Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Э. Яворский, Предикатные логики выразительно сильных теорий, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 5, 777–788

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1221>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 16:45:38

УДК 510.6

ПРЕДИКАТНЫЕ ЛОГИКИ ВЫРАЗИТЕЛЬНО СИЛЬНЫХ ТЕОРИЙ

Р. Э. Яворский

В работе доказано, что для теории полей, теории колец, теории групп и всех арифметически корректных теорий логика $L(T)$ совпадает с исчислением предикатов.

Библиография: 16 названий.

1. Введение. Язык первого порядка, содержащий счетный набор предикатных символов любой валентности, без функциональных символов, констант и равенства будем называть *предикатным языком*. Через PC обозначим исчисление предикатов в этом языке. *Предикатной логикой* будем называть любую теорию в указанном языке, замкнутую относительно правила подстановки.

Пусть фиксирована теория T первого порядка. *Интерпретацией* предикатного языка в языке теории T называется отображение f , сопоставляющее каждой атомарной формуле предикатного языка некоторую формулу в языке теории T с тем же набором свободных переменных, причем f коммутрует с булевыми связками, кванторами и операцией замены переменных. *Предикатная логика $\mathcal{L}(T)$ теории T* есть по определению множество предикатных формул φ , таких что при любой интерпретации формула $f(\varphi)$ выводима в теории T .

Можно сказать, что логика $\mathcal{L}(T)$ теории T описывает все логические законы, действующие в рамках теории T .

В работе [1] рассматривались так называемые геделевы теории, а именно те, для которых $\mathcal{L}(T) = PC$. Было замечено, что каждая геделевская теория неразрешима, а также доказано, что арифметика Пеано PA и некоторые ее подтеории являются геделевскими теориями.

Свойства логик конструктивных арифметических теорий подробно были изучены в [2]–[4] и других работах В.Е. Плиско. В частности, им было доказано, что для любой конструктивной арифметической теории T имеет место 1-сводимость теории T к ее предикатной логике $\mathcal{L}(T)$ и что структура конструктивных арифметических теорий с отношением включения $\subseteq$ изоморфна структуре предикатных логик этих теорий с отношением $\subseteq$.

Предикатные логики классических арифметических теорий рассматривались в работе [5]. Было показано, что для любой степени неразрешимости d существует расширение T арифметики Пеано PA такое, что степени неразрешимости T и $\mathcal{L}(T)$ равны d .

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 96-01-01395, № 98-01-00249.

Определение предикатных логик теорий первого порядка является частным случаем более общего понятия, введенного в работе [6]. Пусть заданы теория T , язык L и некоторый класс $\mathcal{F}$ интерпретаций языка L в язык теории T . Тогда логика $\mathcal{L}(T, L, \mathcal{F})$ есть по определению множество формул языка L , выводимых в теории T при любой интерпретации из класса $\mathcal{F}$. Если в качестве L взять предикатный язык, а в качестве $\mathcal{F}$ – класс всех его интерпретаций в язык теории T , то $\mathcal{L}(T, L, \mathcal{F})$ совпадет с предикатной логикой $\mathcal{L}(T)$, которая и является объектом нашего изучения.

Данная статья продолжает цикл работ автора [7]–[9], посвященных изучению предикатных логик, соответствующих различным классическим теориям.

2. Признаки включения предикатных логик теорий. Заметим, что для произвольной теории T логика $\mathcal{L}(T)$ действительно является предикатной логикой – в $\mathcal{L}(T)$ допустимо правило подстановки. С другой стороны, любую предикатную логику $\mathcal{L}$ можно рассматривать как логику некоторой теории первого порядка, например, себя самой. Действительно, $\mathcal{L}(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$.

Перечислим основные признаки включения предикатных логик теорий. Пусть $\mathcal{L}_1$ обозначает множество предикатных формул, истинных во всех одноэлементных моделях.

Предложение 1. *Для любой теории T имеет место включение:*

$$\text{PC} \subseteq \mathcal{L}(T) \subseteq \mathcal{L}_1.$$

Доказательство. Включение $\text{PC} \subseteq \mathcal{L}(T)$ вытекает из теоремы Гёделя о полноте классического исчисления предикатов. Докажем, что $\mathcal{L}(T) \subseteq \mathcal{L}_1$. Пусть φ – предикатная формула такая, что $\varphi \notin \mathcal{L}_1$, и $\mathcal{M}$ – одноэлементная модель, опровергающая φ : $\mathcal{M} \models \neg \varphi$. Каждый предикатный символ является либо тождественно истинным, либо тождественно ложным в $\mathcal{M}$. Определим интерпретацию f в язык теории T следующим образом:

$$f(R(x_1, \dots, x_n)) \Rightarrow \begin{cases} \top, & \text{если } \mathcal{M} \models \forall a_1 \dots a_n R(a_1, \dots, a_n), \\ \perp, & \text{если } \mathcal{M} \models \forall a_1 \dots a_n \neg R(a_1, \dots, a_n). \end{cases}$$

Здесь $\top$ и $\perp$ – соответственно тождественная истина и тождественная ложь, естественным образом выражимые в любой теории первого порядка. С помощью простой индукции по построению формулы можно показать, что $\mathcal{M} \models \psi \Leftrightarrow T \vdash f(\psi)$, где ψ – произвольная формула. Поэтому $T \vdash \neg f(\varphi)$ и $\varphi \notin \mathcal{L}(T)$.

