Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Дегтярев, В. И. Звонилов, Жесткая изотопическая классификация вещественных алгебраических кривых бистепени $(3, 3)$ на квадраках, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 6, 810–815

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1226>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 17:03:26

УДК 512.772+515.165.4

ЖЕСТКАЯ ИЗОТОПИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ БИСТЕПЕНИ $(3, 3)$ НА КВАДРИКАХ

А. И. Дегтярев, В. И. Звонилов

Жесткой изотопией неособых вещественных алгебраических кривых данной бистепени на квадрике называется путь в пространстве таких кривых. В работе получена жесткая изотопическая классификация неособых вещественных алгебраических кривых бистепени $(3, 3)$ на гиперboloиде и эллипсоиде. Перечислены также компоненты связности пространства вещественных алгебраических кривых бистепени $(3, 3)$, имеющих единственную невырожденную двойную точку или точку возврата.

Библиография: 11 названий.

1. Введение. Понятие жесткой изотопии было введено Рохлиным [1]. На проективной плоскости для неособых вещественных алгебраических кривых степени m классификация с точностью до жестких изотопий известна для $m \leq 6$ (см. [1]–[3]). На квадриках жесткие изотопии вещественных алгебраических кривых бистепеней $(m, 1)$, $(m, 2)$ изучались авторами [4], [5]; при этом для неособых кривых они получили жесткую изотопическую классификацию. Для (неособых) кривых бистепени $(3, 3)$ на квадриках классификация их вещественных схем (т.е. вещественная изотопическая классификация) была получена в работах [6], [7] (см. также [8]), а классификация их комплексных схем (вещественных схем, наделенных типом и комплексными ориентациями, см. ниже п. 2) – в [8]. В настоящей работе мы доказываем, что *неособая кривая бистепени $(3, 3)$ на гиперboloиде (на эллипсоиде) определяется с точностью до жесткой изотопии своей вещественной (комплексной) схемой* (теорема 2). В доказательстве теоремы 1 мы указываем все компоненты связности пространства кривых бистепени $(3, 3)$, имеющих единственную невырожденную двойную точку или точку возврата (см. рис. 1, 2). Мы используем подход, предложенный в [9] для получения жесткой изотопической классификации плоских вещественных кватрик.

2. Определения и обозначения. Пусть X – неособая квадрика. Комплексной частью SX поверхности X является $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$, и на X можно ввести две, с точностью до бигоморфизма, антиголоморфные инволюции с непустой вещественной частью; в результате получаются две вещественные поверхности: гиперboloид с вещественной частью $\mathbb{R}X$, гомеоморфной тору, и эллипсоид с $\mathbb{R}X \cong S^2$.

Работа второго автора выполнена при поддержке Министерства образования России (конкурс на базе С-ПбГУ), грант № 97-0-1.2-41.

Зафиксируем пару P_1, P_2 образующих квадррики X . Фундаментальные классы $[CP_1], [CP_2]$ образуют базис группы $H_2(\mathbb{C}X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Пусть A – алгебраическая кривая на X . Тогда $[CA] = m_1[CP_1] + m_2[CP_2]$ для некоторых неотрицательных целых m_1, m_2 . Пара (m_1, m_2) называется *бистепенью* кривой A . Если $[x_0 : x_1], [y_0 : y_1]$ – однородные координаты на прямых P_1, P_2 , то кривая A задается биоднородным многочленом

$$F(x_0, x_1; y_0, y_1) = \sum_{i,j=1}^{m_1, m_2} a_{ij} x_1^i x_0^{m_1-i} y_1^j y_0^{m_2-j},$$

имеющим степени однородности m_1 по x_0, x_1 и m_2 по y_0, y_1 .

На гиперboloиде антиголоморфная инволюция conj переводит каждую из четырех координат в комплексно сопряженную; поэтому кривая A вещественна тогда и только тогда, когда все a_{ij} вещественны. На эллипсоиде инволюция conj действует по формуле $([x_0 : x_1], [y_0 : y_1]) \mapsto ([\bar{y}_0 : \bar{y}_1], [\bar{x}_0 : \bar{x}_1])$, и вещественность кривой A означает, что $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ (в частности, $m_1 = m_2$).

