Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Е. Иванов, Непрерывность оптимальных управлений в дифференциальных играх и некоторые свойства слабо и сильно выпуклых функций, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 6, 816–839

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1227>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 16:32:18

УДК 517.9

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ И НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СЛАБО И СИЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

Г. Е. Иванов

В первой части работы доказана эквивалентность липшицевой дифференцируемости функции и совокупности условий слабой выпуклости и слабой вогнутости этой функции, а также приведены достаточные условия непрерывной зависимости седловой точки сильно выпукло-вогнутой функции от параметра. Во второй части доказана гладкость функции цены игры и непрерывность оптимальных позиционных и программных стратегий игроков в нелинейных дифференциальных играх с нулевой суммой и с сильно выпукло-вогнутым интегрантом.

Библиография: 5 названий.

В настоящей работе рассматриваются нелинейные дифференциальные игры с нулевой суммой на фиксированном отрезке времени. Основы теории и некоторые методы решения дифференциальных игр изложены, например, в работах [1]–[4]. В общем случае функция цены дифференциальной игры недифференцируема, что существенно усложняет алгоритмы решения дифференциальных игр. Если же задачу удастся решить, то найденные оптимальные стратегии управления являются, как правило, разрывными функциями, что затрудняет практическую реализацию этих стратегий.

Настоящая работа продолжает исследование класса нелинейных дифференциальных игр, для которых *интегрант* (подынтегральная функция в интегральном слагаемом функционала качества) является сильно выпукло-вогнутой функцией относительно управлений игроков [5]. Основные результаты настоящей работы состоят в доказательстве гладкости функции цены игры, а также непрерывности оптимальных позиционных и программных стратегий игроков для рассматриваемого класса дифференциальных игр. В качестве вспомогательных получены результаты, касающиеся некоторых свойств слабо и сильно выпуклых функций. Доказана эквивалентность липшицевой дифференцируемости функции и совокупности условий слабой выпуклости и слабой вогнутости этой функции. Приведены достаточные условия непрерывной зависимости седловой точки сильно выпукло-вогнутой функции от параметра.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-00645.

1. Обобщенно выпуклые и липшицево дифференцируемые функции. Обозначим через $\mathbb{R}^s$ пространство s -мерных вектор-столбцов, через

$$\frac{dg}{dx}(x_0)$$

строку частных производных (градиент) функции $x \mapsto g(x)$ в точке $x_0 \in \mathbb{R}^s$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть $X \subset \mathbb{R}^s$ – выпуклое множество. Будем говорить, что функция $g: \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ *слабо выпукла на множестве X с константой R* , если функция $x \mapsto g(x) + \frac{1}{2}R\|x\|^2$ выпукла на X .

Функция g называется *сильно выпуклой на множестве X с константой $R > 0$* , если она слабо выпукла на X с константой $-R$.

Функция g называется *слабо (сильно) вогнутой с константой R* , если $-g$ слабо (сильно) выпукла с той же константой R .

Легко видеть, что функция g слабо выпукла на X с константой R тогда и только тогда, когда для любых $x_1, x_2 \in X$, $\lambda \in [0, 1]$ выполнено неравенство

$$\lambda g(x_1) + (1 - \lambda)g(x_2) - g(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq -\frac{\lambda(1 - \lambda)}{2}R\|x_2 - x_1\|^2. \quad (1.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Функция называется *липшицево дифференцируемой с константой L* на открытом множестве X , если она дифференцируема на X и ее градиент удовлетворяет условию Липшица с константой L на множестве X .

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ – открытое выпуклое множество. Для того чтобы функция $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ была липшицево дифференцируема на множестве X с константой L , необходимо и достаточно, чтобы функция g была слабо выпукла и слабо вогнута с константой L на X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть g липшицево дифференцируема с константой L . Возьмем произвольные $x_1, x_2 \in X$, $\lambda \in [0, 1]$ и обозначим $\bar{x} = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$. Тогда для любого $i = 1, 2$ имеем

$$\begin{aligned} \left| g(x_i) - g(\bar{x}) - \frac{dg}{dx}(\bar{x})(x_i - \bar{x}) \right| &= \left| \int_0^1 \left(\frac{dg}{dx}(\mu x_i + (1 - \mu)\bar{x}) - \frac{dg}{dx}(\bar{x}) \right) (x_i - \bar{x}) d\mu \right| \\ &\leq \frac{1}{2}L\|x_i - \bar{x}\|^2. \end{aligned}$$

Складывая эти неравенства при $i = 1, 2$ с весами λ и $1 - \lambda$, получим, что функции g и $-g$ удовлетворяют условию (1.1) при $R = L$, т.е. g слабо выпукла и слабо вогнута с константой L .

Достаточность. Для любых $x \in X$, $\ell \in \mathbb{R}^n$ определим производную функции g в точке x по направлению ℓ :

$$F(x, \ell) = \overline{\lim}_{\lambda \rightarrow +0} \frac{g(x + \lambda \ell) - g(x)}{\lambda}.$$

Так как X открыто, то для любого $x \in X$ найдется $\delta_x > 0$ такое, что $B(x, \delta_x) \subset X$, где $B(x, r)$ – открытый шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса r с центром в точке x .

Для любых $x \in X$, $\ell \in B(0, \delta_x)$ и $\lambda \in [0, 1]$ из формулы (1.1), примененной к функциям g и $-g$ и векторам $x_1 = x + \ell$, $x_2 = x$, получим

$$|\lambda(g(x + \ell) - g(x)) + g(x) - g(x + \lambda\ell)| \leq \frac{1}{2}\lambda(1 - \lambda)L\|\ell\|^2. \quad (1.2)$$

Деля на λ и переходя к пределу по $\lambda \rightarrow +0$, имеем

$$|g(x + \ell) - g(x) - F(x, \ell)| \leq \frac{1}{2}L\|\ell\|^2. \quad (1.3)$$

Покажем линейность функции $\ell \mapsto F(x, \ell)$. Зафиксируем произвольные $\ell_1, \ell_2 \in B(0, \delta_x)$. Тогда из (1.3) следует

$$\begin{aligned} |g(x + \ell_i) - g(x) - F(x, \ell_i)| &\leq \frac{1}{2}L\|\ell_i\|^2, \quad i = 1, 2, \\ \left| g\left(x + \frac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2)\right) - g(x) - F\left(x, \frac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2)\right) \right| &\leq \frac{1}{2}L\|\ell_1 + \ell_2\|^2. \end{aligned}$$

