Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, А. Э. Рууге, Пара Лакса для уравнений характеристик осредненных многочастичных операторов, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 5, 793–796

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1223>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 14:24:02

ПАРА ЛАКСА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ХАРАКТЕРИСТИК ОСРЕДНЕННЫХ МНОГОЧАСТИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В. П. Маслов, А. Э. Рууге

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned}
 i \frac{\partial}{\partial t} G(x_1, x_2) = & \int dz T(x_2; z) G(x_1, z) - \int dz T^*(x_1; z) G(z, x_2) \\
 & + \int dy dz dw V(x_2, y; z, w) \left\{ -R^*(x_1, y) R(w, z) \right. \\
 & \left. - G(x_1, w) G^*(z, y) + G(x_1, z) G^*(w, y) \right\} \\
 & - \int dy dz dw V^*(x_1, y; z, w) \left\{ -R(y, x_2) R^*(z, w) \right. \\
 & \left. - G(w, x_2) G^*(y, z) + G(z, x_2) G^*(y, w) \right\}, \tag{1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i \frac{\partial}{\partial t} R(x_1, x_2) = & \int dz T(x_2; z) R(x_1, z) + \int dz T(x_1; z) R(z, x_2) \\
 & + \int dz dw V(x_1, x_2; z, w) R(z, w) \\
 & + \int dy dz dw V(x_2, y; z, w) \left\{ -G^*(x_1, y) R(w, z) \right. \\
 & \left. - G^*(z, y) R(x_1, w) + G^*(w, y) R(x_1, z) \right\} \\
 & + \int dy dz dw V(x_1, y; z, w) \left\{ -G(y, x_2) R(z, w) \right. \\
 & \left. - G(y, z) R(w, x_2) + G(y, w) R(z, x_2) \right\}, \tag{2}
 \end{aligned}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-01198.

где G, R – неизвестные функции, $x_1, x_2, y, z, w \in \mathcal{M}$, $\mathcal{M}$ – пространство с мерой, $t \in \mathbb{R}$; у функций G и R опущен аргумент t , $T(x; y)$, $V(x, y; z, w)$ – заданные обобщенные функции, удовлетворяющие условиям

$$T(x; y) = T^*(y; x), \\ V(x, y; z, w) = V(y, x; w, z) = V^*(z, w; x, y).$$

Частный случай уравнений (1), (2) хорошо известен в физической литературе: если наложить на функции $G(x, y)$ и $R(x, y)$ дополнительные условия

$$G(x, y) = G^*(y, x), \quad R(x, y) = -R(y, x),$$

то уравнения (1), (2) переходят в уравнения, следующие из вариационного принципа Боголюбова для фермионов [1]. Функция $T(x; y)$ имеет смысл интегрального ядра гамильтониана отдельной частицы $\hat{T}$, а функция $V(x, y; z, w)$ – интегрального ядра оператора парного взаимодействия между частицами $\hat{V}$:

$$\hat{T}\psi(x) = \int dz T(x; z)\psi(z), \quad \hat{V}\Psi(x, y) = \int dz dw V(x, y; z, w)\Psi(z, w).$$

В работе [2] была дана новая интерпретация уравнений (1), (2) как системы уравнений нестандартных характеристик *фермионного осредненного оператора*, отвечающего набору операторов

$$\hat{\mathcal{H}}_N = \sum_{j=1}^N \hat{T}_{x_j} + \sum_{1 \leq j < k \leq N} \hat{V}_{x_j x_k}, \quad (3)$$

где $\hat{\mathcal{H}}_N$ действуют в пространстве функций $\psi_N(x_1, \dots, x_N) \in L^2(\mathcal{M} \times \dots \times \mathcal{M})$, $N \in \mathbb{N}$; индексы рядом с операторами $\hat{T}$ и $\hat{V}$ обозначают переменные, по которым они применяются. Примерами операторов вида (3) являются оператор Шрёдингера [3] и оператор Лиувилля [4] для системы из N тождественных попарно взаимодействующих частиц. Там же было показано, что в частном случае, когда

$$T(x; y) = \left(-\frac{1}{2}\Delta + u(x) \right) \delta(x - y), \quad (4)$$

$$V(x, y; z, w) = V(x - y)\delta(x - z)\delta(y - w), \quad (5)$$

где u и V – заданные действительные функции, для уравнений (1), (2) удается найти пару Лакса [5]. Оказывается, что пара Лакса существует и в общем случае. Обозначим

$$H(x; y) = T(x; y) + \int dz dw \left(V(x, z; y, w) - V(x, z; w, y) \right) G(z, w), \\ B(x; y) = \int dz dw V(x, y; z, w) R(z, w).$$