Для указания топологии вещественной кривой на квадрике мы используем модификацию стандартной кодировки вещественных схем плоских проективных кривых (см., например, [10]). Пусть сначала (X, conj) – гиперboloид и $A \subset X$ – неособая вещественная алгебраическая кривая. Вещественная часть $\mathbb{R}A$ может иметь компоненты двух типов: стягиваемые в $\mathbb{R}X$ и нестягиваемые; стягиваемые компоненты называются *о-валами*. Число овалов обозначается через l , число нестягиваемых компонент – через h . Каждый овал ограничивает топологический диск в $\mathbb{R}X$, называемый *внутренностью* овала. Фундаментальные классы $[\mathbb{R}P_1], [\mathbb{R}P_2]$, наделенные некоторыми (фиксированными) ориентациями, образуют базис группы $H_1(\mathbb{R}X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Все нестягиваемые компоненты $N_1, \dots, N_h$ реализуют один и тот же ненулевой класс (c_1, c_2) в $H_1(\mathbb{R}X)$, где c_1, c_2 взаимно просты. Вещественная схема кривой $\mathbb{R}A \subset \mathbb{R}X$ кодируется следующим образом:

$$\langle (c_1, c_2), \text{scheme}_1, (c_1, c_2), \text{scheme}_2, \dots, (c_1, c_2), \text{scheme}_h \rangle,$$

где $\text{scheme}_1, \dots, \text{scheme}_h$ – схемы расположения овалов, лежащих в связных компонентах поверхности $\mathbb{R}X \setminus (N_1 \cup \dots \cup N_h)$ (ср. с [10], [8]).

Если (X, conj) – эллипсоид, то все компоненты кривой $\mathbb{R}A$ являются овалами; их число обозначается через l . В этом случае мы фиксируем точку $\infty \in \mathbb{R}X \setminus \mathbb{R}A$, называемую *внешней*, и для овала $C \subset \mathbb{R}X$ определяем его *внутренность* как компоненту поверхности $\mathbb{R}X \setminus C$, не содержащую ∞ . При этом на множестве овалов возникает естественный частичный порядок, и схема расположения овалов кодируется так же, как в [10].

Согласно Ф. Клейну (см. [11] или [1]) вещественная кривая A принадлежит типу I или типу II в зависимости от того, разбивает $\mathbb{R}A$ комплексификацию CA или нет. Если A принадлежит типу I, естественные ориентации компонент U и V пространства $CA \setminus \mathbb{R}A$ дают две противоположные ориентации кривой $\mathbb{R}A = \partial U = \partial V$; они называются *комплексными ориентациями*. Вещественная схема, наделенная типом и, в случае типа I, комплексными ориентациями, называется *комплексной схемой*. Если нужно указать тип кривой с вещественной схемой $\langle B \rangle$, используются обозначения $\langle B \rangle_I$ и $\langle B \rangle_{II}$.

Все вещественные кривые бистепени (m, n) образуют пространство $C_{m,n} \cong \mathbb{RP}^N$ с $N = mn + m + n$. Множество $\Delta \subset C_{m,n}$ особых кривых имеет размерность $N - 1$. Обозначим через $S \subset \Delta$ подмножество кривых, имеющих особую точку, отличную от

невырожденной двойной точки или точки возврата, или имеющих несколько особых точек. Множество $\Delta \setminus S$ является топологическим многообразием (хотя и не гладким подмногообразием в $C_{m,n}$). Жестким изотопическим классом кривой $A \in C_{m,n} \setminus \Delta$ (или $A \in \Delta \setminus S$) называется компонента пространства $C_{m,n} \setminus \Delta$ (соответственно $\Delta \setminus S$), содержащая A . Компоненты пространства $C_{m,n} \setminus \Delta$ (соответственно $\Delta \setminus S$) называются *камерами* (стенками).