Из (1.1) при $R = L$ вытекает

$$\left| g(x + \ell_1) + g(x + \ell_2) - 2g\left(x + \frac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2)\right) \right| \leq \frac{1}{4}L\|\ell_1 - \ell_2\|^2,$$

откуда

$$\left| 2F\left(x, \frac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2)\right) - F(x, \ell_1) - F(x, \ell_2) \right| \leq \frac{L}{2} \left(\|\ell_1\|^2 + \|\ell_2\|^2 + 2\|\ell_1 + \ell_2\|^2 + \frac{1}{2}\|\ell_1 - \ell_2\|^2 \right).$$

Поэтому для любых $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и t , $0 \leq t \leq \delta_x \min\{\|\ell_1\|^{-1}, \|\ell_2\|^{-1}\}$, справедливо неравенство

$$\left| 2F\left(x, \frac{t}{2}(\ell_1 + \ell_2)\right) - F(x, t\ell_1) - F(x, t\ell_2) \right| \leq \frac{Lt^2}{2} \left(\|\ell_1\|^2 + \|\ell_2\|^2 + 2\|\ell_1 + \ell_2\|^2 + \frac{1}{2}\|\ell_1 - \ell_2\|^2 \right).$$

Следовательно, в силу положительной однородности функции $F(x, \cdot)$ получаем

$$|F(x, \ell_1 + \ell_2) - F(x, \ell_1) - F(x, \ell_2)| \leq \frac{Lt}{2} \left(\|\ell_1\|^2 + \|\ell_2\|^2 + 2\|\ell_1 + \ell_2\|^2 + \frac{1}{2}\|\ell_1 - \ell_2\|^2 \right),$$

т.е. $F(x, \ell_1 + \ell_2) = F(x, \ell_1) + F(x, \ell_2)$, отсюда и из положительной однородности функции $F(x, \cdot)$ следует линейность этой функции. Поэтому в силу (1.3) функция g дифференцируема по Фреше в точке x , значит g дифференцируема на множестве X .

Зафиксируем произвольные $x_1, x_2 \in X$, $\ell \in \mathbb{R}^n$, $\|\ell\| = 1$. Для любого натурального N определим

$$\ell_N = \frac{1}{2N} \|x_2 - x_1\| \ell.$$

В силу дифференцируемости функции g в точках x_1, x_2 выполнено

$$\left(\frac{dg}{dx}(x_1) - \frac{dg}{dx}(x_2) \right) \ell = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{\|x_2 - x_1\|} (g(x_1 + \ell_N) - g(x_1 - \ell_N) - g(x_2 + \ell_N) + g(x_2 - \ell_N)). \quad (1.4)$$

Определим

$$z_k = x_1 + \frac{k}{N} (x_2 - x_1), \quad z_k^+ = z_k + \ell_N, \quad z_k^- = z_k - \ell_N, \quad k = 0, \dots, N.$$

Заметим, что

$$|g(x_1 + \ell_N) - g(x_1 - \ell_N) - g(x_2 + \ell_N) + g(x_2 - \ell_N)| \leq \sum_{k=0}^{N-1} |g(z_k^+) - g(z_k^-) - g(z_{k+1}^+) + g(z_{k+1}^-)|. \quad (1.5)$$

Так как функция g слабо выпукла и слабо вогнута с константой L , то

$$\begin{aligned} \left| g(z_k^+) + g(z_{k+1}^-) - 2g\left(\frac{1}{2}(z_k + z_{k+1})\right) \right| &\leq \frac{1}{4} L \|z_{k+1}^- - z_k^+\|^2, \\ \left| g(z_k^-) + g(z_{k+1}^+) - 2g\left(\frac{1}{2}(z_k + z_{k+1})\right) \right| &\leq \frac{1}{4} L \|z_{k+1}^+ - z_k^-\|^2. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |g(z_k^+) - g(z_k^-) - g(z_{k+1}^+) + g(z_{k+1}^-)| &\leq \frac{1}{4} L (\|z_{k+1}^- - z_k^+\|^2 + \|z_{k+1}^+ - z_k^-\|^2) \\ &= \frac{1}{4} L \left(\left\| \frac{x_2 - x_1}{N} - 2\ell_N \right\|^2 + \left\| \frac{x_2 - x_1}{N} + 2\ell_N \right\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} L \left(\left\| \frac{x_2 - x_1}{N} \right\|^2 + 4\|\ell_N\|^2 \right) = \frac{L}{N^2} \|x_2 - x_1\|^2, \end{aligned}$$

откуда с учетом (1.4), (1.5) получаем

$$\left\| \left(\frac{dg}{dx}(x_2) - \frac{dg}{dx}(x_1) \right) \ell \right\| \leq L \|x_2 - x_1\|,$$

что в силу произвольности единичного вектора ℓ дает липшицевость градиента функции g на множестве X с константой L .

2. Непрерывная зависимость седловой точки сильно выпукло-вогнутой функции от параметра. Через $\mathbb{R}^{m \times n}$ обозначим пространство вещественных матриц, имеющих m строк и n столбцов. Если задана дифференцируемая функция $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ и точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}^m$, то через

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{k \times n}$$

будем обозначать матрицу Якоби функции $x \mapsto f(x, y_0)$ в точке x_0 . Если функция $x \mapsto f(x, y_0) \in \mathbb{R}$ выпукла, то через $\partial_x f(x_0, y_0)$ будем обозначать субдифференциал этой функции в точке x_0 .

Пусть X, Y, Z – непустые множества в нормированных пространствах, а L – вещественное число. Через $\text{Lip}(X, Y; L)$ обозначим класс функций $f: X \rightarrow Y$, удовлетворяющих условию Липшица на множестве X с константой L . Через $\text{BiLip}(X, Y, Z; L)$ обозначим класс функций $f: X \times Y \rightarrow Z$ таких, что для любых $x_1, x_2 \in X$ и $y_1, y_2 \in Y$ выполняется неравенство

$$\|f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) - f(x_1, y_2) - f(x_2, y_1)\| \leq L\|x_1 - x_2\| \cdot \|y_1 - y_2\|.$$

Заметим, что если X – выпуклое множество и задана функция $f: X \times Y \rightarrow Z$ такая, что для любого $y \in Y$ функция $f(\cdot, y)$ дифференцируема на множестве X и для любого $x \in X$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot) \in \text{Lip}(Y, Z; L),$$

то $f(\cdot, \cdot) \in \text{BiLip}(X, Y, Z; L)$.

