Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Акбаров, Стереотипные алгебры с отражением и теорема о бикоммутанте, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 5, 789–793

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1222>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 15:22:22

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

СТЕРЕОТИПНЫЕ АЛГЕБРЫ С ОТРАЖЕНИЕМ И ТЕОРЕМА О БИКОММУТАНТЕ

С. С. Акбаров

Как известно, всякая инволютивная подалгебра A в алгебре $\mathcal{B}(H)$ ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H плотна (сильно и слабо) в своем бикоммутанте $A^{\perp\perp}$. Этот факт, доказанный Джоном фон Нойманном в работе [1], называется *теоремой о бикоммутанте* и традиционно упоминается в руководствах по операторным алгебрам и теории представлений при определении алгебр фон Нойманна [2]–[5]. Если ослабить условия на подалгебру A (отказавшись от инволютивности) или заменить H , скажем, произвольным банаховым пространством, то теорема о бикоммутанте перестанет выполняться, и это рождает вопрос, существуют ли какие-нибудь ее аналоги для неинволютивных топологических алгебр?

В настоящей заметке мы описываем такой аналог для класса стереотипных алгебр, введенных автором в серии работ [6]–[9]. Мы формулируем теорему о бикоммутанте для стереотипных алгебр, наделенных весьма интересной и многообещающей дополнительной структурой – точным отражением, аксиоматически определенным ниже. Оказывается, что при естественных допущениях такой структурой обладают алгебра операторов $\mathcal{L}(X)$, описывавшаяся в [6]–[8], а также стереотипные групповые алгебры $\mathcal{C}'(G)$, $\mathcal{E}'(G)$, $\mathcal{H}'(G)$, $\mathcal{R}'(G)$ из [9].

1. Алгебры с отражением. Пусть A – проективная стереотипная алгебра [7], [9], A' – ее сопряженное стереотипное пространство [6], [8], рассматриваемое как двусторонний стереотипный A -модуль [7] с операциями

$$(a \cdot u \cdot b)(x) = u(b \cdot x \cdot a), \quad a, b \in A, \quad u \in A'.$$

Линейное непрерывное отображение $@: A^* \rightarrow A$ называется *отражением* на A , если выполнены следующие условия

- (i) $u(@v) = v(@u)$, $u, v \in A^*$;
- (ii) $@(a \cdot u \cdot b) = a \cdot @u \cdot b$, $a, b \in A$, $u \in A^*$.

Таким образом, $@$ должно быть морфизмом A -бимодулей, совпадающим со своим сопряженным отображением:

$$@^* = @. \tag{1}$$

Можно заметить, что условие (ii) в этой паре эквивалентно условию

- (iii) $@u \cdot v = u \cdot @v$, $u, v \in A^*$.

Пара $(A, @)$ называется *алгеброй с отражением*. Если, кроме того, выполняются следующие эквивалентные (в силу (1)) условия

- а) $@: A' \rightarrow A$ является мономорфизмом стереотипных пространств (т.е. $@$ – инъективное отображение);
- б) $@: A' \rightarrow A$ является эпиморфизмом стереотипных пространств (т.е. $@$ имеет плотный образ в A);
- с) $@: A' \rightarrow A$ является биморфизмом стереотипных пространств (т.е. выполнено и то и другое);

то отображение $@$ на алгебре A называется *точным*.

ПРИМЕР 1. СТЕРЕОТИПНАЯ АЛГЕБРА ОПЕРАТОРОВ $\mathcal{L}(X)$. Для всякого стереотипного пространства X отображение Гротендика $@_X: \mathcal{L}'(X) \rightarrow \mathcal{L}(X)$, определенное в [8],

$$@_X: f \otimes x \in X' \otimes X = \mathcal{L}(X)' \mapsto f \odot x \in X' \odot X = \mathcal{L}(X),$$

является единственным с точностью до скалярного множителя отражением на алгебре операторов $\mathcal{L}(X)$. При этом, $\mathcal{L}(X)$ тогда и только тогда будет алгеброй с точным отражением, когда пространство X обладает свойством стереотипной аппроксимации [8].

ПРИМЕР 2. СТЕРЕОТИПНЫЕ ГРУППОВЫЕ АЛГЕБРЫ $\mathcal{C}'(G)$, $\mathcal{E}'(G)$, $\mathcal{H}'(G)$, $\mathcal{R}'(G)$. Естественное отображение, при котором непрерывная функция u на компактной вещественной группе G превращается в обобщенную функцию $@u$ на G , действующую как мера с плотностью $\tilde{u}(t) = u(t^{-1})$ относительно меры Хаара μ

$$@u(v) = \int_G v(t) \cdot u(t^{-1}) \cdot d\mu(t), \quad v \in \mathcal{C}(G),$$

является точным отражением на стереотипной групповой алгебре мер Радона $\mathcal{C}'(G)$, определенной в [9].

То же правило определяет точное отражение на стереотипной алгебре распределений $\mathcal{E}'(G)$ на компактной вещественной группе Ли G [9].