Предложение 2. *Если теория T_2 является расширением теории T_1 в том же языке, то $\mathcal{L}(T_1) \subseteq \mathcal{L}(T_2)$.*

Доказательство. Поскольку язык теории T_1 совпадает с языком теории T_2 , множество всевозможных интерпретаций предикатного языка будет тем же. С другой стороны, для любой интерпретации f если $T_1 \vdash f(\varphi)$, то $T_2 \vdash f(\varphi)$, так как T_2 есть расширение T_1 . Поэтому из $\varphi \in \mathcal{L}(T_1)$ следует $\varphi \in \mathcal{L}(T_2)$.

Предложение 3. *Если теория T_2 является консервативным расширением теории T_1 , то $\mathcal{L}(T_2) \subseteq \mathcal{L}(T_1)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi \notin \mathcal{L}(T_1)$. Это означает, что $T_1 \not\models f(\varphi)$ для некоторой интерпретации f в язык теории T_1 . Поскольку язык T_2 расширяет язык T_1 , отображение f также является интерпретацией предикатного языка в язык теории T_2 . В то же время, $T_2 \models f(\varphi)$ ввиду консервативности над T_1 . Поэтому $\varphi \notin \mathcal{L}(T_2)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть существует интерпретация g языка теории T_1 в язык теории T_2 такая, что для любой формулы φ в языке T_1 из $T_2 \vdash g(\varphi)$ следует $T_1 \vdash \varphi$. Тогда $\mathcal{L}(T_2) \subseteq \mathcal{L}(T_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi \notin \mathcal{L}(T_1)$ и для интерпретации f в язык теории T_1 имеет место $T_1 \not\models f(\varphi)$. Рассмотрим интерпретацию h предикатного языка в языке теории T_2 , являющуюся композицией f и g : $h(\psi) = g(f(\psi))$ для любой ψ . По условию из $T_1 \not\models f(\varphi)$ следует $T_2 \not\models g(f(\varphi))$, т.е. $T_2 \not\models h(\varphi)$; отсюда $\varphi \notin \mathcal{L}(T_2)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть T' получена из T в результате стандартной процедуры расширения с помощью определений. Тогда $\mathcal{L}(T') = \mathcal{L}(T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует непосредственно из предыдущего признака, так как в этом случае существует каноническая интерпретация языка теории T' в языке теории T и обратно с требуемыми свойствами (см., например, [10]).

Следующее определение заимствовано из [11].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\mathcal{M}_1$ – модель сигнатуры $\sigma_1 = \langle P_1^{n_1}, \dots, P_k^{n_k} \rangle$, не содержащей функциональных символов и констант, $\mathcal{M}_2$ – модель сигнатуры σ_2 . Будем говорить, что модель $\mathcal{M}_1$ относительно элементарно определима в модели $\mathcal{M}_2$, если существуют формулы $\delta(x)$, $P_1^*(x_1, \dots, x_{n_1}), \dots, P_k^*(x_1, \dots, x_{n_k})$ сигнатуры σ_2 такие, что

- 1) множество $K \equiv \{a \mid \mathcal{M}_2 \models \delta(a)\}$ не пусто,
- 2) модель $\mathcal{K}$ сигнатуры σ_1 , основное множество которой есть K , а предикаты P_i определены формулами $P_i^*(x_1, \dots, x_{n_i})$, элементарно эквивалентна $\mathcal{M}_1$.

Пусть $\text{Th}(\mathcal{M})$ обозначает элементарную теорию модели $\mathcal{M}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть в модели $\mathcal{M}_1$ выражима по крайней мере одна константа, и $\mathcal{M}_1$ относительно элементарно определима в $\mathcal{M}_2$. Тогда $\mathcal{L}(\text{Th}(\mathcal{M}_2)) \subseteq \mathcal{L}(\text{Th}(\mathcal{M}_1))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся предложением 4. Для этого построим подходящую интерпретацию g языка σ_1 в язык σ_2 . Пусть $C(x)$ – формула, определяющая в $\mathcal{M}_1$ некоторую константу. Тогда $\mathcal{M}_1 \models \exists! x C(x)$ ($\exists! x$ обозначает “существует единственное x ”) и, следовательно, $\mathcal{K} \models \exists! x C(x)$, поскольку модели $\mathcal{K}$ и $\mathcal{M}_1$ элементарно эквивалентны. Обозначим через c тот элемент множества K , для которого $\mathcal{K} \models C(c)$. Рассмотрим отношение эквивалентности на $\mathcal{M}_2$, заданное формулой

$$x \approx y \equiv (x = y) \vee (\neg \delta(x) \& y = c) \vee (\neg \delta(y) \& x = c) \vee (\neg \delta(x) \& \neg \delta(y)).$$

Это отношение совпадает с равенством на элементах множества K , а все остальные элементы из $|\mathcal{M}_2|$ (носителя модели $\mathcal{M}_2$), не попадающие в K , полагает эквивалентными константе c .

