Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Андреев, Об определимых предикатах стандартности в теории внутренних множеств, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 6, 803–809

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1225>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 09:50:22

УДК 510.6

ОБ ОПРЕДЕЛИМЫХ ПРЕДИКАТАХ СТАНДАРТНОСТИ В ТЕОРИИ ВНУТРЕННИХ МНОЖЕСТВ

П. В. Андреев

Доказывается, что в **IST** – теории внутренних множеств Нельсона – не существует определимого предиката, являющегося собственным расширением предиката стандартности и удовлетворяющего принципам переноса, идеализации и стандартизации.

Библиография: 15 названий.

В различных аксиоматиках нестандартной теории множеств из универсума всех множеств выделяется собственный подкласс стандартных множеств. Это осуществляется либо посредством добавления специального одноместного предиката st к обычному языку формальной теории множеств и формулированием аксиом, описывающих свойства этого предиката, либо этот класс определяется средствами теории множеств, а его свойства доказываются в соответствующей формальной системе. Первый подход представлен аксиоматическими системами Нельсона, Хрбачека, Каваи и Кановея. Подробный обзор содержится в монографии [1], где также обсуждаются математические и философские представления, лежащие в основе свойств, характеризующих стандартные множества. Второй подход применяется в альтернативной теории множеств П. Вopenки [2], а также в работе [3].

Наиболее распространенной в настоящее время аксиоматической системой нестандартной теории множеств является теория внутренних множеств Э. Нельсона **IST** (см. [4]), которая получена добавлением к языку теории множеств Цермело–Френкеля одноместного предиката стандартности st , а к системе аксиом **ZFC** трех дополнительных принципов (схем аксиом).

ПЕРЕНОС Т. $\exists x \phi(x) \longrightarrow \exists^{st} x \phi(x)$, где ϕ – внутренняя формула со стандартными параметрами.

ИДЕАЛИЗАЦИЯ I. $\forall^{st \text{ fin}} A \exists x \forall a \in A \phi(x, a) \longleftrightarrow \exists x \forall^{st} a \phi(x, a)$, где ϕ – внутренняя формула.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-00045.

СТАНДАРТИЗАЦИЯ $S. \forall^{st} X \exists^{st} Y \forall^{st} z (x \in Y \longleftrightarrow x \in X \ \& \ \Phi(x))$, где Φ – произвольная формула языка **IST**.

Здесь запись вида $\forall^{st} x \Psi$, где Ψ – формула языка **IST**, есть сокращение для формулы $\forall x (st\ x \longrightarrow \Psi)$; $\forall^{st\ fin} x \Psi$ есть сокращение для $\forall x (st\ x \ \& \ fin\ x \longrightarrow \Psi)$, где $fin\ x$, в свою очередь, обозначает формулу, выражающую свойство x быть конечным множеством. Аналогично запись $\exists^{st} x \Psi$ есть сокращение для формулы $\exists x (st\ x \ \& \ \Psi)$. Формула называется *внутренней*, если она не содержит предиката st .

В связи с исследованием аксиоматических систем нестандартной теории множеств и, в частности, вопросов независимости представляет интерес изучение определимых в этих системах классов, являющихся собственными расширениями класса стандартных множеств и обладающих различными свойствами последнего. Так, например, в работе [5] построено семейство определимых в **IST** классов, каждый из которых является расширением класса стандартных множеств и удовлетворяет аксиомам переноса и идеализации. Там же доказано существование класса из этого семейства, для которого не выполнен принцип стандартизации. Таким образом, была доказана независимость аксиом стандартизации от остальных аксиом **IST**. Упомянутое семейство классов задается двместным рефлексивным транзитивным предикатом относительной стандартности $\cdot st \cdot$, определяемым формулой

$$x\ st\ y \stackrel{\text{def}}{\longleftrightarrow} \exists^{st} f \in \text{Fnc} (\text{fin}\ f(x) \ \& \ y \in f(x)),$$

где x и y – произвольные множества, а Fnc – класс всех функций. Каждый класс семейства имеет вид $S_\tau = \{x : x\ st\ \tau\}$, где τ есть некоторое *ограниченное* (содержащееся в известном стандартном) множество.

Изначально исследование предиката относительной стандартности было стимулировано часто возникающей в нестандартном анализе необходимостью в рассмотрении нестандартных объектов аналогично стандартным, в перенесении понятий и техники, применяемых для стандартных объектов, на нестандартные.

