Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ф. Сухинин, К вопросу о беллмановском подходе в теории оптимального управления, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 5, 770–776

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1220>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 13:23:04

УДК 519

К ВОПРОСУ О БЕЛЛМАНОВСКОМ ПОДХОДЕ В ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

М. Ф. Сухинин

Усилена ранее опубликованная теорема автора, что позволило получить более информативное необходимое условие экстремума в задачах оптимального управления. Результат проиллюстрирован на простейшей задаче оптимального управления.

Библиография: 8 названий.

1. Известно, что уравнение Беллмана в теории оптимальных процессов требует для своего вывода наличия весьма ограничительных предположений, не выполняющихся во многих простых задачах (см., например, [1, с. 85]), хотя основная идея Беллмана не связана с этими предположениями. Здесь излагается другая форма реализации этой идеи, свободная от этого недостатка. Дело в том, что для реализации идеи Беллмана достаточно наличия свойства, близкого к существованию производной по определенному направлению у соответствующей функции векторного аргумента (именно эта идея здесь и развивается), тогда как для записи уравнения Беллмана требуется существование градиента этой функции, что является более ограничительным требованием и тем самым сужает класс задач, в действительности охватываемых беллмановским подходом. Приведенный здесь результат усиливает ранее опубликованный результат автора в этом направлении ([2], [3, с. 270]). Иной взгляд на уравнение Беллмана изложен в [4]–[6].

2. Пусть X – банахово пространство, $B = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$, W – непустое множество в X . Для $l \in X$, $x \in W$ и $\varphi: W \rightarrow \mathbb{R}$ положим

$$DS_l \varphi(x) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{0 < \delta < \varepsilon} \overline{\delta^{-1}(\varphi\{[x + \delta(l + \varepsilon B)] \cap W\} - \varphi(x))},$$

где черта означает замыкание в X , и назовем $DS_l \varphi(x)$ *дифференциальным множеством* функции φ в точке x по элементу l . Если $DS_l \varphi(x)$ состоит из одного элемента, то φ называется *равномерно дифференцируемым в точке x по направлению l* (при $l \neq 0$) (определение равномерной дифференцируемости по направлению для отображений топологических векторных пространств дано в [7, с. 220] для того случая, когда $x \in \text{int } W$). При этом единственный элемент множества $DS_l \varphi(x)$ обозначается через $\varphi'(x, l)$.

3. Пусть теперь задано отображение $P: W \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$, т.е. многозначное отображение W в X с непустым образом $P(x)$ ($\forall x \in W$), а поведение некоторой системы описывается функцией $x: [0, T[\rightarrow X$ ($0 < T \leq \infty$), удовлетворяющей дифференциальному включению

$$\dot{x}(t) \in P(x(t)) \quad (3.1)$$

и начальному условию

$$x(0) = x_0 \in W \quad (3.2)$$

(как обычно, считается, что функция $x(\cdot)$ локально абсолютно непрерывна и существует $\dot{x}(t)$ почти для каждого t , причем $x(t) = x_0 + \int_0^t \dot{x}(s) ds \in W$, где интеграл понимается в смысле Бохнера). Далее, пусть x_1 – фиксированный элемент из W . Обозначим через $D(\omega)$ множество тех $x_0 \in W$, для которых существует траектория, удовлетворяющая (3.1) и (3.2), двигаясь вдоль которой, наша система перейдет из точки x_0 в точку x_1 за время $t(x_0, x(\cdot)) < T$, и положим $\omega(x_0) = \sup(-t(x_0, x(\cdot)))$ по всем таким траекториям. При этом $D(\omega)$ – область определения функции ω .

4. Пусть $x \in D(\omega)$. Элемент $l \in P(x)$ назовем *допустимым* для x , если

- 1) $l \neq 0$;
- 2) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in]0, \varepsilon[\forall x' \in (x +]0, \delta[\cdot (l + \delta B)) \cap D(\omega) \exists t' \in]0, \varepsilon[\exists x(\cdot) \in W_1^1([0, t'], X)$:
 - а) $\dot{x}(t) \in P(x(t))$ почти для каждого $t \in [0, t']$;
 - б) $x(0) = x$;
 - в) $x(t') \in D(\omega)$;
 - г) $\omega(x') - \omega(x(t')) \leq t' \varepsilon$;
 - д) $\|x' - x - lt'\| \leq t' \varepsilon$.