Если X – непустое выпуклое множество в $\mathbb{R}^s$, $R \in \mathbb{R}$, то через $\text{WCo}(X; R)$ обозначим класс функций $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, полунепрерывных снизу и слабо выпуклых на множестве X с константой R . Согласно определению 1.1 – $\text{WCo}(X; R)$ – класс функций, полунепрерывных снизу и слабо вогнутых на множестве X с константой R . Через $\text{SCo}(X; R)$ обозначим класс функций $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, сильно выпуклых на множестве X с константой $R > 0$ и таких, что функция

$$x \mapsto \begin{cases} f(x), & x \in X, \\ +\infty, & x \notin X, \end{cases}$$

полунепрерывна снизу на $\mathbb{R}^s$. Заметим, что в общем случае $\text{WCo}(X; -R) \neq \text{SCo}(X; R)$. Например, определив $f(x) = x^2$ при $x \in X = (0, 1)$, получим, что $f(\cdot) \in \text{WCo}((0, 1); -1)$, но $f(\cdot) \notin \text{SCo}((0, 1); 1)$.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть заданы множество $X \subset \mathbb{R}^m$, выпуклые множества $P \subset \mathbb{R}^p$, $Q \subset \mathbb{R}^q$ и функция $g: X \times P \times Q \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть для любых $x \in X$, $u \in P$, $v \in Q$ имеет место

$$\begin{aligned} g(x, \cdot, v) &\in \text{SCo}(P; R_u), & g(x, u, \cdot) &\in -\text{SCo}(Q; R_v), \\ g(\cdot, \cdot, v) &\in \text{BiLip}(X, P, \mathbb{R}; L_{xu}), & g(\cdot, u, \cdot) &\in \text{BiLip}(X, Q, \mathbb{R}; L_{xv}). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Для любого $x \in X$ через $u^s(x)$, $v^s(x)$ обозначим седловую точку функции $(u, v) \mapsto g(x, u, v)$, т.е. $u^s(x) \in P$, $v^s(x) \in Q$ и для любых $u \in P$, $v \in Q$ выполнены неравенства

$$g(x, u^s(x), v) \leq g(x, u^s(x), v^s(x)) \leq g(x, u, v^s(x)).$$

Для любых чисел $a_1, a_2 \geq 0$ и $b_1, b_2 > 0$ определим

$$\varrho(a_1, a_2, b_1, b_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{a_1}{b_1} + \sqrt{\frac{a_1^2}{b_1^2} + \frac{a_2^2}{b_1 b_2}} \right) \quad (2.2)$$

и числа $L_x^u = \varrho(L_{xu}, L_{xv}, R_u, R_v)$, $L_x^v = \varrho(L_{xv}, L_{xu}, R_v, R_u)$. Тогда $u^s \in \text{Lip}(X, P; L_x^u)$ и $v^s \in \text{Lip}(X, Q; L_x^v)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_1, x_2 \in X$. Обозначим $u_i = u^s(x_i)$, $v_i = v^s(x_i)$, $i = 1, 2$, $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta u = u_2 - u_1$, $\Delta v = v_2 - v_1$.

Так как $0 \in \partial_u g(x_1, u_1, v_1)$, $0 \in \partial_u g(x_2, u_2, v_2)$, в силу условий $g(x, \cdot, v_i) \in \text{SCo}(P; R_u)$, $i = 1, 2$, имеем

$$g(x_1, u_2, v_1) - g(x_1, u_1, v_1) \geq \frac{1}{2} R_u \|\Delta u\|^2, \quad g(x_2, u_1, v_2) - g(x_2, u_2, v_2) \geq \frac{1}{2} R_u \|\Delta u\|^2.$$

Складывая два последних неравенства, получаем

$$g(x_1, u_2, v_1) + g(x_2, u_1, v_2) - g(x_1, u_1, v_1) - g(x_2, u_2, v_2) \geq R_u \|\Delta u\|^2.$$

Аналогично, из условий $g(x, u_i, \cdot) \in -\text{SCo}(Q; R_v)$, $i = 1, 2$, имеем

$$g(x_2, u_2, v_1) + g(x_1, u_1, v_2) - g(x_1, u_1, v_1) - g(x_2, u_2, v_2) \leq -R_v \|\Delta v\|^2.$$

Следовательно,

$$g(x_1, u_2, v_1) + g(x_2, u_1, v_2) - g(x_2, u_2, v_1) - g(x_1, u_1, v_2) \geq R_u \|\Delta u\|^2 + R_v \|\Delta v\|^2.$$

Из условий $g(\cdot, \cdot, v_1) \in \text{BiLip}(X, P, \mathbb{R}; L_{xu})$, $g(\cdot, u_1, \cdot) \in \text{BiLip}(X, Q, \mathbb{R}; L_{xv})$ получаем

$$\begin{aligned} & g(x_1, u_2, v_1) + g(x_2, u_1, v_2) - g(x_2, u_2, v_1) - g(x_1, u_1, v_2) \\ & \leq |g(x_1, u_2, v_1) + g(x_2, u_1, v_1) - g(x_2, u_2, v_1) - g(x_1, u_1, v_1)| \\ & \quad + |g(x_1, u_1, v_1) + g(x_2, u_1, v_2) - g(x_2, u_1, v_1) - g(x_1, u_1, v_2)| \\ & \leq (L_{xu} \|\Delta u\| + L_{xv} \|\Delta v\|) \|\Delta x\|. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$R_u \|\Delta u\|^2 + R_v \|\Delta v\|^2 \leq (L_{xu} \|\Delta u\| + L_{xv} \|\Delta v\|) \|\Delta x\|.$$

Поэтому

$$R_u \left(\|\Delta u\| - \frac{L_{xu}}{2R_u} \|\Delta x\| \right)^2 + R_v \left(\|\Delta v\| - \frac{L_{xv}}{2R_v} \|\Delta x\| \right)^2 \leq \left(\frac{L_{xu}^2}{4R_u} + \frac{L_{xv}^2}{4R_v} \right) \|\Delta x\|^2.$$

