Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. П. Фадеев, Многочлены, ортогональные на двух симметричных промежутках, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 5, 796–800

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1224>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 17:57:25

МНОГОЧЛЕНЫ, ОРТОГОНАЛЬНЫЕ НА ДВУХ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОМЕЖУТКАХ

Н. П. Фадеев

Пусть $\varphi_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) – алгебраические многочлены, ортогональные относительно четной весовой функции $\rho(x)$ на множестве

$$E = [-b, -a] \cup [a, b], \quad (1)$$

где $0 \leq a < b \leq +\infty$ и

$$\frac{\rho'(x)}{\rho(x)} = \frac{R_4(x)}{R_5(x)}, \quad V(x) = \frac{\rho(x)}{x^3} R_5(x), \quad V(\pm a) = V(\pm b) = 0, \quad (2)$$

$$D(x) = \frac{R_4(x) + R_5'(x) - \frac{2R_5(x)}{x}}{x^2} \quad (3)$$

– целая относительно x функция, где $R_k(x)$ ($k = 4, 5$) – многочлен степени не выше k .

При любом натуральном m функция

$$\rho_m(x) = \left(\frac{R_5(x)}{x} \right)^m \rho(x) \quad (4)$$

удовлетворяет на множестве (1) условиям (2), (3).

ЛЕММА 1. При любом натуральном m многочлены $D^m \varphi_{2n}(x)$ ($n = m, m+1, \dots$), где

$$Df = \frac{f'}{x}, \quad (5)$$

ортогональны на множестве (1) относительно веса (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что в соответствии с определением ортогональных многочленов [1] при $m = 1$ и $2 \leq k \leq 2n - 1$

$$I_k = \int_E \rho_1(x) (D\varphi_{2n}) x^{k-2} dx = 0.$$

Действительно, пользуясь равенством (5) и после интегрирования по частям с условиями (2), (3), получим $I_k = 0$. Для завершения доказательства леммы достаточно воспользоваться индукцией по m .

ТЕОРЕМА 1. При любом $m = 0, 1, 2, \dots$ многочлены $D^m \varphi_{2n}(x)$ ($n = m, m+1, \dots$) являются частными решениями дифференциального уравнения

$$R_5(x) y'' + \left[R_4(x, m) + R_5'(x) - \frac{3R_5(x)}{x} \right] y' - \gamma_{n,m} x^3 y = 0, \quad (6)$$

где

$$R_4(x, m) = R_4 + m \left(R_5' - \frac{R_5}{x} \right), \quad \gamma_{n,m} = 2n[r_0^{(4)}(m) + (2n+1)r_0^{(5)}],$$

$r_0^{(4)}(m)$ – коэффициент при x^4 многочлена $R_4(x, m)$, $r_0^{(4)}(0) = r_0^{(4)}$, $r_0^{(5)}$ – коэффициент при x^5 многочлена $R_5(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для случая $m = 0$ теорема доказана в [2]. Доказательство общего случая сводится к замене веса $\rho(x)$ на вес (4) и $R_4(x)$ на $R_4(x, m)$.

ТЕОРЕМА 2. Если четная весовая функция $\rho(x)$ удовлетворяет на множестве (1) условиям (2), (3), то при $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\varphi_{2n}(x) = k_n \frac{x}{\rho(x)} D^n \left[\rho(x) \frac{R_5^n(x)}{x^{n+1}} \right], \quad (7)$$

где k_n – постоянный (стандартизирующий) множитель.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что

$$P_{2n}(x) = \frac{x}{\rho(x)} D^n \left[\rho(x) \frac{R_5^n(x)}{x^{n+1}} \right]$$

является четным многочленом степени $2n$.

Действительно,

$$D \left(\rho \frac{R_5^n}{x^{n+1}} \right) = \rho(x) \frac{R_5^{n-1}(x)}{x^n} Q_{2n,2}(x),$$

где $Q_{2n,2}(x)$ – четный многочлен степени 2.

Математической индукцией с применением условий (2), (3) легко показать, что

$$D^k \left(\rho \frac{R_5^n}{x^{n+1}} \right) = \rho(x) \frac{R_5^{n-k}}{x^{n-k+1}} Q_{2n,2k}, \quad (8)$$

где $Q_{2n,2k}(x)$ – четный многочлен степени $2k$.

При $k = n$ получим

$$D^n \left(\rho \frac{R_5^n}{x^{n+1}} \right) = \frac{\rho}{x} Q_{2n,2n},$$

где $Q_{2n,2n}(x)$ – четный многочлен степени $2n$.