Здесь $W_1^1([0, t'], X)$ – множество функций, представимых в виде $\Phi(t) = a + \int_0^t \varphi(s) ds$, где $a \in X$, а $\varphi: [0, t'] \rightarrow X$ – интегрируемая по Бохнеру функция. Множество допустимых для $x \in D(\omega)$ элементов обозначим через $U(x)$.

5. ЗАМЕЧАНИЕ. В [2], [3, с. 270] вместо условий в) и г) стоит условие $x(t') = x'$. Замена этого условия на условия в) и г) расширяет множество $U(x)$ и позволяет усилить упомянутые результаты.

6. ТЕОРЕМА. Для каждого $x \in D(\omega)$ такого, что $U(x) \neq \emptyset$, имеет место неравенство

$$\sup_{l \in U(x)} \sup DS_l \omega(x) \leq 1$$

(при условии, что $\sup \emptyset = -\infty$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что

$$\sup_{l \in U(x)} \sup DS_l \omega(x) > 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \exists \sigma > 0 \exists l \in U(x) \forall \xi > 0 \exists \eta \in]0, \xi[\exists h \in B : \\ & [x + \eta(l + \xi h) \in D(\omega)] \wedge [\omega(x + \eta(l + \xi h)) - \omega(x) \geq (1 + 2\sigma)\eta]. \end{aligned}$$

Придадим ξ последовательность значений $\xi_n = n^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Для каждого n найдем $\eta_n \in]0, \xi_n[$ и $h_n \in B$ так, чтобы $x + \eta_n(l + \xi_n h_n) \in D(\omega)$ и

$$\omega(x + \eta_n(l + \xi_n h_n)) - \omega(x) \geq (1 + 2\sigma)\eta_n. \quad (6.1)$$

Положим $\varepsilon_k = k^{-1}$, $k \in \mathbb{N}$. Для $\varepsilon = \varepsilon_k$ найдем $\delta = \delta_k \in]0, \varepsilon_k[$ так, чтобы выполнялось 2) в п. 4, начиная с $\forall x'$. По каждому k найдем $n_k \geq k$ так, чтобы $\xi_{n_k} < \delta_k$ и $\eta_{n_k} < \delta_k$. Для $x'_k = x + \eta_{n_k}(l + \xi_{n_k} h_{n_k})$ найдем $t_k \in]0, \varepsilon_k[$ и $x_k(\cdot) \in W_1^1([0, t_k], X)$ так, чтобы $\dot{x}_k(t) \in P(x_k(t))$ почти для каждого $t \in [0, t_k]$, $x_k(0) = x$, $\omega(x'_k) - \omega(x_k(t_k)) \leq t_k \varepsilon_k$ и $\|x'_k - x - lt_k\| \leq t_k \varepsilon_k$ (это можно сделать согласно 2)). Заметим, что $x'_k - x - lt_k = t_k \varepsilon_k h'_k$ для некоторого $h'_k \in B$. Докажем, что $\eta_{n_k}^{-1} t_k \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$. Сначала установим ограниченность последовательности $\eta_{n_k}^{-1} t_k$. Допустим, что она неограничена. Тогда, переходя, если нужно, к подпоследовательности и переобозначив ее, можно считать, что $\eta_{n_k}^{-1} t_k \rightarrow \infty$. В этом случае

$$\begin{aligned} t_k^{-1} l(\eta_{n_k} - t_k) &= t_k^{-1} [(x'_k - x - \eta_{n_k} \xi_{n_k} h_{n_k}) - (x'_k - x - t_k \varepsilon_k h'_k)] \\ &= t_k^{-1} (t_k \varepsilon_k h'_k - \eta_{n_k} \xi_{n_k} h_{n_k}) = \varepsilon_k h'_k - (t_k^{-1} \eta_{n_k}) \xi_{n_k} h_{n_k} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $k \rightarrow \infty$. С другой стороны, $t_k^{-1} l(\eta_{n_k} - t_k) = l(\eta_{n_k} t_k^{-1} - 1) \rightarrow -l \neq 0$. Полученное противоречие показывает, что последовательность $\eta_{n_k}^{-1} t_k$ ограничена. Аналогично, предположив, что $t_k^{-1} \eta_{n_k} \rightarrow \infty$, получим, что