Определим теперь интерпретацию g следующим образом: для любого предикатного символа P сигнатуры σ_1

$$g(P(x_1, \dots, x_k)) = \exists z_1, \dots, z_k (\delta(z_1) \& \dots \& \delta(z_k) \\ \& x_1 \approx z_1 \& \dots \& x_k \approx z_k \& P^*(z_1, \dots, z_k)).$$

Пусть $A(x_1, \dots, x_n)$ – формула сигнатуры σ_1 , $a_1, \dots, a_n$ – произвольные элементы K . Обозначим через $A^g(a_1, \dots, a_n)$ результат подстановки $a_1, \dots, a_n$ в формулу $g(A(x_1, \dots, x_n))$. Индукцией по построению формулы A докажем, что для любых $a_1, \dots, a_n$ имеет место соотношение:

$$\mathcal{K} \models A(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathcal{M}_2 \models A^g(a_1, \dots, a_n).$$

Если A совпадает с одним из P_i , это следует из определений g и $\mathcal{K}$. Действительно, имеет место следующая цепочка равносильностей:

$$\mathcal{K} \models P_i(a_1, \dots, a_{n_i}) \Leftrightarrow \mathcal{M}_2 \models P_i^*(a_1, \dots, a_{n_i}) \\ \Leftrightarrow \mathcal{M}_2 \models \exists z_1 \dots z_{n_i} \left(\bigwedge_{1 \leq j \leq n_i} a_j = z_j \& P_i^*(z_1, \dots, z_{n_i}) \right).$$

Поскольку $a_j = z_j$ эквивалентно $\delta(z_j) \& z_j \approx a_j$ для элементов $a_j \in K$, имеем

$$\mathcal{M}_2 \models \exists z_1 \dots z_{n_i} \left(\bigwedge_{1 \leq j \leq n_i} \delta(z_j) \& \bigwedge_{1 \leq j \leq n_i} a_j \approx z_j \& P_i^*(z_1, \dots, z_{n_i}) \right) \\ \Leftrightarrow \mathcal{M}_2 \models P^g(a_1, \dots, a_n).$$

Шаг индукции в случае, когда главной в A является одна из булевых связок, тривиален. Пусть A имеет вид $\exists y B(x_1, \dots, x_n, y)$ и $\mathcal{K} \models \exists y B(a_1, \dots, a_n, y)$. Тогда найдется элемент $b \in K$ такой, что $\mathcal{K} \models B(a_1, \dots, a_n, b)$, что по предположению индукции равносильно $\mathcal{M}_2 \models B^g(a_1, \dots, a_n, b)$. Отсюда следует, что $\mathcal{M}_2 \models \exists y B^g(a_1, \dots, a_n, y)$, т.е. $\mathcal{M}_2 \models A^g(a_1, \dots, a_n)$.

Покажем, что верно и обратное. Пусть $\mathcal{M}_2 \models \exists y B^g(a_1, \dots, a_n, y)$ и d – элемент из $|\mathcal{M}_2|$ такой, что $\mathcal{M}_2 \models B^g(a_1, \dots, a_n, d)$. Если $d \in K$, то по предположению индукции $\mathcal{K} \models B(a_1, \dots, a_n, d)$, откуда $\mathcal{K} \models \exists y B(a_1, \dots, a_n, y)$, что и требовалось доказать. В случае, если $d \notin K$, можно показать, что $\mathcal{M}_2 \models B^g(a_1, \dots, a_n, c)$. Действительно, непосредственно из определения g следует, что для любой формулы $D(x_1, \dots, x_k)$ сигнатуры σ_1 имеет место соотношение:

$$\mathcal{M}_2 \models y_1 \approx y_2 \rightarrow (D^g(x_1, \dots, x_{k-1}, y_1) \Leftrightarrow D^g(x_1, \dots, x_{k-1}, y_2)).$$

Поскольку $d \notin K$, то $d \approx c$. Следовательно,

$$\mathcal{M}_2 \models B^g(a_1, \dots, a_n, c),$$

откуда $\mathcal{K} \models B(a_1, \dots, a_n, c)$ и $\mathcal{K} \models \exists y B(a_1, \dots, a_n, y)$, что и требовалось доказать.

Итак, для любой замкнутой формулы φ сигнатуры σ_1 выполняется

$$\mathcal{K} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M}_2 \models g(\varphi).$$

Поскольку модели $\mathcal{K}$ и $\mathcal{M}_1$ элементарно эквивалентны, отсюда следует, что $\mathcal{M}_1 \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M}_2 \models g(\varphi)$.

В силу предложения 4 получаем $\mathcal{L}(\text{Th}(\mathcal{M}_2)) \subseteq \mathcal{L}(\text{Th}(\mathcal{M}_1))$.

3. Предикатные логики для выразительно сильных теорий. Покажем теперь, что для теории колец, теории полей, теории групп и всех арифметически корректных теорий логика совпадает с исчислением предикатов РС. Ниже под предикатной логикой модели мы подразумеваем предикатную логику элементарной теории этой модели.

В этой главе неоднократно будет использовано следующее простое соображение.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Ввиду того, что включение $PC \subseteq \mathcal{L}(T)$ имеет место для любой классической теории, для доказательства равенства $\mathcal{L}(T) = PC$ достаточно показать, что $\mathcal{L}(T) \subseteq PC$.