Далее, если G – редуктивная комплексная группа Ли, т.е. G является комплексификацией некоторой вещественной компактной группы Ли $G_{\mathbb{R}}$, то формула

$$@u(v) = \int_{G_{\mathbb{R}}} v(t) \cdot u(t^{-1}) \cdot d\mu(t), \quad u, v \in \mathcal{H}(G),$$

определяет точное отражение на стереотипной алгебре голоморфных потоков $\mathcal{H}'(G)$ [9].

Аналогично определяется точное отражение на стереотипной алгебре $\mathcal{R}'(G)$ регулярных потоков на редуктивной комплексной аффинной алгебраической группе G [9].

ПРИМЕР 3. Алгебра $\mathcal{C}(T)$ непрерывных функций на компакте T тогда и только тогда обладает нетривиальным отражением, когда компакт T содержит изолированные точки. При этом алгебра $\mathcal{C}(T)$ тогда и только тогда обладает точным отражением, когда компакт T является дискретным (и, следовательно, конечным) пространством: $\mathcal{C}(T) = \mathbb{C}^n$.

2. Конечномерные морфизмы и модули со свойством аппроксимации. Пусть $(A, @)$ – алгебра с отражением и X, Y – левые стереотипные модули над A [7]. Для любых $f \in X'$ и $y \in X$ обозначим

$$f \odot_A y: X \rightarrow Y, \quad f \odot_A y(x) = @f_A(x) \cdot y, \quad (2)$$

где

$$f_A: X \rightarrow A', \quad f_A(x)(a) = f(a \cdot x).$$

Отображение $f \odot_A y: X \rightarrow Y$ будет морфизмом (т.е. линейным над A непрерывным отображением) стереотипных A -модулей. Такие морфизмы мы называем *одномерными* (над алгеброй с отражением $(A, @)$). Любая конечная сумма одномерных морфизмов

$$\psi = \sum_{i=1}^n f_i \odot_A y_i$$

называется *конечномерным* морфизмом (над алгеброй с отражением $(A, @)$).

Аналогично определяются одномерные и конечномерные морфизмы правых стереотипных модулей над $(A, @)$. Элементарно проверяется, что морфизм $\psi: X \rightarrow Y$ левых стереотипных модулей тогда и только тогда одномерен (конечномерен), когда морфизм $\psi': Y' \rightarrow X'$ правых стереотипных модулей одномерен (конечномерен).

Будем говорить, что модуль X над алгеброй с отражением $(A, @)$ обладает свойством аппроксимации (над $(A, @)$), если тождественный морфизм $1_X: X \rightarrow X$ аппроксимируется в $X \otimes_A X = \text{End}_A(X)$ конечномерными.

ПРИМЕР 4. Сама алгебра A , как левый или правый A -модуль, тогда и только тогда обладает аппроксимацией над A , когда отражение $@: A' \rightarrow A$ является точным.

ПРИМЕР 5. Всякое стереотипное пространство X , рассматриваемое как левый $\mathcal{L}(X)$ -модуль, аппроксимируемо над $\mathcal{L}(X)$.

3. Коммутант и бикоммутант. Если X – левый (или правый) стереотипный модуль над проективной стереотипной алгеброй A [7], то коммутант $A^I(X)$ определяется формулой

$$A^I(X) = X \underset{A}{\otimes} X = \text{End}_A(X)$$

и также является проективной стереотипной алгеброй, над которой X будет стереотипным левым (правым) модулем.

ТЕОРЕМА 1. Если $(A, @)$ – алгебра с отражением, то для всякого стереотипного модуля X над A коммутант $A^I(X)$ является алгеброй с отражением $@^I$, однозначно определяемым формулой

$$f \underset{A}{\otimes} x \in A^I(X)' \xrightarrow{@^I} f \underset{A}{\otimes} x \in A^I(X), \quad f \in X', \quad x \in X,$$

где $f \underset{A}{\otimes} x$ определено в (2), а $f \underset{A}{\otimes} x$ действует по формуле $f \underset{A}{\otimes} x(\alpha) = f(\alpha(x))$, $\alpha \in A^I(X)$.

Условимся, как обычно, говорить, что алгебра A эффективно действует на модуле X , если для всякого $a \in A$ тождество $a \cdot x = 0$ ($x \in X$) влечет за собой равенство $a = 0$. Иными словами, представление алгебры A в алгебре операторов $\mathcal{L}(X)$, описанное в [7], должно иметь нулевое ядро.

Свойства коммутанта

- 1°. Если $(A, @)$ – алгебра с точным отражением, эффективно действующая на X , то X обладает аппроксимацией над $(A^I(X), @^I)$.
- 2°. Если X обладает аппроксимацией над $(A, @)$, то $(A^I(X), @^I)$ – алгебра с точным отражением, эффективно действующая на X .

Бикоммутантом $A^{II}(X)$ проективной стереотипной алгебры A , действующей на стереотипном модуле X , называется коммутант от коммутанта:

$$A^{II}(X) = [A^I(X)]^I(X) = X \underset{A^I(X)}{\otimes} X = \text{End}_{A^I(X)}(X).$$

Как и коммутант, бикоммутант $A^{II}(X)$ всегда является проективной стереотипной алгеброй, причем отражение $@$ на A порождает естественное отражение $@^{II}$ на $A^{II}(X)$.