$$\eta_{n_k}^{-1} l(\eta_{n_k} - t_k) = \eta_{n_k}^{-1} (t_k \varepsilon_k h'_k - \eta_{n_k} \xi_{n_k} h_{n_k}) = (\eta_{n_k}^{-1} t_k) \varepsilon_k h'_k - \xi_{n_k} h_{n_k} \rightarrow 0,$$

тогда как $\eta_{n_k}^{-1} l(\eta_{n_k} - t_k) = l(1 - \eta_{n_k}^{-1} t_k) \rightarrow l \neq 0$. Это означает, что последовательность $t_k^{-1} \eta_{n_k}$ также ограничена. Но тогда

$$l(\eta_{n_k} t_k^{-1} - 1) = t_k^{-1} l(\eta_{n_k} - t_k) = \varepsilon_k h'_k - (t_k^{-1} \eta_{n_k}) \xi_{n_k} h_{n_k} \rightarrow 0,$$

а отсюда следует, что $\eta_{n_k} t_k^{-1} \rightarrow 1$. Поэтому для достаточно больших k будет выполняться неравенство $(1 + 2\sigma)\eta_{n_k} > (1 + \sigma + \varepsilon_k)t_k$. Заметим, что t_k – время движения по траектории $x_k(\cdot)$ из точки x в точку $x_k(t_k)$. Поэтому если система будет двигаться из точки x в точку $x_k(t_k)$ вдоль траектории $x_k(\cdot)$, а из точки $x_k(t_k)$ в точку x_1 по траектории, время движения по которой $\tilde{t}_k$ меньше, чем $-\omega(x_k(t_k)) + \sigma t_k$ (такая траектория существует по определению функции ω), то общее время движения из точки x в точку x_1 по такой составной траектории будет равно

$$\begin{aligned} t_k + \tilde{t}_k &< t_k - \omega(x_k(t_k)) + \sigma t_k \leq -\omega(x'_k) + t_k \varepsilon_k + (1 + \sigma)t_k \\ &< -\omega(x'_k) + (1 + 2\sigma)\eta_{n_k} \leq -\omega(x) \end{aligned}$$

согласно (6.1), а это противоречит определению функции ω . Теорема доказана.

7. Пусть теперь $x_0 \in D(\omega)$, $x_0 \neq x_1$, $\bar{x}(\cdot)$ – оптимальная по быстродействию траектория, являющаяся решением задачи (3.1), (3.2) и соединяющая точку x_0 с точкой x_1 . В этом случае $-\omega(x_0)$ – время движения по траектории $\bar{x}(\cdot)$. Заметим, что при $t \neq t'$ (t и $t' \leq -\omega(x_0)$) будет $\bar{x}(t) \neq \bar{x}(t')$, т.е. время t (при $t \leq -\omega(x_0)$) движения системы из точки $x_0 = \bar{x}(0)$ в точку $\bar{x}(t)$ по траектории $\bar{x}(\cdot)$ является однозначной функцией $t(x)$ точки x на этой траектории (в силу оптимальности). Пусть

$$M(\bar{x}(\cdot)) = \left\{ x \in \bigcup_{0 \leq t < -\omega(x_0)} \{ \bar{x}(t) \} \mid \dot{\bar{x}}_r(t)|_{t=t(x)} \in P(x) \right\}$$

(здесь $\dot{\bar{x}}_r(t)$ – правая производная). Для $x \in M(\bar{x}(\cdot))$ положим $\bar{l}(x) = \dot{\bar{x}}_r(t)|_{t=t(x)}$.