Примеры использования предиката относительной стандартности в **IST** можно найти в книге [6]. В рамках робинсоновского нестандартного анализа соответствующая техника развита в работах [7]–[9], где приведены многочисленные применения этой техники (см. также [10]). В альтернативной теории множеств было введено понятие сдвигов горизонта (см. [11]).

Нарушение принципа стандартизации для предиката относительной стандартности Е. И. Гордона ограничивает возможности его применения для исследования нестандартных объектов в **IST**. В теории **RIST** И. Перэра (см. [12]) *аксиоматически* вводится рефлексивный транзитивный предикат относительной стандартности $\cdot SR \cdot$. При этом для любых множеств x и y либо $x\ SR\ y$, либо $y\ SR\ x$, и каждый класс вида $SR_\alpha = \{x : x\ SR\ \alpha\}$ подчиняется принципам переноса, идеализации и стандартизации. Роль класса стандартных множеств в этой теории выполняет класс $SR_0 = \{x : \forall \alpha (x\ SR\ \alpha)\}$. В связи с этим возникает вопрос о возможности *определения* предиката со свойствами, подобными свойствам предиката SR , формулой **IST**.

В. Г. Кановой высказал предположение о том, что ответ на этот вопрос отрицательный. Он сформулировал более общую гипотезу: не существует определимого в **IST** предиката, расширяющего “обычный” предикат стандартности и обладающего всеми его

свойствами. В настоящей работе эта гипотеза доказывается при некоторых дополнительных условиях.

Пусть std – одноместный предикат, *определимый* в **IST**, т.е. $\text{std } x \stackrel{\text{def}}{\longleftrightarrow} \Phi(x)$, где Φ – формула языка **IST** с параметрами. Пусть Ψ есть некоторое предложение языка **IST**, возможно, с параметрами. Будем говорить, что *предикат* std *удовлетворяет* Ψ , если истинно предложение $\Psi[\text{std}]$, полученное заменой всех вхождений st в Ψ на std .

Утверждение, которое мы докажем, теперь можно сформулировать так: не существует определимого в **IST** предиката, являющегося собственным расширением предиката стандартности st и удовлетворяющего принципам переноса, идеализации и стандартизации. Упомянутые выше дополнительные условия таковы.

Во-первых, доказательство проводится в теории **BST** (см. [13], [14]), которая аксиоматизирует класс $\{x : \exists^{\text{st}} X (x \in X)\}$ ограниченных множеств теории **IST**. Эта теория удобна для приложений, поскольку классы в **BST** имеют регулярную структуру. Теорема остается справедливой и в **IST**, если формула, задающая “новый” предикат стандартности std , является ext -ограниченной (содержит st только в составе кванторов вида $\exists^{\text{st}} x \in X$, $\forall^{\text{st}} x \in X$, где X – стандартное множество) и имеет ограниченные параметры.

Теория **BST** имеет тот же язык и содержит те же аксиомы, что и **IST**, за исключением идеализации **I**, которая заменена на *ограниченную идеализацию*, и одной дополнительной аксиомы *ограниченности*.

ОГРАНИЧЕННАЯ ИДЕАЛИЗАЦИЯ BI. $\forall^{\text{st}} \text{fin } A \subseteq A_0 \exists x \forall a \in A \phi(x, a) \longleftrightarrow \exists x \forall^{\text{st}} a \in A_0 \phi(x, a)$, где ϕ – внутренняя формула и A_0 – произвольное стандартное множество.

ОГРАНИЧЕННОСТЬ B. $\forall x \exists^{\text{st}} X (x \in X)$.

Понятия и соглашения, принятые нами для **IST**, остаются в силе и для **BST**. *Стандартным приближением* ${}^{\text{st}}X$ класса X назовем стандартное множество, содержащее те же стандартные элементы, что и X . Таким образом, принцип стандартизации утверждает наличие стандартного приближения для всякого класса, включенного в некоторое стандартное множество. Через ${}^{\circ}X$ будем обозначать класс $\{x \in X : \text{st } x\}$ стандартных элементов X .

Вторым дополнительным условием является предположение о существовании std -стандартного, но нестандартного натурального числа. Следующее предложение показывает, что это условие не является сильным ограничением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (BST). Пусть x есть нестандартное множество такое, что для всякой стандартной функции f , содержащей x в области определения, множество $f(x)$ стандартно, если $f(x) \in \omega$. Тогда всякое стандартное множество $X \ni x$ имеет мощность, которая является измеримым кардиналом.