3.1. Арифметически корректные теории. Будем говорить, что теория T *арифметически корректна*, если в ней выразимы все арифметические отношения, и ее теоремы истинны в стандартной модели арифметики.

ТЕОРЕМА 1. *Для любой арифметически корректной теории T логика $\mathcal{L}(T)$ совпадает с исчислением предикатов РС.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $\mathcal{L}(T) \subseteq PC$. Пусть $\varphi \notin PC$, т.е. $\neg\varphi$ выполнима. Как следует из результатов о формализуемости теоремы о полноте логики предикатов в арифметике [12], [13], всякая выполнимая формула выполнима также и в области натуральных чисел, а именно, найдутся арифметические отношения

$$P_1^A(x_1, \dots, x_{k_1}), \dots, P_n^A(x_1, \dots, x_{k_n}), \dots$$

такие, что если предикатные символы

$$P_1(x_1, \dots, x_{k_1}), \dots, P_n(x_1, \dots, x_{k_n}), \dots$$

интерпретировать соответственно этими отношениями, то формула $\neg\varphi$ будет истинной в стандартной модели арифметики.

Обозначим через $A_i(x_1, \dots, x_{k_i})$ формулу в языке теории T , выражающую отношение $P_i^A(x_1, \dots, x_{k_i})$. Определим интерпретацию f следующим образом:

$$f(P_i(x_1, \dots, x_{k_i})) \rightleftharpoons A_i(x_1, \dots, x_{k_i}).$$

При такой интерпретации формула $f(\varphi)$ будет ложной в стандартной модели арифметики, поэтому $T \not\models f(\varphi)$ и $\varphi \notin \mathcal{L}(T)$.

Из этой теоремы получаем:

СЛЕДСТВИЕ 1. *Исчисление предикатов РС является логикой истинностной арифметики ТА и всех ее подтеорий в полном арифметическом языке, в частности, арифметики Пеано РА.*

3.2. Теория колец.

ТЕОРЕМА 2. а) *Логика элементарной теории кольца целых чисел совпадает с исчислением предикатов РС.*

б) *Логика теории колец совпадает с РС.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть $\mathbf{TA}$ обозначает элементарную теорию стандартной модели арифметики $\langle \mathbb{N}, x + y = z, x \cdot y = z \rangle$ в языке, содержащем два предикатных символа для операций сложения и умножения: $x + y = z$ и $x \cdot y = z$. Воспользуемся предложением 6. Заметим, что в $\mathbf{TA}$ выразимы все константы для натуральных чисел. Покажем, что $\langle \mathbb{N}, x + y = z, x \cdot y = z \rangle$ относительно элементарно определима в кольце целых чисел $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$. Действительно, поскольку любое натуральное число представимо в виде суммы четырех квадратов целых чисел [15], следующие формулы

$$\begin{aligned}\delta(x) &\Leftrightarrow \exists y u v w (x = y \cdot y + u \cdot u + v \cdot v + w \cdot w), \\ (x + y = z)^* &\Leftrightarrow x + y = z, \\ (x \cdot y = z)^* &\Leftrightarrow x \cdot y = z\end{aligned}$$

очевидным образом выделяют в $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ модель, изоморфную стандартной модели арифметики. В силу предложения 6 $\mathcal{L}(\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle) \subseteq \mathcal{L}(\mathbf{TA})$. Согласно следствию 1 и замечанию 1 имеем $\mathcal{L}(\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle) = \mathbf{PC}$.

б) Пусть $\mathbf{K}$ обозначает элементарную теорию класса всех колец. Поскольку $\text{Th}\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ является расширением $\mathbf{K}$ в том же языке, в силу предложения 2 получаем $\mathcal{L}(\mathbf{K}) \subseteq \mathcal{L}(\text{Th}\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle)$, откуда $\mathcal{L}(\mathbf{K}) = \mathbf{PC}$.

Теорема доказана.

3.3. Теория полей.

ТЕОРЕМА 3. а) *Логика элементарной теории поля рациональных чисел совпадает с исчислением предикатов PC.*

б) *Логика теории полей совпадает с PC.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Мы воспользуемся известным результатом Дж. Робинсон о том, что понятия целого и натурального числа определимы в терминах понятия рационального числа и операций сложения и умножения над ними. В [14] доказано (теорема 3.1.i), что для того, чтобы рациональное число u было целым, необходимо и достаточно выполнение следующей формулы [14]:

$$\begin{aligned}\forall ab((\exists xyz(2 + bz^2 = x^2 + ay^2) \wedge \forall m(\exists xyz(2 + abm^2 + bz^2 \\ = x^2 + ay^2) \rightarrow \exists xyz(2 + ab(m + 1)^2 + bz^2 = x^2 + ay^2))) \\ \rightarrow \exists xyz(2 + abu^2 + bz^2 = x^2 + ay^2)).\end{aligned}$$

Если обозначить ее через $\text{Int}(u)$, то для выражения понятия натурального числа можно использовать следующую формулу:

$$\delta(u) \Leftrightarrow \text{Int}(u) \wedge u \neq 0 \wedge \exists xy(\text{Int}(x) \wedge x \neq 0 \wedge (u = x^2 \vee x^2 = 1 + uy^2)).$$

Таким образом, стандартная модель арифметики относительно элементарно определима в поле рациональных чисел. Согласно предложению 6 получаем включение $\mathcal{L}(\langle \mathbb{Q}, +, \cdot \rangle) \subseteq \mathcal{L}(\mathbf{TA})$. Так как $\mathcal{L}(\mathbf{TA}) = \mathbf{PC}$, согласно замечанию 1 получаем равенство $\mathcal{L}(\langle \mathbb{Q}, +, \cdot \rangle) = \mathbf{PC}$.