8. ТЕОРЕМА. Пусть $x \in M(\bar{x}(\cdot))$. Тогда $1 \in DS_{\bar{l}(x)}\omega(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0 < t_n < -\omega(x)$ и $t_n \rightarrow 0$. Тогда $\bar{x}(t(x) + t_n) = x + \bar{l}(x)t_n + t_n\varepsilon_n h_n \in D(\omega)$, где $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ и $h_n \in B$, поскольку $\dot{\bar{x}}_r(t)|_{t=t(x)} = \bar{l}(x)$. Далее, $-\omega(\bar{x}(t(x) + t_n)) = -\omega(x) - t_n$, в силу того что кусок оптимальной траектории является оптимальной траекторией для концов этого куска. Поэтому

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N :$

$$\begin{aligned} & \bigcup_{0 < \delta < \varepsilon} \delta^{-1}[\omega(\{x + \delta[\bar{l}(x) + \varepsilon B]\} \cap D(\omega)) - \omega(x)] \\ & \ni t_n^{-1}(\omega\{x + t_n[\bar{l}(x) + \varepsilon_n h_n]\} - \omega(x)) = t_n^{-1}(\omega\{\bar{x}(t(x) + t_n)\} - \omega(x)) \\ & = t_n^{-1}(\omega(x) + t_n - \omega(x)) = 1, \end{aligned}$$

откуда следует, что $1 \in DS_{\bar{l}(x)}\omega(x)$. Теорема доказана.

9. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $x \in M(\bar{x}(\cdot))$ и $\bar{l}(x) \in U(x)$. Тогда

$$\sup_{l \in U(x)} \sup DS_l \omega(x) = \sup DS_{\bar{l}(x)} \omega(x) = 1.$$

Это вытекает из пп. 6 и 8, поскольку

$$1 \leq \sup DS_{\bar{l}(x)} \omega(x) \leq \sup_{l \in U(x)} \sup DS_l \omega(x) \leq 1.$$

10. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $x \in M(\bar{x}(\cdot))$, функция ω равномерно дифференцируема в точке x по каждому направлению из некоторого множества $\bar{U}(x) \subset U(x)$ (см. п. 2) и $\bar{l}(x) \in \bar{U}(x)$. Тогда

$$\sup_{l \in \bar{U}(x)} \omega'(x, l) = \omega'(x, \bar{l}(x)) = 1.$$

Это вытекает из п. 9 и определения равномерной дифференцируемости по направлению (см. п. 2).

11. Рассмотрим простейшую задачу оптимального управления, т.е. задачу приведения системы

$$\dot{x}^1 = x^2, \quad \dot{x}^2 = u(t) \tag{11.1}$$

из начального состояния (x_0^1, x_0^2) в начало координат за минимальное время за счет выбора измеримой функции $u(\cdot)$, удовлетворяющей условию

$$|u(t)| \leq 1. \tag{11.2}$$

Известно [1, с. 31], что оптимальными траекториями задачи (11.1), (11.2) являются куски парабол $\mathcal{L}_{\pm} : x^1 = \pm 2(x^2)^2 + C$, получаемых при интегрировании системы (11.1) при $u(t) = \pm 1$, а линией переключения является $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$, где

$$\begin{aligned} \Gamma_+ &= \{(x^1, x^2) | x^1 = 2^{-1}(x^2)^2, x^2 \leq 0\}, \\ \Gamma_- &= \{(x^1, x^2) | x^1 = -2^{-1}(x^2)^2, x^2 \geq 0\}. \end{aligned}$$

Рис. 1

Перепишем задачу (11.1), (11.2) в терминах пп. 3, 4. Здесь $X = W = \mathbb{R}^2$, $P(x) = (x^2, [-1, 1])$, $D(\omega) = \mathbb{R}^2$, $x_1 = 0$. Покажем, что $U(x) = (x^2, [-1, 1]) \setminus \{0\}$ при $x \in D(\omega) \setminus \{0\}$. Пусть сначала точка $\bar{x} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2) \neq 0$ лежит, например, на Γ_+ , $l = (\bar{x}^2, \alpha)$, где $\alpha \in [-1, 1]$, и $l \neq 0$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда задача

$$\dot{x}^1 = x^2, \quad \dot{x}^2 = \alpha, \quad x^1(0) = \bar{x}^1, \quad x^2(0) = \bar{x}^2$$