Свойства бикоммутанта

- 1°. Если X обладает аппроксимацией над $(A, @)$, то X обладает аппроксимацией над $(A^{II}(X), @^{II})$.
- 2°. Если $(A, @)$ – алгебра с точным отражением, эффективно действующая на X , то $(A^{II}(X), @^{II})$ – алгебра с точным отражением, эффективно действующая на X .

4. Морфизмы алгебр с отражением и теорема о бикоммутанте для алгебр с отражением. Морфизмом алгебр с отражением $(A, @_A)$ и $(B, @_B)$ называется всякий морфизм стереотипных алгебр $\varphi: A \rightarrow B$, обеспечивающий коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{@_A} & A \\ \varphi^* \uparrow & & \downarrow \varphi \\ B' & \xrightarrow{@_B} & B \end{array}$$

Следующая конструкция служит руководящим примером.

ПРИМЕР 6. МОРФИЗМ В БИКОММУТАНТ $\lambda: A \rightarrow A^{\text{II}}(X)$. Если X - стереотипный модуль над алгеброй с отражением $(A, @)$, то естественное отображение

$$\lambda: A \rightarrow A^{\text{II}}(X)$$

является морфизмом алгебр с отражением.

ПРИМЕР 7. НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ. Пусть $\pi: G \rightarrow \mathcal{L}(X)$ – непрерывное представление компактной группы G в конечномерном пространстве X и $\varphi: \mathcal{C}'(G) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ – соответствующий морфизм стереотипных алгебр [9, теорема 9]. Пусть $@_G: \mathcal{C}(G) \rightarrow \mathcal{C}'(G)$ – нормированное отражение на алгебре $\mathcal{C}'(G)$ (пример 2):

$$@_G u(v) = \frac{1}{\mu(G)} \int_G v(t) \cdot u(t^{-1}) \cdot d\mu(t),$$

и пусть $@_X: \mathcal{L}'(X) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ – нормированное отражение на алгебре $\mathcal{L}(X)$ (т.е. отображение Гротендика из примера 1):

$$@_X(f \otimes x) = f \odot x, \quad f \in X', \quad x \in X.$$

Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) π – неприводимое представление;
- (ii) для какого-нибудь ненулевого отражения $@$ на $\mathcal{L}(X)$ отображение φ является морфизмом алгебр с отражением $\varphi: (\mathcal{C}'(G), @_G) \rightarrow (\mathcal{L}(X), @)$;
- (iii) для некоторой ненулевой константы $\lambda \in \mathbb{C}$ отображение φ является морфизмом алгебр с отражением $\varphi: (\mathcal{C}'(G), @_G) \rightarrow (\mathcal{L}(X), \lambda @_X)$.

При этом

$$\varphi \circ @_G \circ \varphi' = \frac{1}{\dim X} \cdot @_X,$$

где $\dim X$ – размерность пространства X . В частности,

- а) π – одномерное представление $\Leftrightarrow \varphi$ – морфизм алгебр с отражением $\varphi: (\mathcal{C}'(G), @_G) \rightarrow (\mathcal{L}(X), @_X)$.

Из примера 6 и свойства 2°° следует

ТЕОРЕМА 2 (о бикоммутанте для алгебр с отражением). Если проективная стереотипная алгебра A наделена точным отражением $@: A' \rightarrow A$, то для всякого стереотипного A -модуля X , на котором A действует эффе́ктивно, естественное отображение

$$\lambda: A \rightarrow A^{\text{II}}(X)$$

является эпиморфизмом (и следовательно – биморфизмом) стереотипных пространств.

Эквивалентная формулировка. Пусть $(A, @)$ – алгебра с точным отражением, X – стереотипное пространство, и задан мономорфизм стереотипных алгебр (инъективное непрерывное линейное мультипликативное сохраняющее единицу отображение) $\varphi: A \rightarrow \mathcal{L}(X)$. Тогда $\varphi(A)$ плотно в бикоммутанте $A^{\text{II}} \subseteq \mathcal{L}(X)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Von Neumann J. // Math. Ann. 1929. V. 102. P. 370–427. 2. Мерфи Дж. C^* -алгебры и теория операторов. М.: Факториал, 1997. 3. Браттели У., Робинсон Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. М.: Мир, 1982. 4. Кириллов А. А. Элементы теории представлений. М.: Наука, 1978. 5. Барут А., Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения. М.: Мир, 1980. 6. Акбаров С. С. // Матем. заметки. 1995. Т. 57. № 3. С. 463–466. 7. Акбаров С. С. // Функцион. анализ и его прилож. 1995. Т. 29. № 4. С. 68–72. 8. Акбаров С. С. Свойство стереотипной аппроксимации и проблема Гротендика однозначности следа // Функцион. анализ и его прилож. (в печати).. 9. Акбаров С. С. Стереотипные групповые алгебры // Математические заметки (в печати)..

Московский институт электроники и математики

Поступило
07.07.1998