ТЕОРЕМА. *Коммутатор матриц*

$$A = \begin{pmatrix} \hat{G} - 1/2 & -\hat{R}^* \\ \hat{R} & -\hat{G}^* + 1/2 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} \hat{H}^* & -\hat{B}^* \\ \hat{B} & -\hat{H} \end{pmatrix},$$

где $\hat{G}$, $\hat{R}$, $\hat{H}$ и $\hat{B}$ – операторы, задаваемые интегральными ядрами G , R , H и B соответственно, имеет вид

$$[A, L] = \begin{pmatrix} \hat{\alpha} & \hat{\beta}^* \\ \hat{\beta} & \hat{\alpha}^* \end{pmatrix},$$

где интегральное ядро $\hat{\alpha}$ совпадает с правой частью (1), а интегральное ядро $\hat{\beta}$ совпадает с правой частью (2); звездочка обозначает комплексное сопряжение.

При исследовании конкретных физических задач достаточно часто встречается ситуация подобная (4), (5), когда функции T и V зависят по части из аргументов как от разностей:

$$T(x; y) = T_0(x' - y', \xi; \eta), \\ V(x, y; z, w) = V_0(x' - y', x' - z', y' - w', \xi, \eta; \zeta, \omega),$$

где $x = (x', \xi)$, $y = (y', \eta)$, $z = (z', \zeta)$, $w = (w', \omega)$, $x', y', z', w' \in \mathbb{R}^d$, $\xi, \eta, \zeta, \omega \in \mathcal{N}$, $\mathcal{M} = \mathbb{R}^d \times \mathcal{N}$. В этом случае, в уравнениях (1), (2) можно провести подстановку

$$G(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int dp G_p(\xi, \eta) e^{ip(x' - y')}, \\ R(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int dp R_p(\xi, \eta) e^{ip(x' - y')},$$

где $p \in \mathbb{R}^d$, и перейти от исходных уравнений к более простым уравнениям на $G_p(\xi, \eta)$ и $R_p(\xi, \eta)$. Обозначим

$$H_p(\xi; \eta) = \tilde{T}(p, \xi; \eta) + \int dq d\zeta d\omega \left(\tilde{V}(0, p, -q, \xi, \zeta; \eta, \omega) \right. \\ \left. - \tilde{V}(q + p, -q, p, \xi, \zeta; \omega, \eta) \right) G_q(\zeta, \omega), \\ B_p(\xi; \eta) = \int dq d\zeta d\omega \tilde{V}(p - q, q, -q, \xi, \eta; \zeta, \omega) R_q(\zeta, \omega),$$

где

$$\tilde{T}(p, \xi; \eta) = \int dy' T_0(y', \xi; \eta) e^{-ipy'}, \\ \tilde{V}(p, k, q, \xi, \eta; \zeta, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int dy' dz' dw' V_0(y', z', w', \xi, \eta; \zeta, \omega) e^{-i(py' + kz' + qw')}.$$

Из приведенной теоремы следует, что для системы уравнений для $G_p(\xi, \eta)$ и $R_p(\xi, \eta)$ также существует пара Лакса.

СЛЕДСТВИЕ. Матрица

$$A_p = \begin{pmatrix} \hat{G}_p - 1/2 & -\hat{R}_{-p}^* \\ \hat{R}_p & -\hat{G}_{-p}^* + 1/2 \end{pmatrix},$$

где $\hat{G}_p$ и $\hat{R}_p$ — операторы, задаваемые интегральными ядрами $G_p(\xi; \eta)$ и $R_p(\xi; \eta)$ соответственно, удовлетворяет уравнению

$$i \frac{d}{dt} A_p = [A_p, L_p],$$

где

$$L_p = \begin{pmatrix} \hat{H}_p^* & -\hat{B}_{-p}^* \\ \hat{B}_p & -\hat{H}_{-p} \end{pmatrix},$$

$\hat{B}_p$ и $\hat{H}_p$ — операторы, задаваемые интегральными ядрами $B_p(\xi; \eta)$ и $H_p(\xi; \eta)$ соответственно.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боголюбов Н. Н. // Докл. АН СССР. 1958. Т. 119. № 2. С. 244–246. 2. Маслов В. П. // Функцион. анализ и его прилож. 1999 (в печати). 3. Ландау Л. Д., Лифшиц И. М. Квантовая механика. М.: Физматгиз, 1963. 4. Ландау Л. Д., Лифшиц И. М. Механика. М.: Физматгиз, 1958. 5. Манин Ю. И. // Алгебраические аспекты нелинейных дифференциальных уравнений Современные проблемы математики. Т. 11. М.: ВИНТИ, 1978. С. 5–152.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
16.09.1999