имеет единственное решение $(x^1(t), x^2(t))$ на $[0, +\infty[$, где $x^1(t) = \alpha t^2/2 + \bar{x}^2 t + \bar{x}^1$ и $x^2 = \alpha t + \bar{x}^2$. Обозначим ее траекторию через $\mathcal{L}_\alpha$. Возможны два случая: 1) $\alpha \in [-1, 1[$, 2) $\alpha = 1$. Рассмотрим каждый из них.

1) Пусть $\alpha \in [-1, 1[$. В этом случае если $x' \in \bar{x} +]0, \delta[\cdot (l + \delta B)$ при достаточно малом $\delta \in]0, \varepsilon[$, то в качестве $x(t')$ можно взять точку пересечения линии из $\mathcal{L}_+$, проходящей через точку x' , с линией $\mathcal{L}_\alpha$. Ввиду того что кусок линии из $\mathcal{L}_+$, соединяющей точки x' и $x(t')$, имеет длину порядка $O(\delta t')$ (в силу того что $\alpha < 1$ и, следовательно, линии из $\mathcal{L}_+$ пересекаются с $\mathcal{L}_\alpha$ вблизи точки $\bar{x}$ под отделенным от нуля углом), а модули скоростей движения по оптимальным траекториям вблизи точки $\bar{x}$ имеют порядок $v(\bar{x})(1 + O(\delta t'))$, где $v(\bar{x})$ – модуль скорости движения по Γ_+ в точке $\bar{x}$, время движения из точки $x(t')$ в точку x' , если x' лежит над $\mathcal{L}_\alpha$ (см. рис. 1), имеет порядок $O(\delta t')/(v(\bar{x})(1 + O(\delta t')))) = O(\delta t')$. Поэтому при достаточно малом $\delta \in]0, \varepsilon[$ выполняется условие г) из п. 4. Если же x' лежит под $\mathcal{L}_\alpha$ или на $\mathcal{L}_\alpha$, то $\omega(x') \leq \omega(x(t'))$ и г) тем более выполняется. Поэтому $l \in U(\bar{x})$. Далее, время движения по траекториям CD и $D0$ (см. рис. 1) равно

$$\frac{S_2}{v(0)(1 + O(\delta t'))} + \frac{S_3}{v(0)(1 + O(\delta t'))} \geq \frac{2\beta(t')^{1/2}}{1 + O(\delta t')} > \beta(t')^{1/2}$$

при некотором $\beta > 0$. Например, для Γ_- в окрестности нуля $x^2 = (-2x^1)^{1/2} \geq \eta(\delta t')^{1/2}$ при некотором $\eta > 0$, где $(x^1, x^2) = D$ – точка пересечения линии из $\mathcal{L}_+$, проходящей через $x(t')$, с Γ_- . Наконец, время движения по линии из $\mathcal{L}_+$ от $x(t')$ до C отличается от времени движения по Γ_+ от $\bar{x}$ до 0 на величину порядка $O(\delta t')$ по теореме о непрерывной дифференцируемости и, следовательно, липшицевости решения задачи Коши по начальным данным и параметру, поскольку

$$\frac{S}{\bar{v}} - \frac{S(1 + O(\delta t'))}{\bar{v}(1 + O(\delta t'))} = O(\delta t'),$$

где $\bar{v}$ – средняя линейная скорость движения от $\bar{x}$ до 0 по Γ_+ , а S – длина дуги $\bar{x}0$ на Γ_+ . Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\omega(x') - \omega(\bar{x})}{t'} &\leq \frac{\omega(x(t')) + t'\varepsilon - \omega(\bar{x})}{t'} \\ &\leq \frac{\omega(\bar{x}) - \beta(t')^{1/2}(1 + O(\delta t')) + O(\delta t') + t'\varepsilon - \omega(\bar{x})}{t'} \\ &\leq -\beta(t')^{-1/2}(1 + O(\delta t')) + \varepsilon + O(1) \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

при $t' \rightarrow +0$. Отсюда следует, что $DS_l\omega(\bar{x}) = \emptyset$.