Таким образом,

$$\|\Delta u\| \leq L_x^u \|\Delta x\|, \quad \|\Delta v\| \leq L_x^v \|\Delta x\|.$$

Условия теоремы 2.1 существенно предполагают, что множества P, Q допустимых векторов u, v не зависят от параметра x . Следующие две теоремы формулируют достаточные условия непрерывной зависимости седловой точки от параметра в случае, когда множества допустимых векторов u, v зависят от этого параметра.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть на множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ заданы многозначные отображения P, Q с непустыми выпуклыми значениями $P(\omega) \subset \mathbb{R}^p$, $Q(\omega) \subset \mathbb{R}^q$. Пусть заданы функции $\alpha: \Omega \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $\beta: \Omega \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ такие, что для любого $\omega \in \Omega$

$$\alpha(\omega, \cdot) \in \text{SCo}(P(\omega); R_\alpha^u(\omega)), \quad \beta(\omega, \cdot) \in \text{SCo}(Q(\omega); R_\beta^v(\omega)).$$

Определим множества

$$P_0 = \text{conv} \left(\bigcup_{\omega \in \Omega} P(\omega) \right), \quad Q_0 = \text{conv} \left(\bigcup_{\omega \in \Omega} Q(\omega) \right),$$

где $\text{conv}(M)$ – выпуклая оболочка множества M .

Пусть задана функция $\mu: \Omega \times P_0 \times Q_0 \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что для любых $\omega \in \Omega$, $u \in P_0$, $v \in Q_0$

$$\mu(\omega, \cdot, v) \in \text{WCo}(P_0; R_u^\mu(\omega)), \quad \mu(\omega, u, \cdot) \in -\text{WCo}(Q_0; R_v^\mu(\omega)). \quad (2.3)$$

Пусть для любого $\omega \in \Omega$ функция $(u, v) \mapsto \mu(\omega, u, v)$ дифференцируема на множестве $P_0 \times Q_0$ и для любых $\omega \in \Omega$, $u \in P_0$, $v \in Q_0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial u}(\omega, \cdot, v) &\in \text{Lip}(P_0, \mathbb{R}^{1 \times p}; L_{uu}^\mu(\omega)), & \frac{\partial \mu}{\partial u}(\omega, u, \cdot) &\in \text{Lip}(Q_0, \mathbb{R}^{1 \times p}; L_{uv}^\mu(\omega)), \\ \frac{\partial \mu}{\partial v}(\omega, \cdot, v) &\in \text{Lip}(P_0, \mathbb{R}^{1 \times q}; L_{uv}^\mu(\omega)), & \frac{\partial \mu}{\partial v}(\omega, u, \cdot) &\in \text{Lip}(Q_0, \mathbb{R}^{1 \times q}; L_{uu}^\mu(\omega)). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Пусть для любого $\omega \in \Omega$ выполнены неравенства $R_u^\alpha(\omega) > R_u^\mu(\omega)$, $R_v^\beta(\omega) > R_v^\mu(\omega)$.

Для любого $\omega \in \Omega$ через $(u^s(\omega), v^s(\omega))$ обозначим седловую точку функции $(u, v) \mapsto \mu(\omega, u, v) + \alpha(\omega, u) - \beta(\omega, v)$.

Зафиксируем точку $\omega_0 \in \Omega$ и обозначим

$$u_0 = u^s(\omega_0), \quad v_0 = v^s(\omega_0), \quad \xi_0^u = -\frac{\partial \mu}{\partial u}(\omega_0, u_0, v_0), \quad \xi_0^v = \frac{\partial \mu}{\partial v}(\omega_0, u_0, v_0).$$

Для любого $\omega \in \Omega$ определим

$$u_{\min}(\omega) = \arg \min_{u \in P(\omega)} (\alpha(\omega, u) - \xi_0^u u), \quad v_{\min}(\omega) = \arg \min_{v \in Q(\omega)} (\beta(\omega, v) - \xi_0^v v), \quad (2.5)$$

$$N_\omega^{um}(\omega) = \|u_{\min}(\omega) - u_{\min}(\omega_0)\|, \quad N_\omega^{vm}(\omega) = \|v_{\min}(\omega) - v_{\min}(\omega_0)\|,$$

$$N_{u\omega}^\mu(\omega) = \left\| \frac{\partial \mu}{\partial u}(\omega, u_0, v_0) - \frac{\partial \mu}{\partial u}(\omega_0, u_0, v_0) \right\|,$$

$$N_{v\omega}^\mu(\omega) = \left\| \frac{\partial \mu}{\partial v}(\omega, u_0, v_0) - \frac{\partial \mu}{\partial v}(\omega_0, u_0, v_0) \right\|,$$

$$K_u(\omega) = N_{u\omega}^\mu(\omega) + L_{uu}^\mu(\omega) N_\omega^{um}(\omega) + L_{uv}^\mu(\omega) N_\omega^{vm}(\omega),$$

$$K_v(\omega) = N_{v\omega}^\mu(\omega) + L_{uv}^\mu(\omega) N_\omega^{um}(\omega) + L_{vv}^\mu(\omega) N_\omega^{vm}(\omega),$$

$$N_\omega^{us}(\omega) = N_\omega^{um}(\omega) + \varrho(K_u(\omega), K_v(\omega), R_u^\alpha(\omega) - R_u^\mu(\omega), R_v^\beta(\omega) - R_v^\mu(\omega)),$$

$$N_\omega^{vs}(\omega) = N_\omega^{vm}(\omega) + \varrho(K_v(\omega), K_u(\omega), R_v^\beta(\omega) - R_v^\mu(\omega), R_u^\alpha(\omega) - R_u^\mu(\omega)),$$

где функция ϱ определена формулой (2.2).