Если предикат std расширяет st и удовлетворяет принципу переноса, то для любого x и любой стандартной функции f из $\text{std } x$ следует $\text{std } f(x)$. Поэтому если не существует std -стандартных нестандартных натуральных чисел, то по предложению 1 std совпадает с st на элементах любого множества неизмеримой мощности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Пусть $X \ni x$ – стандартное множество. Положим $U = {}^s\{Y \subseteq X : x \in Y\}$. По принципу переноса U является неглавным ультрафильтром на X . Пусть $\{A_i : i \in \omega\}$ – произвольное стандартное счетное разбиение X . Оно задает функцию $f: X \rightarrow \omega$ по правилу $f(y) = i \iff y \in A_i$. По условию для некоторого стандартного $i_0 \in \omega$ имеем $f(x) = i_0$. Согласно принципу переноса множество A_{i_0} стандартно. Кроме того, $A_{i_0} \in U$ по выбору f и U . Снова применяя принцип переноса, получаем, что всякое счетное разбиение множества X имеет член, принадлежащий U . Поэтому ультрафильтр U является счетно полным, и мощность X измерима.

Ниже формулу Ψ будем называть *std- $\in$ -формулой*, если она содержит предикат std только в составе подформул вида $\text{std } x$. Классы, определяемые *std- $\in$ -формулами*, будем называть *std- $\in$ -определимыми*.

ТЕОРЕМА 1 (BST). Пусть определимый одноместный предикат std обладает следующими свойствами:

- 1) $\forall x (\text{st } x \longrightarrow \text{std } x)$;
- 2) *std-перенос*: $\forall^{\text{std}} x \phi(x) \longrightarrow \forall x \phi(x)$ для любой внутренней формулы ϕ с *std-стандартными параметрами*;
- 3) *std-идеализация*: $\forall^{\text{std}} A_0 (\forall^{\text{std fin}} A \subseteq A_0 \exists x \forall a \in A \phi(x, a) \iff \exists x \forall^{\text{std}} a \in A_0 \phi(x, a))$ для внутренних формул ϕ с произвольными параметрами;
- 4) $\exists n \in \omega (\text{std } n \ \& \ \neg \text{st } n)$.

Тогда существует множество X такое, что

$$\neg \exists^{\text{std}} Y \forall^{\text{std}} x (x \in X \iff x \in Y).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сечением в множестве натуральных чисел называется класс $\mathbf{C} \subseteq \omega$, для которого из $n \in \mathbf{C}$ следует $n \subseteq \mathbf{C}$. Для любого класса $\mathbf{X} \subseteq \omega$ через $\tilde{\mathbf{X}}$ будем обозначать наименьшее сечение, содержащее $\mathbf{X}$.

Положим $\text{Std}_\omega = \{k \in \omega : \text{std } k\}$. Доказательство в **BST** того факта, что все элементы любого стандартного конечного множества стандартны, использует только принцип переноса и принцип идеализации (а именно, импликацию справа налево; см. [13]), поэтому соответствующий факт имеет место и для предиката std . Отсюда следует, что Std_ω есть сечение, причем по *std-идеализации* $\text{Std}_\omega \neq \omega$. По свойству *std-переноса* Std_ω не может быть множеством.

Сначала мы покажем, что Std_ω является Π_1^{st} - или Σ_1^{st} -классом.

ЛЕММА 1. Имеются только две взаимоисключающие возможности:

- 1) $\exists^{\text{st}} B \exists \mu: B \rightarrow \omega (\text{Std}_\omega = \bigcap_{b \in {}^\circ B} \mu(b))$;
- 2) $\exists^{\text{st}} A \exists \nu: A \rightarrow \omega (\text{Std}_\omega = \bigcup_{a \in {}^\circ A} \nu(a))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В **BST** любой подкласс множества может быть определен *ext-ограниченной Σ_2^{st} -формулой* (см. [13], [15]). Поэтому Std_ω представим в виде

$$\text{Std}_\omega = \bigcup_{a \in {}^\circ A} \bigcap_{b \in {}^\circ B} M_{ab},$$

где множества A и B стандартны и M есть внутренняя функция двух аргументов. Положим

$$\mathbf{C}_a = \bigcap_{b \in {}^\circ B} M_{ab}.$$

Имеем

$$\text{Std}_\omega = \bigcup_{a \in {}^\circ A} \mathbf{C}_a = \bigcup_{a \in {}^\circ A} \tilde{\mathbf{C}}_a.$$