б) Пусть $\mathbf{F}$ обозначает элементарную теорию класса всех полей. В силу предложения 2 имеет место включение $\mathcal{L}(\mathbf{F}) \subseteq \mathcal{L}(\langle \mathbb{Q}, +, \cdot \rangle)$. Отсюда $\mathcal{L}(\mathbf{F}) = \mathbf{PC}$.

Теорема доказана.

3.4. Теория групп. Пусть $\mathbf{G}$ обозначает элементарную теорию групп в языке, содержащем единственную нелогическую константу – бинарный функциональный символ.

Пусть R – кольцо с единицей. Квадратная матрица над кольцом R называется *верхней унитреугольной*, если все ее элементы под главной диагональю равны нулю и все ее элементы на главной диагонали равны 1. Если кольцо R ассоциативно, то множество всех верхних унитреугольных матриц над R образует группу относительно матричного умножения, которая обозначается $UT_n(R)$.

ТЕОРЕМА 4. а) *Логика элементарной теории группы $UT_3(\mathbb{Z})$ верхних унитреугольных 3×3 матриц над кольцом целых чисел совпадает с исчислением предикатов РС.*

б) *Логика теории групп совпадает с исчислением предикатов РС.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) План доказательства теоремы следующий. Мы рассмотрим две вспомогательные модели: модель

$$\mathcal{M}_1 = \langle \mathbb{N}, P(x, y, z), x \cdot y = z \rangle,$$

где $P(x, y, z)$ обозначает предикат $x + y = z \vee |x - y| = z$, и модель

$$\mathcal{M}_2 = \langle \mathbb{Z}, x + y = z, |x \cdot y| = |z| \rangle,$$

и докажем, что $\mathcal{L}(\mathcal{M}_1) = \text{РС}$, $\mathcal{L}(\mathcal{M}_2) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{M}_1)$ и $\mathcal{L}(UT_3(\mathbb{Z})) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{M}_2)$.

ЛЕММА 1. *В модели $\mathcal{M}_1$ выразим предикат сложения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что формула

$$\begin{aligned} \psi(y, x_1, x_2) \equiv & \exists u, v (P(x_1, x_2, u) \& P(x_1, x_2, v) \& y = u \cdot v \\ & \& (x_1 \neq 0 \& x_2 \neq 0 \rightarrow u \neq v)) \end{aligned}$$

выражает отношение $y = |x_1^2 - x_2^2|$ в $\mathcal{M}_1$.

Покажем, что для любого $n \geq 1$ в модели $\mathcal{M}_1$ выразимо отношение $y = x_1^2 + \dots + x_n^2$. Индукция по n . Для $n = 1$ это тривиально:

$$y = x_1^2 \equiv y = x_1 \cdot x_1.$$

Шаг индукции. Пусть отношение $y = x_1^2 + \dots + x_k^2$ выразимо. Для того чтобы выразить отношение $y = x_1^2 + \dots + x_k^2 + x_{k+1}^2$, рассмотрим формулу:

$$\begin{aligned} \varphi(y, x_1, \dots, x_{k+1}) \equiv & (x_1 = 0 \& y = x_2^2 + \dots + x_{k+1}^2) \vee \dots \\ & \vee (x_{k+1} = 0 \& y = x_1^2 + \dots + x_k^2) \\ & \vee (x_1 \neq 0 \& \dots \& x_{k+1} \neq 0 \\ & \& \exists u, v (u = x_1^2 + \dots + x_k^2 \& v = x_{k+1}^2 \& P(u, v, y)) \\ & \& \forall w (\exists z (z = x_1^2 + \dots + x_{k-1}^2 \& P(y, z, w)) \rightarrow w \neq |x_k^2 - x_{k+1}^2|)). \end{aligned}$$

Отметим, что при $k = 1$ условие $z = a_1^2 + \dots + a_{k-1}^2$ превращается в $z = 0$, в результате чего импликация в последнем конъюнктивном члене приобретает вид

$$\forall w(P(b, 0, w)) \rightarrow w \neq |a_1^2 - a_2^2|,$$

т.е. $b \neq |a_1^2 - a_2^2|$.

Покажем, что для любых натуральных чисел $b, a_1, \dots, a_{k+1}$ имеет место эквивалентность

$$\mathcal{M}_1 \models \varphi(b, a_1, \dots, a_{k+1}) \Leftrightarrow b = a_1^2 + \dots + a_{k+1}^2. \quad (*)$$

Действительно, если хотя бы одно из a_i равно нулю, эта эквивалентность следует из предположения индукции о выразимости отношения $y = x_1^2 + \dots + x_k^2$. Рассмотрим теперь случай, когда все a_i отличны от нуля.