Тогда для любого $\omega \in \Omega$ справедливы неравенства

$$\|u^s(\omega) - u^s(\omega_0)\| \leq N_\omega^{us}(\omega), \quad \|v^s(\omega) - v^s(\omega_0)\| \leq N_\omega^{vs}(\omega).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольный параметр $\omega_* \in \Omega$ и обозначим

$$\begin{aligned} u_* &= u^s(\omega_*), \quad v_* = v^s(\omega_*), \quad \xi_*^u = -\frac{\partial \mu}{\partial u}(\omega_*, u_*, v_*), \quad \xi_*^v = \frac{\partial \mu}{\partial v}(\omega_*, u_*, v_*), \\ \bar{u} &= u_{\min}(\omega_*), \quad \bar{v} = v_{\min}(\omega_*), \quad \bar{\xi}^u = -\frac{\partial \mu}{\partial u}(\omega_*, \bar{u}, \bar{v}), \quad \bar{\xi}^v = \frac{\partial \mu}{\partial v}(\omega_*, \bar{u}, \bar{v}). \end{aligned}$$

Поскольку $u_0 = u_{\min}(\omega_0)$, $v_0 = v_{\min}(\omega_0)$, имеем

$$\|\bar{u} - u_0\| = N_{\omega_*}^{u^m}(\omega_*), \quad \|\bar{v} - v_0\| = N_{\omega_*}^{v^m}(\omega_*). \quad (2.6)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \|\xi_0^u - \bar{\xi}^u\| &\leq \left\| \frac{\partial \mu}{\partial u}(\omega_0, u_0, v_0) - \frac{\partial \mu}{\partial u}(\omega_*, u_0, v_0) \right\| + \left\| \frac{\partial \mu}{\partial u}(\omega_*, u_0, v_0) - \frac{\partial \mu}{\partial u}(\omega_*, \bar{u}, v_0) \right\| \\ &\quad + \left\| \frac{\partial \mu}{\partial u}(\omega_*, \bar{u}, v_0) - \frac{\partial \mu}{\partial u}(\omega_*, \bar{u}, \bar{v}) \right\| \\ &\leq N_{\omega_*}^{\mu}(\omega_*) + L_{uu}^{\mu}(\omega_*)\|u_0 - \bar{u}\| + L_{uv}^{\mu}(\omega_*)\|v_0 - \bar{v}\|. \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.6) получаем

$$\|\xi_0^u - \bar{\xi}^u\| \leq K_u(\omega_*). \quad (2.7)$$

Для любых $x \in [0, 1]$, $u \in P(\omega_*)$, $v \in Q(\omega_*)$ определим

$$g(x, u, v) = \mu(\omega_*, u, v) + x(\bar{\xi}^u - \xi_0^u)u - x(\bar{\xi}^v - \xi_0^v)v + \alpha(\omega_*, u) - \beta(\omega_*, v).$$

Заметим, что для любых $x \in [0, 1]$, $u \in P(\omega_*)$, $v \in Q(\omega_*)$

$$g(x, \cdot, v) \in \text{SCo}(P(\omega_*); R_u^{\alpha}(\omega_*) - R_u^{\mu}(\omega_*)), \quad g(x, u, \cdot) \in -\text{SCo}(Q(\omega_*); R_v^{\beta}(\omega_*) - R_v^{\mu}(\omega_*)).$$

Из неравенств (2.7) следует, что для любого $v \in Q(\omega_*)$

$$g(\cdot, \cdot, v) \in \text{BiLip}([0, 1], P(\omega_*), \mathbb{R}; K_u(\omega_*)).$$

Аналогично, для любого $u \in P(\omega_*)$

$$g(\cdot, u, \cdot) \in \text{BiLip}([0, 1], Q(\omega_*), \mathbb{R}; K_v(\omega_*)).$$

Поскольку $0 \in \partial_u g(0, u_*, v_*)$, $0 \in \partial_v (-g)(0, u_*, v_*)$, то (u_*, v_*) – седловая точка функции $(u, v) \mapsto g(0, u, v)$. Поскольку $0 \in \partial_u g(1, \bar{u}, \bar{v})$, $0 \in \partial_v (-g)(1, \bar{u}, \bar{v})$, то $(\bar{u}, \bar{v})$ – седловая точка функции $(u, v) \mapsto g(1, u, v)$.

В силу теоремы 2.1 получаем

$$\|u_* - \bar{u}\| \leq \varrho(K_u(\omega_*), K_v(\omega_*), R_u^{\alpha}(\omega_*) - R_u^{\mu}(\omega_*), R_v^{\beta}(\omega_*) - R_v^{\mu}(\omega_*)),$$

отсюда и из (2.6) следует неравенство

$$\|u^s(\omega_*) - u^s(\omega_0)\| = \|u_* - u_0\| \leq N_{\omega_*}^{u^s}(\omega_*).$$

Неравенство

$$\|v^s(\omega_*) - v^s(\omega_0)\| \leq N_{\omega_*}^{v^s}(\omega_*)$$

доказывается аналогично.

Непосредственно из теоремы 2.2 получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть выполнены условия теоремы 2.2. Пусть функции $L_{uu}^\mu(\cdot)$, $L_{uv}^\mu(\cdot)$, $L_{vv}^\mu(\cdot)$ ограничены на множестве Ω и для любого $\omega \in \Omega$ выполнены неравенства

$$R_u^\alpha(\omega) - R_u^\mu(\omega) \geq r_u > 0, \quad R_v^\beta(\omega) - R_v^\mu(\omega) \geq r_v > 0. \quad (2.8)$$

Тогда

а) если функции

$$u_{\min}(\cdot), \quad v_{\min}(\cdot), \quad \frac{\partial \mu}{\partial u}(\cdot, u_0, v_0), \quad \frac{\partial \mu}{\partial v}(\cdot, u_0, v_0) \quad (2.9)$$

непрерывны в точке ω_0 , то функции $u^s(\cdot)$, $v^s(\cdot)$ непрерывны в точке ω_0 ;

б) если функции (2.9) удовлетворяют условию Липшица в точке ω_0 , то функции $u^s(\cdot)$, $v^s(\cdot)$ удовлетворяют условию Липшица в точке ω_0 .

Одним из условий теоремы 2.3 является непрерывность или условие Липшица для функций $u_{\min}$, $v_{\min}$, определяемых формулами (2.5). Далее приведены достаточные условия на функцию $(s, u) \mapsto \phi(s, u)$ и многозначное отображение $t \mapsto P(t)$, при которых функция

$$(t, s) \mapsto u_{\min}(t, s) = \arg \min_{u \in P(t)} \phi(s, u)$$

непрерывна или удовлетворяет условию Липшица.