Учитывая определение ортогонального многочлена, осталось показать, что при $k = 0, 1, 2, \dots, 2n - 1$

$$I_k = \int_E \rho(x) P_{2n}(x) x^k dx = 0.$$

Применяя последовательно формулу интегрирования по частям и учитывая равенство (8) и условия (2), (3), получим $I_k = 0$. Откуда в силу известной теоремы единственности системы ортогональных многочленов [1] следует заключение теоремы 2.

Пусть

$$\psi_{2n}(x) = \frac{x}{\rho(x)} D^n \left[\rho(x) \frac{R_5^n}{x^{n+1}} \right]. \quad (9)$$

ТЕОРЕМА 3. При $n = 0, 1, 2, \dots$

$$I = \int_E \rho \psi_{2n}^2 dx = (-1)^n 2^n n! a_{2n} \int_E \rho \left(\frac{R_5}{x} \right)^n dx, \quad (10)$$

где a_{2n} – старший коэффициент многочлена $\psi_{2n}(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$U(x) = \rho(x) \frac{R_5^n(x)}{x^{n+1}}, \quad V(x) = \psi_{2n}(x). \quad (11)$$

Тогда

$$I = (D^{n-1}U)V|_{\partial E} - \int_E (D^{n-1}U)V' dx,$$

где $\partial E = \{-b, -a, a, b\}$. В силу условий (2), (3) и равенства (8) внеинтегральный член равен 0.

Повторяя проделанные операции, получим

$$I = (-1)^n \int_E x U D^n V dx. \quad (12)$$

Вместе с тем

$$D^n V = D^n \psi_{2n} = 2^n n! a_{2n}. \quad (13)$$

Для завершения доказательства теоремы осталось сопоставить равенства (10)–(13).

ТЕОРЕМА 4. Многочлены $\psi_{2n}(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) являются решениями интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$\frac{\psi_{2n}(x)}{U(x)} = c_1 x^{3/2} + \frac{c_2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_{x_0}^x (x^2 - t^2) t^{3/2} R(t) \frac{\psi_{2n}(x)}{U(t)} dt,$$

где

$$U(x) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int P(x) dx\right), \quad P(x) = \frac{x^2 D(x)}{R_5(x)} - \frac{1}{x}, \quad D(x) = \frac{R_4 + R'_5 - \frac{2R_5}{x}}{x^2},$$

c_1, c_2 – произвольные постоянные, x_0 – фиксированная точка,

$$R(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 D(x)}{R_5(x)} \right)' + \frac{1}{4} \left(\frac{x^2 D(x)}{R_5(x)} \right)^2 - \frac{x D(x)}{2R_5(x)} - \frac{\gamma_n x^3}{R_5(x)}. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $m = 0$ дифференциальное уравнение (6) после деления его на $R_5(x)$ принимает вид

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \quad P(x) = \frac{x^2 D(x)}{R_5(x)} - \frac{1}{x}, \quad Q(x) = -\frac{\gamma_n x^3}{R_5(x)}, \quad (15)$$

где первая дробь в выражении $P(x)$ не выделяет слагаемого, содержащего x^{-1} .

Известно [3], что в уравнении (15) подстановкой

$$y(x) = U(x)z(x)$$

можно уничтожить член, содержащий y' . Тогда

$$U = \exp\left(-\frac{1}{2} \int P(x) dx\right), \quad z'' + \left[-\frac{1}{2}P'(x) - \frac{1}{4}P^2(x) + Q(x)\right]z = 0.$$

В нашем случае

$$U(x) = \exp\left[-\frac{1}{2} \int \left(\frac{x^2 D(x)}{R_5(x)} - \frac{1}{x}\right) dx\right], \quad x^2 z'' - \left(\frac{3}{4} + x^2 R(x)\right)z = 0, \quad (16)$$

где $R(x)$ имеет вид (14).

Последнее дифференциальное уравнение можно формально записать как неоднородное.

Тогда, как известно [3], если $z_1(x), z_2(x)$ – фундаментальная система частных решений соответствующего однородного уравнения, то общее решение уравнения (16) имеет вид

$$z = C_1 z_1(x) + C_2 z_2(x) + \int_{x_0}^x \frac{z_1(x)z_2(t) - z_1(t)z_2(x)}{z_1'(t)z_2(t) - z_1(t)z_2'(t)} z(t)t^2 R(t) dt.$$

Учитывая обозначения, введенные в начале доказательства, и то, что в нашем случае

$$z_1 = x^{3/2}, \quad z_2 = x^{-1/2},$$

получим интегральное уравнение теоремы 4.

Условием (2), (3) удовлетворяет на множестве

$$E = [-1, -\gamma] \cup [\gamma, 1] \quad (17)$$

весовая функция

$$\rho(x, \alpha, \beta, \gamma) = |x|(1 - x^2)^\alpha (x^2 - \gamma^2)^\beta, \quad (18)$$

где $\alpha > -1, \beta > -1, 0 \leq \gamma < 1$.