Докажем импликацию слева направо. Пусть $\mathcal{M}_1 \models \varphi(b, a_1, \dots, a_{k+1})$. Так как все a_i не равны нулю, истинным является последний член дизъюнкции, а именно:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 \models \exists u, v(u = a_1^2 + \dots + a_k^2 \& v = a_{k+1}^2 \& P(u, v, b) \\ \& \forall w(\exists z(z = a_1^2 + \dots + a_{k-1}^2 \& P(b, z, w)) \rightarrow w \neq |a_k^2 - a_{k+1}^2|)). \end{aligned}$$

Из истинности первого члена конъюнкции следует, что

$$b = a_1^2 + \dots + a_{k+1}^2 \quad \text{либо} \quad b = |a_1^2 + \dots + a_k^2 - a_{k+1}^2|.$$

Предположим, что $b = |a_1^2 + \dots + a_k^2 - a_{k+1}^2|$. Покажем, что в этом случае нарушается последний конъюнктивный член. Действительно, посылка импликации будет истинной, если

$$w = b + a_1^2 + \dots + a_{k-1}^2 \quad \text{или} \quad w = |b - (a_1^2 + \dots + a_{k-1}^2)|.$$

Подставив значение b , получим, что

$$\begin{aligned} w &= |a_1^2 + \dots + a_k^2 - a_{k+1}^2| + a_1^2 + \dots + a_{k-1}^2 \quad \text{или} \\ w &= ||a_1^2 + \dots + a_k^2 - a_{k+1}^2| - (a_1^2 + \dots + a_{k-1}^2)|. \end{aligned}$$

Независимо от знака суммы $a_1^2 + \dots + a_k^2 - a_{k+1}^2$ после раскрытия модулей получим, что одно из значений w будет равно

$$w = |a_1^2 + \dots + a_{k-1}^2 - (a_1^2 + \dots + a_{k+1}^2)| = |a_k^2 - a_{k+1}^2|,$$

что означает ложность импликации.

Докажем теперь импликацию справа налево в (*). Как уже было замечено, достаточно рассмотреть случай, когда все a_i отличны от нуля. Итак, пусть $b = a_1^2 + \dots + a_{k+1}^2$. Покажем, что в этом случае будет истинным последний дизъюнктивный член в $\varphi(b, a_1, \dots, a_{k+1})$. Истинность первого конъюнктивного члена в нем следует из истинности $P(a_1^2 + \dots + a_k^2, a_{k+1}^2, b)$.

Покажем, что будет истинным второй конъюнктивный член:

$$\mathcal{M}_1 \models \forall w(\exists z(z = a_1^2 + \dots + a_{k-1}^2 \& P(b, z, w)) \rightarrow w \neq |a_k^2 - a_{k+1}^2|).$$

Действительно, посылка импликации будет истинной, если

$$\begin{aligned} w &= b + a_1^2 + \cdots + a_{k-1}^2 = 2a_1^2 + \cdots + 2a_{k-1}^2 + a_k^2 + a_{k+1}^2 \quad \text{или} \\ w &= |b - (a_1^2 + \cdots + a_{k-1}^2)| = a_k^2 + a_{k+1}^2, \end{aligned}$$

а тогда будет истинным и заключение. В обоих случаях $w \neq |a_k^2 - a_{k+1}^2|$, поскольку $a_k \neq 0$ и $a_{k+1} \neq 0$.

Таким образом, соотношение (*) доказано.

Для завершения доказательства леммы воспользуемся известным фактом из теории чисел о том, что любое натуральное число может быть представлено в виде суммы четырех квадратов целых чисел [15]. Исходя из этого, операцию сложения можно выразить следующим способом:

$$x + y = z \Leftrightarrow \exists u_1 \dots u_8 (x = u_1^2 + \cdots + u_4^2 \& y = u_5^2 + \cdots + u_8^2 \& z = u_1^2 + \cdots + u_8^2).$$

Лемма доказана.

Из этой леммы, в частности, следует, что в модели $\mathcal{M}_1$ выразимы все арифметические отношения. Таким образом, элементарная теория модели $\mathcal{M}_1$ является арифметически корректной в смысле условий теоремы 1. Следовательно, $\mathcal{L}(\mathcal{M}_1) = \text{PC}$.

Рассмотрим теперь модель $\mathcal{M}_2 = \langle \mathbb{Z}, x + y = z, |x \cdot y| = |z| \rangle$.

ЛЕММА 2. *Существует интерпретация f языка модели $\mathcal{M}_1$ в язык модели $\mathcal{M}_2$ такая, что для любой замкнутой формулы φ в языке $\mathcal{M}_1$ имеет место: $\mathcal{M}_1 \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M}_2 \models f(\varphi)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что отношение $|x| = |y|$ выразимо в $\mathcal{M}_2$, например, формулой $\forall u (|xu| = |yu|)$. Определим интерпретацию f следующим образом:

$$\begin{aligned} f(x = y) &\Leftrightarrow |x| = |y|, \\ f(P(x, y, z)) &\Leftrightarrow |x + y| = |z| \vee |x - y| = |z|, \\ f(x \cdot y = z) &\Leftrightarrow |x \cdot y| = |z|. \end{aligned}$$

Пусть $A(x_1, \dots, x_n)$ – произвольная формула со свободными переменными $x_1, \dots, x_n$ в языке $\mathcal{M}_1$. Покажем, что для любого набора целых чисел $a_1, \dots, a_n$ имеет место соотношение

$$\mathcal{M}_1 \models A(|a_1|, \dots, |a_n|) \Leftrightarrow \mathcal{M}_2 \models f(A(a_1, \dots, a_n)),$$

где под $f(A(a_1, \dots, a_n))$ мы понимаем результат подстановки $a_1, \dots, a_n$ в формулу $f(A(x_1, \dots, x_n))$.