В лемме 2.1 сформулированы достаточные условия, при которых функция $s \mapsto u_{\min}(t, s)$ удовлетворяет условию Липшица. В лемме 2.2 получены достаточные условия, при которых функция $t \mapsto u_{\min}(t, s)$ непрерывна или удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $1/2$. Затем рассмотрен пример, показывающий, что в условиях леммы 2.2 функция $t \mapsto u_{\min}(t, s)$ может не удовлетворять условию Липшица.

ЛЕММА 2.1. Пусть заданы множество $S \subset \mathbb{R}^k$, выпуклое множество $P \subset \mathbb{R}^p$ и функция $\phi: S \times P \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям $\phi(\cdot, \cdot) \in \text{BiLip}(S, P; \mathbb{R}; L)$, $\phi(s, \cdot) \in \text{SCo}(P; R)$ для любого $s \in S$. Тогда для функции

$$s \mapsto u_{\min}(s) = \arg \min_{u \in P} \phi(s, u)$$

выполнено условие $u_{\min}(\cdot) \in \text{Lip}(S, P; L/R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $x = s$, $X = S$, $Q = \{0\}$, $g(x, u, v) = \phi(x, u)$. Тогда для любых $x \in X$, $u \in P$ выполнены условия теоремы 2.1 с константами $R_u = R$, $R_v = 1$, $L_{xu} = L$, $L_{xv} = 0$. Применение теоремы 2.1 дает требуемое утверждение.

Напомним, что расстоянием Хаусдорфа между двумя компактными $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{R}^n$ называется число

$$h(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \max \left\{ \sup_{a \in \mathcal{A}} \inf_{b \in \mathcal{B}} \|a - b\|, \sup_{b \in \mathcal{B}} \inf_{a \in \mathcal{A}} \|a - b\| \right\}. \quad (2.10)$$

ЛЕММА 2.2. Пусть на множестве $\mathcal{T}$ задано многозначное отображение P с выпуклыми компактными значениями $P(t) \subset \mathbb{R}^p$. Пусть на множестве

$$P_0 = \text{conv} \left(\bigcup_{t \in \mathcal{T}} P(t) \right)$$

задана функция $\phi: P_0 \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям $\phi(\cdot) \in \text{SCo}(P_0; R^\phi)$ и $\phi(\cdot) \in \text{Lip}(P_0, \mathbb{R}; L^\phi)$. Обозначим

$$u_{\min}(t) = \arg \min_{u \in P(t)} \phi(u), \quad t \in \mathcal{T}.$$

Тогда для любых $t_1, t_2 \in \mathcal{T}$ выполнено неравенство

$$\|u_{\min}(t_1) - u_{\min}(t_2)\| \leq \sqrt{2h(P(t_1), P(t_2)) \frac{L^\phi}{R^\phi}} + h(P(t_1), P(t_2)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $u_i = u_{\min}(t_i)$, $i = 1, 2$, $h = h(P(t_1), P(t_2))$. По определению расстояния по Хаусдорфу существует точка $\bar{u}_2 \in P(t_1)$ такая, что $\|\bar{u}_2 - u_2\| \leq h$. Следовательно,

$$\phi(\bar{u}_2) - \phi(u_2) \leq hL^\phi. \quad (2.11)$$

Определим функцию

$$\phi_1(u) = \begin{cases} \phi(u), & u \in P(t_1), \\ +\infty, & u \notin P(t_1). \end{cases}$$

Тогда $0 \in \partial \phi_1(u_1)$, что вместе с сильной выпуклостью ϕ_1 дает

$$\phi_1(\bar{u}_2) \geq \phi_1(u_1) + \frac{1}{2}R^\phi \|\bar{u}_2 - u_1\|^2 \geq \phi_1(u_1) + \frac{1}{2}R^\phi (\|u_1 - u_2\| - h)^2.$$

Следовательно, с учетом (2.11)

$$\phi(u_1) - \phi(u_2) \leq hL^\phi - \frac{1}{2}R^\phi (\|u_1 - u_2\| - h)^2.$$

Аналогично,

$$\phi(u_2) - \phi(u_1) \leq hL^\phi - \frac{1}{2}R^\phi (\|u_1 - u_2\| - h)^2.$$

Складывая два последних неравенства, получаем

$$R^\phi (\|u_1 - u_2\| - h)^2 \leq 2hL^\phi,$$

т.е.

$$\|u_1 - u_2\| \leq \sqrt{2h \frac{L^\phi}{R^\phi}} + h.$$

Из леммы 2.2 следует, что если в условиях этой леммы многозначное отображение P удовлетворяет условию Липшица, то функция $u_{\min}$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $1/2$. Следующий пример показывает, что этот показатель не может быть улучшен.

Пусть $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\phi(u) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + y, \quad P(t) = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, t - x\sqrt{t} \leq y\}, \quad t \in [0, 1].$$

Пусть $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$. Тогда $P(t_2) \subset P(t_1)$, так как если $(x, y) \in P(t_2)$, то $t_1 - x\sqrt{t_1} \leq \sqrt{t_1/t_2}(t_2 - x\sqrt{t_2}) \leq \sqrt{t_1/t_2}y \leq y$. Следовательно, $(x, y) \in P(t_1)$. С другой стороны, если $(x, y_1) \in P(t_1)$, то, обозначая $y_2 = \min\{y_1 + t_2 - t_1, 1\}$, получим $(x, y_2) \in P(t_2)$, $\|y_2 - y_1\| \leq \|t_2 - t_1\|$. Следовательно, отображение $t \mapsto P(t)$ удовлетворяет условию Липшица с константой 1. Функция ϕ сильно выпукла с константой 1.

Зафиксируем произвольное $t \in [0, 1]$. Для определения точки минимума $u_{\min}(t) = (x_{\min}(t), y_{\min}(t))$ рассмотрим два случая:

- 1) $x_{\min}(t) \leq \sqrt{t}$;
- 2) $x_{\min}(t) \geq \sqrt{t}$.