3. Кривые с невырожденной двойной точкой или точкой возврата. Сначала мы перечислим стенки в $C_{3,3}$.

ТЕОРЕМА 1. Число стенок в $C_{3,3}$ равно 20 в случае гиперboloида и 6 в случае эллипсоида.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем кривую $A \in \Delta \setminus S$, раздвеем ее особую точку и стянем две образующие, проходящие через эту точку. В результате получим неособую кватернику $Q \subset \mathbb{P}^2$. Обратное преобразование задается парой (q_1, q_2) различных точек на Q (образов образующих), вещественных в случае гиперboloида и комплексно сопряженных в случае эллипсоида. В случае гиперboloида эти точки упорядочены и вещественная прямая, проходящая через них, ориентирована. Если A имеет точку возврата, эта прямая является касательной к кривой Q .

Итак, в случае эллипсоида ясно, что стенки нумеруются жесткими изотопическими классами вещественных кватерников. Согласно [11] число этих классов равно 6.

В случае гиперboloида стенки нумеруются компонентами связности пространства Conf конфигураций $(Q, q_1, q_2, \varepsilon)$, где ε – ориентация вещественной прямой, проходящей через q_1 и q_2 . Поэтому вместе с жестким изотопическим типом кватерники Q мы должны учитывать различные расположения точек q_1 и q_2 – на одном и том же или на разных овалах кривой Q . В последнем случае обозначим конфигурацию $(Q, q_1, q_2, \varepsilon)$ через b_α , $\alpha = 2, 3, 4$, если вещественная схема кривой Q есть $\langle \alpha \rangle$ (т.е. состоит из α овалов, лежащих вне друг друга), и через b_{inn} или b_{out} , если она является гнездом $\langle 1(1) \rangle$ (т.е. состоит из двух овалов, один из которых лежит внутри другого) и точка q_1 принадлежит внутреннему или соответственно внешнему овалу гнезда. В первом случае обозначим эту конфигурацию через a_α , $\alpha = 1, \dots, 4$, a_{inn} или a_{out} соответственно.

Кроме того, все конфигурации за исключением b_2, b_3 снабжаются знаком “+” или “–” следующим образом. Точки q_1, q_2 разделяют вещественную прямую, проходящую через них, на два отрезка, ориентированных в согласии с ε ; пусть $\overline{q_1 q_2}$ – тот из них, начало которого есть q_1 . Обозначим конфигурацию $(Q, q_1, q_2, \varepsilon)$ через a_α^- (соответственно через $b_{\text{inn}}^-, b_{\text{out}}^-$), если объединение отрезка $\overline{q_1 q_2}$ с овалом, содержащим точки q_1, q_2 (соответственно с внешним овалом гнезда), имеет ориентируемую окрестность в $\mathbb{R}P^2$, и через a_α^+ (соответственно через $b_{\text{inn}}^+, b_{\text{out}}^+$) в противном случае. Для b_4 рассмотрим в $\mathbb{R}P^2$ одностороннюю топологическую окружность γ , которая не пересекает $\mathbb{R}Q \cup \overline{q_1 q_2}$, и обозначим конфигурацию через b_4^- (соответственно через b_4^+), если два овала, содержащих q_1 и q_2 , имеют одинаковые (соответственно различные) комплексные ориентации в $\mathbb{R}P^2 \setminus \gamma$.

Для завершения доказательства остается заметить, что множество компонент связности пространства Conf находится в естественном взаимно однозначном соответствии с множеством $\{a_\alpha^\pm (\alpha = 1, \dots, 4), a_{\text{inn}}^\pm, a_{\text{out}}^\pm, b_2, b_3, b_4^\pm, b_{\text{inn}}^\pm, b_{\text{out}}^\pm\}$, состоящим из 20 элементов. Это утверждение вытекает, очевидно, из следующей леммы.