Для атомарных формул это соотношение приобретает вид:

$$\begin{aligned} |a_1| &= |a_2| \Leftrightarrow |a_1| = |a_2|, \\ |a_1| + |a_2| &= |a_3| \vee ||a_1| - |a_2|| = |a_3| \Leftrightarrow |a_1 + a_2| = |a_3| \vee |a_1 - a_2| = |a_3|, \\ |a_1| \cdot |a_2| &= |a_3| \Leftrightarrow |a_1| \cdot |a_2| = |a_3| \end{aligned}$$

и не требует доказательства. Индукцией по построению покажем, что это соотношение имеет место для любой формулы.

Если формула A получена применением булевых связок, шаг индукции тривиален. Пусть A имеет вид $\exists y B(x_1, \dots, x_n, y)$ и $a_1, \dots, a_n$ – произвольный набор целых чисел. Тогда $\mathcal{M}_1 \models \exists y B(|a_1|, \dots, |a_n|, y)$ равносильно тому, что для некоторого натурального числа b $\mathcal{M}_1 \models B(|a_1|, \dots, |a_n|, b)$. По предположению индукции это равносильно тому, что $\mathcal{M}_2 \models f(B(a_1, \dots, a_n, b))$ и $\mathcal{M}_2 \models f(B(a_1, \dots, a_n, -b))$. Ввиду произвольности выбора b это равносильно $\mathcal{M}_2 \models \exists y f(B(a_1, \dots, a_n, y))$ и $\mathcal{M}_2 \models f(A(a_1, \dots, a_n))$, поскольку f коммутрует с квантором.

Лемма доказана.

Согласно предложению 4 имеем $\mathcal{L}(\mathcal{M}_2) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{M}_1)$.

ЛЕММА 3. Модель $\mathcal{M}_2 = \langle \mathbb{Z}, x + y = z, |x \cdot y| = |z| \rangle$ относительно элементарно определима в группе $UT_3(\mathbb{Z})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Этот факт непосредственно следует из результатов, изложенных в [16], и его доказательство было любезно предоставлено профессором О. В. Белеградеком.

Напомним необходимые определения. Пусть задана группа G . Коммутатором $[a, b]$ элементов a и b называется элемент $aba^{-1}b^{-1}$. Централизатором $C(a)$ элемента a группы G называется множество элементов группы, коммутирующих с a . Известно, что $C(a)$ является подгруппой в G . Центром $Z(G)$ группы G называется множество элементов, перестановочных со всеми ее элементами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть R – коммутативное ассоциативное кольцо с единицей. Пара элементов (a, a') называется базой в группе $UT_3(R)$, если

- 1) подгруппы $C(a), C(a')$ абелевы,
- 2) $C(a) \cap C(a') = Z(UT_3(R))$,
- 3) $[a, C(a')] = [C(a), a'] = Z(UT_3(R))$.

Рассмотрим следующие формулы:

$$\begin{aligned}\varphi_1(a) &\Leftrightarrow \forall xy (ax = xa \& ay = ya \rightarrow xy = yx), \\ \varphi_2(a, a') &\Leftrightarrow \forall x (ax = xa \& a'x = xa' \leftrightarrow \forall y (xy = yx)), \\ \varphi_3^1(a, a') &\Leftrightarrow \forall x (\exists y (a'y = ya' \& x = yaa^{-1}y^{-1}) \leftrightarrow \forall y (xy = yx)), \\ \varphi_3^2(a, a') &\Leftrightarrow \forall x (\exists y (ay = ya \& x = ya'y^{-1}a'^{-1}) \leftrightarrow \forall y (xy = yx)).\end{aligned}$$

Как можно увидеть, формула

$$\text{Basa}(a, a') \Leftrightarrow \varphi_1(a) \& \varphi_1(a') \& \varphi_2(a, a') \& \varphi_3^1(a, a') \& \varphi_3^2(a, a')$$

формализует понятие базы в языке теории групп, а именно, пара (a, a') является базой, если и только если $UT_3(R) \models \text{Basa}(a, a')$.

Для краткости обозначим через (α, β, γ) матрицу из $UT_3(R)$ с элементами α, β, γ на местах $(1, 2), (2, 3), (1, 3)$ соответственно.

Непосредственное вычисление показывает, что

$$[(\alpha, \beta, \gamma), (\alpha', \beta', \gamma')] = (0, 0, \alpha\beta' - \alpha'\beta).$$

В [16] доказано (предложение 1.1.15.7), что для $a = (\alpha, \beta, \gamma)$, $a' = (\alpha', \beta', \gamma')$ пара (a, a') является базой, если и только если элемент $\Delta = \alpha\beta' - \alpha'\beta$ обратим в кольце R .