Так как

$$\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} = y + 1 > 0,$$

то в случае 1)

$$\begin{aligned} y_{\min}(t) &= t - x_{\min}(t)\sqrt{t}, \\ \phi_{\min}^y(x) &\equiv \min_{y: (x, y) \in P(t)} \phi(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + (t - x\sqrt{t})^2) + t - x\sqrt{t}, \\ \frac{d\phi_{\min}^y(x)}{dx} &= x - \sqrt{t}(t - x\sqrt{t}) - \sqrt{t} = -(1+t)(\sqrt{t} - x) \leq 0, \end{aligned}$$

следовательно, $x_{\min}(t) = \sqrt{t}$. В случае 2)

$$y_{\min}(t) = 0, \quad \phi_{\min}^y(x) = \frac{x^2}{2}, \quad \frac{d\phi_{\min}^y(x)}{dx} = x > 0, \quad x_{\min}(t) = \sqrt{t}.$$

Итак, $x_{\min}(t) = \sqrt{t}$, $y_{\min}(t) = 0$ и показатель $1/2$ в условии Гёльдера для функции $u_{\min}$ не может быть улучшен.

3. Дифференциальная игра с сильно выпукло-вогнутым интегрантом. Основные предположения. Рассмотрим дифференциальную игру

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), v(t)), \quad x(t_0) = x_0 \quad (3.1)$$

на отрезке времени $t \in [t_0, T]$, $0 \leq t_0 < T$, с функционалом качества

$$\mathcal{J} = \gamma(x(T)) + \int_{t_0}^T (\varphi(t, x(t), u(t), v(t)) + \alpha(t, u(t)) - \beta(t, v(t))) dt, \quad (3.2)$$

где $u(t) \in P(t) \subset \mathbb{R}^p$ – управление первого игрока, стремящегося минимизировать функционал $\mathcal{J}$, $v(t) \in Q(t) \subset \mathbb{R}^q$ – управление второго игрока, максимизирующего $\mathcal{J}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – фазовый вектор системы.

Будем предполагать, что функции $\alpha: [0, T] \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $\beta: [0, T] \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ борелевские и для любого $t \in [0, T]$ выполнены условия

$$\alpha(t, \cdot) \in \text{SCo}(P(t); R_u^\alpha(t)), \quad \beta(t, \cdot) \in \text{SCo}(Q(t); R_v^\beta(t)).$$

Пусть для любых $\xi^u \in \mathbb{R}^{1 \times p}$, $\xi^v \in \mathbb{R}^{1 \times q}$ функции

$$\begin{aligned} t \mapsto \alpha^*(t, \xi^u) &= - \min_{u \in P(t)} (\alpha(t, u) - \xi^u u), \quad t \mapsto \beta^*(t, \xi^v) = - \min_{v \in Q(t)} (\beta(t, v) - \xi^v v), \\ t \mapsto u_{\min}(t, \xi^u) &= \arg \min_{u \in P(t)} (\alpha(t, u) - \xi^u u) = \frac{\partial \alpha^*}{\partial \xi^u}(t, \xi^u), \\ t \mapsto v_{\min}(t, \xi^v) &= \arg \min_{v \in Q(t)} (\beta(t, v) - \xi^v v) = \frac{\partial \beta^*}{\partial \xi^v}(t, \xi^v) \end{aligned}$$

непрерывны на $[0, T]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Классом *допустимых программных стратегий игрока u* будем называть множество $\mathcal{U}$ измеримых функций $u: [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^p$ таких, что для любых $t \in [t_0, T]$ $u(t) \in P(t)$ и

$$\int_{t_0}^T \alpha(t, u(t)) dt < +\infty.$$

Классом *допустимых программных стратегий игрока v* будем называть множество $\mathcal{V}$ измеримых функций $v: [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^q$ таких, что для любых $t \in [t_0, T]$ $v(t) \in Q(t)$ и

$$\int_{t_0}^T \beta(t, v(t)) dt < +\infty.$$

Заметим, что из сильной выпуклости функций $\alpha(t, \cdot)$, $\beta(t, \cdot)$ и непрерывности функций $u_{\min}(\cdot, 0)$, $v_{\min}(\cdot, 0)$ следует, что допустимые программные стратегии являются квадратично интегрируемыми функциями на $[t_0, T]$.

Пусть на отрезке $[0, T]$ задано многозначное отображение X с непустыми выпуклыми значениями $X(t)$, график которого $\Omega \equiv \{(t, x) \mid t \in [0, T], x \in X(t)\}$ является открытым множеством в топологии $[0, T] \times \mathbb{R}^n$. Будем предполагать, что для любых $t_0 \in [0, T]$, $x_0 \in X(t_0)$, $u \in \mathcal{U}$, $v \in \mathcal{V}$ существует решение задачи Коши (3.1), причем $x(t) \in X(t)$ для всех $t \in [t_0, T]$.

Определим множества

$$P_0 = \text{conv} \left(\bigcup_{t \in [0, T]} P(t) \right), \quad Q_0 = \text{conv} \left(\bigcup_{t \in [0, T]} Q(t) \right).$$

Пусть функция $f: \Omega \times P_0 \times Q_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывна, для любого $t \in [0, T]$ функция $(x, u, v) \mapsto f(t, x, u, v)$ дифференцируема на множестве $X(t) \times P_0 \times Q_0$ и функции $\partial f / \partial u$, $\partial f / \partial v$ непрерывны на множестве $\Omega \times P_0 \times Q_0$. Пусть для любых $t \in [0, T]$, $x \in X(t)$, $u \in P_0$, $v \in Q_0$ выполнены условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(t, \cdot, u, v) &\in \text{Lip}(X(t), \mathbb{R}^{n \times n}; L_{xx}^f(t)), \\ \frac{\partial f}{\partial u}(t, \cdot, u, v) &\in \text{Lip}(X(t), \mathbb{R}^{n \times p}; L_{xu}^f(t)), \quad \frac{\partial f}{\partial v}(t, \cdot, u, v) \in \text{Lip}(X(t), \mathbb{R}^{n \times q}; L_{xv}^f(t)), \\ \frac{\partial f}{\partial u}(t, x, \cdot, v) &\in \text{Lip}(P_0, \mathbb{R}^{n \times p}; L_{uu}^f(t)), \quad \frac{\partial f}{\partial v}(t, x, \cdot, v) \in \text{Lip}(P_0, \mathbb{R}^{n \times q}; L_{uv}^f(t)), \\ \frac{\partial f}{\partial u}(t, x, u, \cdot) &\in \text{Lip}(Q_0, \mathbb{R}^{n \times p}; L_{uv}^f(t)), \quad \frac{\partial f}{\partial v}(t, x, u, \cdot) \in \text{Lip}(Q_0, \mathbb{R}^{n \times q}; L_{vv}^f(t)), \\ \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x, u, v) \right\| &\leq M_x^f(t), \quad \left\| \frac{\partial f}{\partial u}(t, x, u, v) \right\| \leq M_u^f(t), \quad \left\| \frac{\partial f}{\partial v}(t, x, u, v) \right\| \leq M_v^f(t), \\ \|f(t, x, u, v)\| &\leq M^f + M_x^f(t)\|x\| + M_u^f(t)\|u\| + M_v^f(t)\|v\|. \end{aligned}$$

Предполагаем далее, что функция $\gamma: X(T) \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям

$$\gamma(\cdot) \in \text{WCo}(X(T); R^{+\gamma}), \quad \gamma(\cdot) \in -\text{WCo}(X(T); R^{-\gamma}),$$

причем $R^{+\gamma} \geq 0$ и $R^{-\gamma} \geq 0$.