Для любого $n \in \omega$ с помощью идеализации получаем

$$\begin{aligned} n \in \tilde{\mathbf{C}}_a &\longleftrightarrow \exists k > n \forall^{\text{st}} b \in B (k \in M_{ab}) \\ &\longleftrightarrow \forall^{\text{st fin}} B_0 \subseteq B \exists k > n \forall b \in B_0 (k \in M_{ab}). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\tilde{\mathbf{C}}_a = \bigcap_{\beta \in {}^\circ B} \tilde{M}'_{a\beta},$$

где $B = \mathcal{P}^{\text{fin}}(B)$ и $M'_{a\beta} = \bigcap_{b \in \beta} M_{ab}$.

Возможны два случая.

а) Существует стандартное $a \in A$ такое, что $\forall^{\text{st}} a' \in A (\tilde{\mathbf{C}}_{a'} \subseteq \tilde{\mathbf{C}}_a)$. Тогда $\text{Std}_\omega = \tilde{\mathbf{C}}_a$. Предполагая, что $\forall^{\text{std}} \beta \in B (\tilde{M}'_{a\beta} \neq \omega)$, и обозначая $\mu(\beta) = \max \tilde{M}'_{a\beta}$, мы получаем представление $\text{Std}_\omega = \bigcap_{\beta \in B} \mu(\beta)$.

б) $\forall^{\text{st}} a \in A \exists^{\text{st}} a' \in A (\tilde{\mathbf{C}}_a \subsetneq \tilde{\mathbf{C}}_{a'})$. В этом случае мы имеем

$$\forall^{\text{st}} a \in A \exists^{\text{st}} \beta \in B (\tilde{M}'_{a\beta} \subseteq \text{Std}_\omega).$$

Применяя стандартизацию и аксиому выбора, получаем

$$\exists^{\text{st}} f: A \rightarrow B \forall^{\text{st}} a \in A (\tilde{M}'_{a, f(a)} \subseteq \text{Std}_\omega).$$

Следовательно, $\text{Std}_\omega = \bigcup_{a \in {}^\circ A} \nu(a)$, где $\nu(a) = \max \tilde{M}'_{a, f(a)}$.

Рассмотрим отдельно каждую из возможностей, описанных в лемме 1.

1) Пусть $\text{Std}_\omega = \bigcap_{b \in {}^\circ B} \mu(b)$ для стандартного множества B и внутренней функции $\mu: B \rightarrow \omega$. Положим $\mathbf{X} = \{b \in B : \neg \text{std } \mu(b)\}$. Очевидно, $\mathbf{X} \supseteq {}^\circ B$. Пусть существует std-стандартное множество Y , имеющее те же std-стандартные элементы, что и $\mathbf{X}$. Согласно условию 1) теоремы ${}^\circ B \subseteq Y$. Тогда

$$\forall^{\text{std fin}} K \subseteq \omega \forall^{\text{std fin}} Y' \subseteq Y \exists n \in \omega \forall k \in K \forall y \in Y' (k < n < \mu(y)).$$

Далее по std-идеализации существует $n \in \omega$ такое, что

$$\forall^{\text{std}} k \in \omega (n > k) \ \& \ \forall^{\text{std}} y \in Y (n < \mu(y)).$$

С одной стороны, n должно быть std-стандартным, поскольку ${}^\circ B \subseteq Y$. С другой стороны, n std-бесконечно велико. Это противоречие доказывает, что $\mathbf{X}$ не имеет std-стандартного приближения.

В заметке [15] показано, что в теории **BST**⁻ (**BST** без схемы стандартизации) принцип стандартизации **S** эквивалентен стандартизации только для внутренних формул. Поэтому, на самом деле, можно найти множество X , не имеющее std-стандартного приближения.

2) $\text{Std}_\omega = \bigcup_{a \in {}^\circ A} \nu(a)$ для стандартного множества A и внутренней функции $\nu: A \rightarrow \omega$.

Пусть $n_0 \in \omega$ есть std-стандартное, но нестандартное натуральное число. По принципу идеализации существует строго возрастающая функция $h: n_0 \rightarrow \omega$ такая, что $\text{ran}(\nu \upharpoonright {}^\circ A) \subseteq \text{ran } h$, поскольку такая функция существует, если вместо A взять любое его стандартное конечное подмножество.