В частности, для $R = \mathbb{Z}$ пара (a, a') является базой, если и только если $\Delta = \alpha\beta' - \alpha'\beta = \pm 1$.

В группе $UT_3(\mathbb{Z})$ центр состоит из матриц вида $(0, 0, \gamma)$. Если $c = (0, 0, \gamma)$, $c' = (0, 0, \gamma')$, то $cc' = (0, 0, \gamma + \gamma')$. Таким образом, центр естественно изоморфен аддитивной группе кольца $\mathbb{Z}$.

Обозначим через $\text{Mul}(x, x', y, y', y'')$ формулу

$$\exists z z' ([z, x] = e \wedge [z, x'] = y \wedge [z', x'] = e \wedge [x, z'] = y' \wedge [z, z'] = y'').$$

Тогда если пара (a, a') является базой, $c = (0, 0, \gamma)$, $c' = (0, 0, \gamma')$, $c'' = (0, 0, \gamma'')$, то $UT_3(R) \models \text{Mul}(a, a', c, c', c'')$ равносильно $R \models \gamma\gamma' = \Delta\gamma''$. (См. 1.1.16.1 в [16]).

В частности, $UT_3(\mathbb{Z}) \models \exists x x' (\text{Basa}(x, x') \& \text{Mul}(x, x', c, c', c''))$ равносильно $\mathbb{Z} \models \gamma \cdot \gamma' = \pm \gamma''$.

Отождествляя $\gamma \in \mathbb{Z}$ с $(0, 0, \gamma) \in UT_3(\mathbb{Z})$, имеем интерпретацию модели $\mathcal{M}_2$ в группе $UT_3(\mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned} \delta(x) &\rightleftharpoons \forall y (xy = yx), \\ (x + y = z)^* &\rightleftharpoons xy = z, \\ (|x \cdot y| = |z|)^* &\rightleftharpoons \exists u u' (\text{Basa}(u, u') \& \text{Mul}(u, u', x, y, z)), \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Заметим, что в $\mathcal{M}_2$ выражима константа нуль: $x = 0 \rightleftharpoons \forall y (x + y = y)$. Согласно предложению 6 получаем

$$\mathcal{L}(UT_3(\mathbb{Z})) \subseteq \mathcal{L}(\langle \mathbb{Z}, x + y = z, |x \cdot y| = |z| \rangle),$$

поэтому $\mathcal{L}(UT_3(\mathbb{Z})) = \text{PC}$.

б) Поскольку элементарная теория группы $UT_3(\mathbb{Z})$ является расширением теории групп $\mathbf{G}$, то $\mathcal{L}(\mathbf{G}) \subseteq \mathcal{L}(\text{Th}(UT_3(\mathbb{Z})))$ и, следовательно, $\mathcal{L}(\mathbf{G}) = \text{PC}$.

Теорема доказана.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору С.Н. Артёмову за постановку задачи и постоянное внимание к работе, а также профессору О.В. Белеградеку за помощь при доказательстве теоремы 4.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Лифшиц В. А. Дедуктивная общезначимость и классы сведения // Записки научн. семин. ЛОМИ. 1967. Т. 4. С. 69–77.
- [2] Плиско В. Е. Некоторые варианты понятия реализуемости для предикатных формул // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1978. Т. 42. № 3. С. 636–653.
- [3] Плиско В. Е. Конструктивная формализация теоремы Тенненбаума и ее применения // Матем. заметки. 1990. Т. 48. № 3. С. 108–118.

- [4] Плиско В. Е. Об арифметической сложности некоторых предикатных логик // Матем. заметки. 1992. Т. 52. № 1. С. 94–104.
- [5] Вардanian В. А. Предикатная логика доказуемости без доказуемости // Интенциональные логики и логическая структура теории. Тбилиси, 1988. С. 65–69.
- [6] Artemov S., Montagna F. On first-order theories with provability operator // J. Symbolic Logic. 1994. V. 59. № 4. P. 1139–1153.
- [7] Yavorsky R. E. Logical Schemes for First-Order Theories // Lecture Notes in Computer Science. 1997. V. 1234. P. 410–418.
- [8] Яворский Р. Э. Предикатные логики разрешимых фрагментов арифметики // Вестн. МГУ. Сер. 1 Матем., мех. 1998. № 2. С. 12–16.
- [9] Яворский Р. Э. Разрешимые логики первого порядка // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т. 4. № 2. С. 733–749.
- [10] Клини С. К. Введение в метаматематику. М.: ИЛ, 1957.
- [11] Ершов Ю. Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980.
- [12] Hilbert D., Bernays P. Grundlagen der Mathematik. II. New York–Berlin–Heidelberg–Tokyo: Springer-Verlag, 1968.
- [13] Feferman S. Arithmetization of metamathematics in a general setting // Fund. Math. 1960. V. 49. P. 35–92.
- [14] Robinson J. Definability and decision problem in arithmetic // J. Symbolic Logic. 1949. V. 14. № 2. P. 98–114.
- [15] Бухштаб А. А. Теория чисел. М.: Учпедгиз, 1960.
- [16] Белеградек О. В. Теория моделей унитарных и экзистенциально замкнутых групп. Дисс. . . . д.ф.-м.н. НГУ, 1995.

Математический институт РАН им. В. А. Стеклова

Поступило
17.11.1998