае $p = \infty$) показывает ту важную роль, которую играет пространство L_{M_1} в изучении систем равномерно ограниченных независимых функций (ср. [9, следствие 3.5.2]).

ТЕОРЕМА 3. *Единственным минимальным элементом множества $\mathcal{Y}_p$, $1 < p \leq \infty$, упорядоченного по вложению, является пространство Орлича L_{M_q} , где $1/p + 1/q = 1$.*

СЛЕДСТВИЕ 4. *Пусть $p \in (1, \infty]$ и $q = p/(p-1)$. Существует $C_p > 0$ такое, что для любой конечной последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^n \subset \exp(L_p)$, удовлетворяющей (1), выполнено*

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_{L_{M_q}^0} \leq C_p \left\| \sum_{k=1}^n \bar{f}_k \right\|_{\exp(L_p)}.$$

Более того, если некоторое симметричное пространство Y с порядково полунепрерывной нормой обладает тем свойством, что для всех последовательностей $\{f_k\}_{k=1}^n \subset \exp(L_p)$ таких, как выше, мы имеем $\|\sum_{k=1}^n f_k\|_Y \leq C \|\sum_{k=1}^n \bar{f}_k\|_{\exp(L_p)}$, то $L_{M_q}^0 \subseteq Y$.

5. Оператор $\mathcal{K}$ в пространствах Лоренца. Обозначим через Ψ множество всех возрастающих вогнутых функций на $[0, 1]$, $\psi(0) = \psi(+0) = 0$. Если $\psi \in \Psi$, то пространство Лоренца $\Lambda_\psi = \Lambda_\psi[0, 1]$ состоит из всех функций $x(t)$, измеримых на $[0, 1]$, для которых

$$\|x\|_{\Lambda_\psi} := \int_0^1 x^*(t) d\psi(t) < \infty.$$

ТЕОРЕМА 5. *Если $\psi \in \Psi$, то оператор $\mathcal{K}$ ограничен в пространстве Лоренца Λ_ψ (т.е. $\Lambda_\psi \in \mathbb{K}$) тогда и только тогда, когда существует $C > 0$ такое, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi\left(\frac{u^k}{k!}\right) \leq C\psi(u), \quad u \in (0, 1]. \quad (4)$$

Заметим, что условие (4) для функций $\psi \in \Psi$ возникло также в работе [10] при изучении случайных перестановок в симметричных пространствах.

Следующее утверждение в некотором смысле обратное к утверждению теоремы Джонсона и Шехтмана [3] (см. введение).

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть симметричное пространство E обладает таким свойством: для каждого максимального симметричного пространства $X \supset E$ существует $C > 0$ такое, что неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_X \leq C \left\| \sum_{k=1}^n \bar{f}_k \right\|_X$$

выполнено для любой последовательности $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X$ независимых функций, удовлетворяющей (1). Тогда E содержит $L_p[0, 1]$ для некоторого $p \in [1, \infty)$.

Последнее утверждение этого пункта показывает, что критерий ограниченности оператора $\mathcal{H}$ не может быть дан в терминах вложений.

СЛЕДСТВИЕ 7. Если $\psi \in \Psi$ такова, что для каждого $\alpha \in (0, 1]$ выполнено $\sup_{t \in (0, 1]} t^{-\alpha} \psi(t) = \infty$, то существует $\phi \in \Psi$ такая, что $\phi \leq C\psi$ при некотором $C > 0$ и оператор $\mathcal{H}$ не ограничен в любом симметричном пространстве X с фундаментальной функцией $\phi_X = \phi$.

6. Общий случай. Здесь мы рассмотрим главный вопрос (см. введение) в том случае, когда неравенство (1), вообще говоря, не выполнено. Следуя [3], для произвольного симметричного пространства X на $[0, 1]$ определим функциональное пространство Z_X на $[0, \infty)$:

$$Z_X := \{f \in L_1[0, \infty) + L_\infty[0, \infty) : \|f\|'_{Z_X} := \|f^* \chi_{[0, 1]}\|_X + \|f^* \chi_{[1, \infty)}\|_1 < \infty\}.$$

Так как квазинорма $\|\cdot\|'_{Z_X}$ эквивалентна норме $\|f\|_{Z_X} := \|f^* \chi_{[0, 1]}\|_X + \|f\|_{L_1(0, \infty)}$, $f \in Z_X$, то Z_X является симметричным пространством на $[0, \infty)$.

Главный результат здесь дополняет теорему Джонсона и Шехтмана [3, неравенство (4)], показывая, что и в общей ситуации (модифицированное) неравенство (2) при условии ограниченности оператора $\mathcal{H}$ остается верным.

ТЕОРЕМА 8. Пусть X и Y – симметричные пространства на $[0, 1]$, $X \subseteq Y$. Если

- (i) оператор $\mathcal{H}$ ограниченно действует из X в $Y^{\times \times}$ и норма Y порядково полунепрерывна, или
- (ii) оператор $\mathcal{H}$ ограниченно действует из X в Y ,

то существует $C > 0$ такое, что для каждой последовательности $\{g_i\}_{i=1}^n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, независимых функций выполнено неравенство

$$\left\| \sum_{i=1}^n g_i \right\|_Y \leq C \left\| \sum_{i=1}^n \bar{g}_i \right\|_{Z_X}.$$

СЛЕДСТВИЕ 9. Пусть X – интерполяционное пространство относительно банаховой пары $(L_1(0, 1), L_\infty(0, 1))$. Если оператор $\mathcal{H}$ ограничен в X , то существует константа $C > 0$ такая, что для произвольной последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, и каждой последовательности

$$\{g_k\}_{k=1}^n, \quad g_k \geq 0, \quad g_k^* = f_k^*, \quad 1 \leq k \leq n,$$

выполнено

$$\left\| \sum_{i=1}^n f_i \right\|_X \leq C \left\| \sum_{i=1}^n g_i \right\|_X.$$

В случае, когда симметричное пространство $X \supseteq L_p[0, 1]$, $p < \infty$, последнее утверждение было доказано в [3] (см. неравенство (10)).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Rosenthal H. P. On the subspaces of L_p ($p > 2$) spanned by sequences of independent random variables // Israel J. Math. 1970. V. 8. P. 273–303.
- [2] Carothers N. L., Dilworth S. J. Inequalities for sums of independent random variables // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. V. 194. P. 221–226.
- [3] Johnson W. B., Schechtman G. Sums of independent random variables in rearrangement invariant function spaces // Ann. Probab. 1989. V. 17. P. 789–808.
- [4] Braverman M. Sh. Independent Random Variables and Rearrangement Invariant Spaces. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
- [5] Круглов В. М. Замечание о бесконечно делимых распределениях // Теория вероятности и ее примен. 1970. Т. 15. № 2. С. 331–336.
- [6] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
- [7] Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces II. Function spaces. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1979.
- [8] Bennett C., Sharpley R. Interpolation of Operators. New York: Academic Press, 1988.
- [9] Kwapien S., Woyczyński W. A. Random Series and Stochastic Integrals: Single and Multiple: Birkhäuser, 1992.
- [10] Montgomery-Smith S., Semenov E. M. Random rearrangements and operators // Amer. Math. Soc. Trans. (2). 1998. V. 184. P. 157–183.

(С. В. Асташкин) Самарский государственный университет

(Ф. А. Сукочев) Flinders University, Australia

E-mail: astashkn@ssu.samara.ru, sukochev@infoeng.flinders.edu.au

Поступило

12.03.2004