ЛЕММА О ПЕРЕСТАНОВКЕ ОВАЛОВ. Для любой отличной от гнезда вещественной кватрики Q существует жесткая изотопия, переводящая Q в себя и индуцирующая любую заданную перестановку овалов кривой Q . При этом если Q состоит из двух или трех овалов, существует жесткая изотопия, переводящая каждый овал в себя и обращающая ориентацию заданной прямой, пересекающей два овала.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как жесткий изотопический класс неособой вещественной кватрики определяется ее вещественной схемой (см. [11] или [1]) и группа $\mathrm{PGL}(3; \mathbb{R})$ связна, достаточно реализовать каждую вещественную схему $\langle \alpha \rangle$, $\alpha = 2, 3, 4$, некоторой кватрикой Q и найти для нее проективные преобразования, индуцирующие требуемые жесткие изотопии. Для $\alpha = 2$ в качестве Q можно взять кривую

$$(4x_1^2 + 4x_2^2 - x_0^2)(4x_0^2 + 4x_2^2 - x_1^2) = t(x_0^4 + x_1^4 + x_2^4),$$

где $t \in \mathbb{R}$ достаточно мало. Тогда преобразование $(x_0, x_1, x_2) \mapsto (x_1, -x_0, x_2)$ переставляет овалы кривой Q . Для $\alpha = 3$ и $\alpha = 4$ рассмотрим куб $\{(x_0, x_1, x_2) : |x_i| \leq 1\}$ в $\mathbb{R}^3$. Пусть $u(x_0, x_1, x_2) = 0$ – уравнение, задающее объединение четырех плоскостей, проходящих через начало координат и пересекающих этот куб по правильным шестиугольникам. Тогда уравнение $u(x_0, x_1, x_2) + t(x_0^4 + x_1^4 + x_2^4) = 0$ при достаточно малом t дает неособую кватрику $Q \subset \mathbb{P}^2$. В зависимости от знака числа t эта кватрика имеет 4 или 3 овала; каждый из них соответствует паре противоположных вершин или соответственно граней куба. Поэтому любая заданная перестановка овалов осуществляется некоторой симметрией куба. Кроме того, для $\alpha = 2$ и $\alpha = 3$ преобразование $(x_0, x_1, x_2) \mapsto (x_0, -x_1, x_2)$ переводит каждый овал в себя и меняет ориентацию прямой $x_2 = 0$.

4. Основной результат.

ТЕОРЕМА 2. Жесткая изотопическая классификация неособых вещественных алгебраических кривых бистепени $(3, 3)$ на гиперboloиде (на эллипсоиде) совпадает с классификацией их комплексных (вещественных) схем. Графы примыканий камер в $C_{3,3}$ показаны на рис. 1 (для гиперboloида) и на рис. 2 (для эллипсоида).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим точную последовательность тройки $(C_{3,3}, \Delta, S)$ (напомним, что $\dim C_{3,3} = 15$)

$$0 \rightarrow H_{15}(C_{3,3}, S) \rightarrow H_{15}(C_{3,3}, \Delta) \rightarrow H_{14}(\Delta, S) \xrightarrow{\text{in}} H_{14}(C_{3,3}, S) \quad (1)$$

(здесь и ниже все гомологии с $\mathbb{Z}/2$ -коэффициентами). Ясно, что c – число камер – равно $\dim_{\mathbb{Z}/2} H_{15}(C_{3,3}, \Delta)$, а w – число стенок – равно $\dim_{\mathbb{Z}/2} H_{14}(\Delta, S)$. Поскольку $H_{15}(C_{3,3}, S) = H_{15}(C_{3,3}) = \mathbb{Z}/2$, из точности последовательности (1) следует, что

$$c = 1 + w - \text{codim}_{\mathbb{Z}/2} \ker \text{in}.$$

В случае эллипсоида, поскольку $w = 6$ по теореме 1, $c \leq 7$. С другой стороны, возмущая соответствующие особые кривые, получаем 7 камер, различающихся вещественными схемами. Это завершает доказательство для эллипсоида.