Для любого множества X обозначим через $X_\#$ функцию, определенную правилом $X_\#(n) = \max\{k : |k \cap X| = n\}$ ($X_\#(n)$ есть n -й по возрастанию элемент множества X). Таким образом, $X_\#$ есть строго возрастающая функция, $\text{dom } X_\# = |X|$.

Положим $X = \text{ran } h$. Очевидно, $h = X_\#$. Пусть Y есть std-стандартное приближение X , т.е.

$$\text{std } Y \ \& \ X \cap \text{Std}_\omega = Y \cap \text{Std}_\omega.$$

Нетрудно убедиться в том, что функции h и $Y_\#$ совпадают на любом множестве вида $\{n : h(n) < k\}$, $\text{std } k$ и, следовательно, на классе $\mathbf{X} = \{n : \text{std } h(n)\}$. Класс $Y_\#(\mathbf{X}) = h(\mathbf{X})$ кофинален с Std_ω по выбору h . Поэтому мы можем записать

$$\forall^{\text{std}} k \ \exists n < n_0 \ (Y_\#(n) > k).$$

По std-идеализации найдется $n < n_0$ такое, что $\forall^{\text{std}} k \ (Y_\#(n) > k)$. И так, число $Y_\#(n)$ является std-бесконечно большим. В то же время, n std-стандартно, так как Std_ω есть сечение, и, следовательно, по принципу std-переноса $Y_\#(n)$ также std-стандартно.

Полученное противоречие показывает, что std-стандартного приближения для X не существует.

Более того, поскольку множество X гиперконечно, мы можем указать рациональное число $r \in (0, 1)$, которое не имеет std-стандартной части. Для этого нужно в качестве дробной части двоичной дроби, представляющей r , взять индикатор $\chi: \tilde{X} \rightarrow 2$ ($\chi(n) = 1 \iff n \in X$).

Автор благодарит профессора Е. И. Гордона и профессора В. Г. Кановея за интерес к настоящей работе и помощь.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Нестандартные методы анализа. Новосибирск: Наука, 1990.
- [2] Вopenка П. Математика в альтернативной теории множеств. М.: Мир, 1983.
- [3] Ballard D., Hrbáček K. Standard foundations for nonstandard analysis // J. Symbolic Logic. 1992. V. 57. № 2. P. 741–748.
- [4] Nelson E. Internal set theory: a new approach to nonstandard analysis // Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.). 1977. V. 83. № 6. P. 1165–1198.

- [5] Гордон Е. И. Относительно стандартные элементы в теории внутренних множеств Э. Нельсона // Сиб. матем. ж. 1989. Т. 30, № 1. С. 89–95.
- [6] Gordon E. I. Nonstandard Methods in Commutative Harmonic Analysis. Providence (R.I.): Amer. Math. Soc., 1997.
- [7] Benninghofen B., Richter M. A general theory of superinfinitesimals // Fund. Math. 1987. V. 123. № 3. P. 199–215.
- [8] Stroyan K., Benninghofen B., Richter M. Superinfinitesimals in topology and functional analysis // Proc. London Math. Soc. (3). 1989. V. 5. № 1. P. 153–181.
- [9] Молчанов В. А. О применении повторных нестандартных расширений в топологии // Сиб. матем. ж. 1989. Т. 30, № 3. С. 64–71.
- [10] Гордон Е. И. Относительная стандартность и π -монады Бенингхофена–Рихтера // Оптимизация. 1990. № 48 (65).
- [11] Sochor A., Vopěnka P. Shiftings of the horizon // Comment. Math. Univ. Carolin. 1983. V. 24. P. 127–136.
- [12] Peraire Y. Théorie relative des ensembles internes // Osaka J. Math. 1992. V. 29. P. 267–297.
- [13] Кановой В. Г. Неразрешимые гипотезы в теории внутренних множеств Эдварда Нельсона // УМН. 1991. Т. 46. № 6. С. 3–50.
- [14] Kanovei V., Reeken M. Internal approach to external sets and universes. Part 1. Bounded set theory // Studia Logica. 1995. V. 55. № 2. P. 229–257.
- [15] Андреев П. В. О стандартизации в теории ограниченных множеств // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1997. № 1. С. 68–70.

Нижегородский государственный университет
E-mail: viron@redline.ru

Поступило
 18.05.98
 Исправленный вариант
 22.02.99