Рис. 2

2) Пусть $\alpha = 1$. В этом случае если $x' \in \bar{x} +]0, \delta[\cdot (l + \delta B)$ при достаточно малом $\delta \in]0, \varepsilon[$, то в качестве $x(t')$ можно взять точку пересечения линии из $\mathcal{L}_-$, проходящей через x' , с $\mathcal{L}_\alpha = \Gamma_+$ (см. рис. 2). Если x' лежит над $\mathcal{L}_\alpha$ или на $\mathcal{L}_\alpha$, то $\omega(x') \leq \omega(x(t'))$, если же x' лежит под $\mathcal{L}_\alpha$, то, как и в случае 1), можно показать, что $\omega(x') < \omega(x(t')) - \beta(\delta t')^{1/2} < \omega(x(t'))$ при достаточно малом $\delta \in]0, \varepsilon[$ и некотором $\beta > 0$, ввиду того что линии из $\mathcal{L}_-$ пересекаются с Γ_+ вблизи точки $\bar{x}$ под отделенным от нуля углом. Следовательно, условие г) из п. 4 выполнено при любом расположении x' относительно $\mathcal{L}_\alpha$. Поэтому $l \in U(\bar{x})$. Очевидно, что здесь $l = \bar{l}(\bar{x})$ (см. п. 7). Рассуждая так же, как и в случае 1), получим, что $DS_l\omega(\bar{x}) =]-\infty, 1]$, поскольку, очевидно, $DS_l\omega(\bar{x})$ связно и в силу п. 9 $\sup DS_{\bar{l}(\bar{x})}\omega(\bar{x}) = 1$.

Заметим, что область определения классического решения уравнения Беллмана

$$\sup_{|u| \leq 1} \left(\frac{\partial \omega(x)}{\partial x^1} x^2 + \frac{\partial \omega(x)}{\partial x^2} u \right) = 1$$

не содержит Γ , поскольку $\nabla\omega(x)$ не существует.

Аналогично доказывается, что $U(x) = (x^2, [-1, 1]) \setminus \{0\}$ и $\bar{l}(x) \in U(x)$ вне линии переключения (если $\bar{x}$ лежит на оси $0x^1$, то в качестве $x(t')$ можно взять точку пересечения перпендикуляра к l , проходящего через точку x' , с линией $\mathcal{L}_\alpha$).

Похожая картина наблюдается в задаче управления гармоническим осциллятором [8, с. 18] $\dot{x}^1 = x^2$, $\dot{x}^2 = -x^1 + u(t)$, $|u(t)| \leq 1$, и в задаче управления под действием отталкивающей силы [8, с. 55] $\dot{x}^1 = x^2$, $\dot{x}^2 = k^2x^1 - 2bx^2 + u(t)$, $|u(t)| \leq 1$, где $k^2 > 0$ и b – константы. В том и другом случаях область определения классического решения уравнения Беллмана не содержит линии переключения ввиду несуществования $\nabla\omega(x)$, тогда как $\bar{l}(x) \in U(x)$ на линии переключения (за исключением особых точек этой линии) и, следовательно, необходимое условие оптимальности из п. 9 содержательно.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.
- [2] Сухинин М. Ф. Об одном аналоге уравнения Беллмана // Матем. заметки. 1985. Т. 38. № 2. С. 267–271.
- [3] Сухинин М. Ф. Избранные главы нелинейного анализа. М.: Изд-во Российского университета дружбы народов, 1992.
- [4] Болтянский В. Г. Достаточные условия оптимальности и обоснование метода динамического программирования // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28. № 3. С. 481–514.
- [5] Crandall M. G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. V. 277. P. 1–42.
- [6] Субботин А. И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. М.: Наука, 1991.
- [7] Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
- [8] Ли Э. В., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.

Российский университет дружбы народов, г. Москва

Поступило

30.07.1997

Исправленный вариант

24.05.1999