Рис. 1. Камеры и стенки пространства кривых бистепени $(3, 3)$ на гиперboloиде

Рис. 2. Камеры пространства кривых бистепени $(3, 3)$ на эллипсоиде

В случае гиперboloида число комплексных схем кривых бистепени $(3, 3)$ равно 18 (см. [8, п. 3.10]; заметим, что в [8] комплексные схемы изучались с точностью до перестановки сомножителей произведения $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, поэтому их число было равно 9). Следовательно, $c \geq 18$. Поскольку $w = 20$ (теорема 1), для получения противоположного неравенства достаточно доказать, что $\text{codim}_{\mathbb{Z}/2} \ker \text{in} \geq 3$. Классы w_j , реализуемые стенками, очевидно, образуют базис пространства $H_{14}(\Delta, S)$. Пусть x_j – координаты класса $x \in H_{14}(\Delta, S)$ в этом базисе. Тогда $\text{codim}_{\mathbb{Z}/2} \ker \text{in}$ есть число линейно независимых уравнений, которые в координатах x_j задают $\ker \text{in}$. Поэтому достаточно найти три таких уравнения. Согласно двойственности Александера–Понтрягина

$$H_{14}(C_{3,3}, S) \cong H^1(C_{3,3} \setminus S) = \text{Hom}(H_1(C_{3,3} \setminus S), \mathbb{Z}/2). \quad (2)$$

Следовательно, $x \in \ker \text{in}$ тогда и только тогда, когда $\text{in } x \circ H_1(C_{3,3} \setminus S) = 0$, и нужные уравнения получаются умножением равенства $\text{in } x = \sum x_j \text{in } w_j$ на некоторые линейно

независимые классы из $H_1(C_{3,3} \setminus S)$. Эти классы задаются маленькими окружностями в $C_{3,3} \setminus S$, центры которых лежат в S и соответствуют трем кривым, указанным на рис. 3–5 (кривые на рис. 4 и 5 различаются комплексными ориентациями). Эти кривые легко строятся возмущением объединения прямых. Каждая окружность пересекает только четыре стенки, причем каждую трансверсально в одной точке. Поэтому в силу (2) реализуемые этими окружностями классы линейно независимы, а получаемые с их помощью уравнения ненулевые.

Рис. 3

Рис. 4

Рис. 5

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Рохлин В. А. Комплексные топологические характеристики вещественных алгебраических кривых // УМН. 1978. Т. 33. № 5. С. 77–89.
- [2] Харламов В. М. Жесткая изотопическая классификация вещественных плоских кривых степени 5 // Функцион. анализ и его прилож. 1981. Т. 15. № 1. С. 88–89.
- [3] Никулин В. В. Целочисленные квадратичные формы и некоторые их геометрические приложения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 1. С. 111–177.
- [4] Degtyarev A. I. Appendix // Kharlamov V. M., Rokhlin V. A., Viro O. Ya. Topological properties of real plane projective algebraic curves (to appear).
- [5] Zvonilov V. I. Stratified spaces of real algebraic curves of bidegree $(m, 1)$ and $(m, 2)$ on a hyperboloid // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1996. V. 173. P. 253–264.
- [6] Гудков Д. А., Усачев А. К. Неособые кривые младших порядков на гиперboloиде // Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький, 1980. С. 96–103.
- [7] Hilbert D. Ueber die reellen Züge algebraischen Curven // Math. Ann. 1891. V. 38. P. 115–138.
- [8] Звонилов В. И. Комплексные топологические инварианты вещественных алгебраических кривых на гиперboloиде и эллипсоиде // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. № 5. С. 88–108.
- [9] Kharlamov V. M., Rokhlin V. A., Viro O. Ya. Topological properties of real plane projective algebraic curves (to appear).
- [10] Виро О. Я. Успехи в топологии вещественных алгебраических многообразий за последние шесть лет // УМН. 1986. Т. 41. № 3. С. 45–67.
- [11] Klein F. Gesammelte mathematische Abhandlungen. V. 2. Berlin, 1922.

Bilkent University (Анкара, Турция)
 Сыктывкарский государственный университет
 E-mail: degt@fen.bilkent.edu.tr,
 zvonilov@ssu.edu.komi.ru

Поступило
 04.11.98
 Исправленный вариант
 17.05.99