В соответствии с теоремой 1 многочлены $\varphi_{2n}(x, \alpha, \beta, \gamma)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) являются частными решениями дифференциального уравнения (6) ($m = 0$).

ТЕОРЕМА 5. Если $q = \max\{\alpha, \beta\} \geq -1/2$, то максимум абсолютного значения многочлена $\tilde{\varphi}_{2n}(x, \alpha, \beta, \gamma)$ достигается на множестве E в одной из его граничных точек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $y = \tilde{\varphi}_{2n}(x, \alpha, \beta, \gamma)$. Так как $y(x)$ – функция четная, достаточно изучить ее поведение на отрезке $[\gamma, 1]$. Рассмотрим функцию [4]

$$U = y^2 - \frac{R_5(x)}{\gamma x^3} (y')^2. \quad (19)$$

Дифференцируя это равенство, получим

$$U' = 2yy' - \frac{R_5' - 3x^{-1}R_5}{\gamma n x^3} (y')^2 - \frac{R_5}{\gamma n x^3} 2y'y''.$$

Так как многочлен $\tilde{\varphi}_{2n}(x, \alpha, \beta, \gamma)$ является решением дифференциального уравнения (6), то

$$U' = \frac{2R_4 + R_5' - 3x^{-1}R_5}{\gamma n x^3} (y')^2$$

или (см. условие (2) и вес (18))

$$U' = \frac{2(\alpha + \beta + 1)x^2 - (2\alpha + 1)\gamma^2 - 2\beta - 1}{2n(\alpha + \beta + n + 1)x} (y')^2. \quad (20)$$

Рассмотрим пока случай, когда

$$\alpha > -\frac{1}{2}, \quad \beta > -\frac{1}{2}.$$

Тогда последнее равенство можно записать в виде

$$U' = \frac{\alpha + \beta + 1}{n(\alpha + \beta + n + 1)x} (x^2 - x_0^2)(y')^2, \quad (21)$$

где

$$x_0 = \left(\frac{(2\alpha + 1)\gamma^2 + 2\beta + 1}{2(\alpha + \beta + n + 1)} \right)^{1/2}.$$

Точка x_0 находится внутри интервала $]\gamma, 1[$, так как $0 < \gamma < 1$. Из равенства (21) видно, что производная $U'(x)$ меняет знак в точке x_0 , причем на интервале $]\gamma, x_0[$ она отрицательна, а на

интервале $]x_0, 1[$ — положительна. Следовательно, функция $U(x)$, определяемая равенством (19), убывает на интервале $] \gamma, x_0[$ и возрастает на интервале $]x_0, 1[$. Из равенства (19) следует, что функция $U(x)$ положительна в интервале $] \gamma, 1[$. Поэтому

$$U(x) \leq U(\gamma), \quad x \in] \gamma, x_0[; \quad U(x) \leq U(1), \quad x \in]x_0, 1[.$$

Из равенства (19) ($y = \tilde{\varphi}_{2n}(x, \alpha, \beta, \gamma)$) следует, что

$$\tilde{\varphi}_{2n}^2(x, \alpha, \beta, \gamma) \leq U(x), \quad \tilde{\varphi}_{2n}^2(\gamma, \alpha, \beta, \gamma) = U(\gamma), \quad \tilde{\varphi}_{2n}^2(1, \alpha, \beta, \gamma) = U(1).$$

Из последних пяти соотношений видим, что

$$\begin{aligned} |\tilde{\varphi}_{2n}(x, \alpha, \beta, \gamma)| &\leq |\tilde{\varphi}_{2n}(x, \alpha, \beta, \gamma)|, & x \in [\gamma, x_0], \\ |\tilde{\varphi}_{2n}(x, \alpha, \beta, \gamma)| &\leq |\tilde{\varphi}_{2n}(x, \alpha, \beta, \gamma)|, & x \in [x_0, 1]. \end{aligned}$$

При $\alpha \geq -1/2$, $-1 < \beta \leq -1/2$ и при $-1 < \alpha \leq -1/2$, $\beta \geq -1/2$ рассуждения аналогичны. Приведенные рассуждения теряют смысл, если $\alpha = \beta = -1/2$. Однако нетрудно показать, что в этом случае многочлены $\tilde{\varphi}_{2n}(x, \alpha, \beta, \gamma)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) равномерно ограничены.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979. 2. Фадеев Н. П. // Изв. вузов. Матем. 1979. № 5(168). С. 99–103. 3. Сегё Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. 4. Сонин Н. Я. Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах. М.: Гостехиздат, 1954.

Мордовский государственный педагогический институт
им. М. Е. Евсевьева, г. Саранск
E-mail: mgpi@si.moris.ru

Поступило
07.05.99