Определим константу $N^\gamma \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$:

$$N^\gamma = \sup_{x \in X(T)} \left\| \frac{d\gamma(x)}{dx} \right\|.$$

Пусть функция $\varphi: \Omega \times P_0 \times Q_0 \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, для любого $t \in [0, T]$ функция $(x, u, v) \mapsto \varphi(t, x, u, v)$ дифференцируема на множестве $X(t) \times P_0 \times Q_0$ и функции $\partial \varphi / \partial u$, $\partial \varphi / \partial v$ непрерывны на множестве $\Omega \times P_0 \times Q_0$. Пусть для любых $t \in [0, T]$, $x \in X(t)$, $u \in P_0$, $v \in Q_0$ выполнены условия

$$\begin{aligned} \varphi(t, x, \cdot, v) &\in \text{WCo}(P_0; R_u^\varphi(t)), \quad \varphi(t, x, u, \cdot) \in -\text{WCo}(P_0; R_v^\varphi(t)), \\ \varphi(t, \cdot, u, v) &\in \text{WCo}(X(t); R_x^{+\varphi}(t)), \quad \varphi(t, \cdot, u, v) \in -\text{WCo}(X(t); R_x^{-\varphi}(t)), \end{aligned}$$

причем $R_x^{+\varphi}(t) \geq 0$, $R_x^{-\varphi}(t) \geq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(t, \cdot, u, v) &\in \text{Lip}(X(t), \mathbb{R}^{1 \times p}; L_{xu}^\varphi(t)), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v}(t, \cdot, u, v) \in \text{Lip}(X(t), \mathbb{R}^{1 \times q}; L_{xv}^\varphi(t)), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u}(t, x, \cdot, v) &\in \text{Lip}(P_0, \mathbb{R}^{1 \times p}; L_{uu}^\varphi(t)), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v}(t, x, \cdot, v) \in \text{Lip}(P_0, \mathbb{R}^{1 \times q}; L_{uv}^\varphi(t)), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u}(t, x, u, \cdot) &\in \text{Lip}(Q_0, \mathbb{R}^{1 \times p}; L_{uv}^\varphi(t)), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v}(t, x, u, \cdot) \in \text{Lip}(Q_0, \mathbb{R}^{1 \times q}; L_{vv}^\varphi(t)), \\ \left\| \frac{\partial \varphi(t, x, u, v)}{\partial x} \right\| &\leq M_x^\varphi + L_{xx}^\varphi(t)\|x\| + L_{xu}^\varphi(t)\|u\| + L_{xv}^\varphi(t)\|v\|. \end{aligned}$$

Определим функцию $N_x^\varphi: [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$:

$$N_x^\varphi(t) = \sup_{\substack{x \in X(t) \\ u \in P_0, v \in Q_0}} \left\| \frac{\partial \varphi(t, x, u, v)}{\partial x} \right\|.$$

Будем предполагать, что указанные выше функции

$$\begin{aligned} & R_u^\alpha, R_v^\beta, L_{xx}^f, L_{xu}^f, L_{xv}^f, L_{uu}^f, L_{uv}^f, L_{vv}^f, M_x^f, M_u^f, M_v^f, \\ & R_u^\varphi, R_v^\varphi, R_x^{+\varphi}, R_x^{-\varphi}, L_{xu}^\varphi, L_{xv}^\varphi, L_{uu}^\varphi, L_{uv}^\varphi, L_{vv}^\varphi \end{aligned}$$

измеримы и ограничены на отрезке $[0, T]$.

Пусть для любого $t \in [0, T]$ выполнены неравенства

$$R_u^\alpha(t) - R_u^\varphi(t) \geq R_u^{\min} > 0, \quad R_v^\beta(t) - R_v^\varphi(t) \geq R_v^{\min} > 0,$$

обеспечивающие сильную выпукло-вогнутость интегранта $(u, v) \mapsto \zeta(t, x, u, v) = \varphi(t, x, u, v) + \alpha(t, u) - \beta(t, v)$ функционала качества (3.2).

Определим

$$\begin{aligned} e(t) &= \exp\left(\int_t^T M_x^f(\tau) d\tau\right), \quad t \in [0, T], \\ K_{uu}^f &= \sup_{t \in [0, T]} \frac{L_{uu}^f(t)e(t)}{R_u^\alpha(t) - R_u^\varphi(t)}, \quad K_{vv}^f = \sup_{t \in [0, T]} \frac{L_{vv}^f(t)e(t)}{R_v^\beta(t) - R_v^\varphi(t)}, \\ K_u^f &= \int_0^T \frac{(M_u^f(t)e(t))^2}{R_u^\alpha(t) - R_u^\varphi(t)} dt, \quad K_v^f = \int_0^T \frac{(M_v^f(t)e(t))^2}{R_v^\beta(t) - R_v^\varphi(t)} dt, \\ K_{xu}^f &= \int_0^T \frac{(L_{xu}^f(t)e(t))^2}{R_u^\alpha(t) - R_u^\varphi(t)} dt, \quad K_{xv}^f = \int_0^T \frac{(L_{xv}^f(t)e(t))^2}{R_v^\beta(t) - R_v^\varphi(t)} dt, \\ K_{xu}^\varphi &= \int_0^T \frac{(L_{xu}^\varphi(t))^2}{R_u^\alpha(t) - R_u^\varphi(t)} dt, \quad K_{xv}^\varphi = \int_0^T \frac{(L_{xv}^\varphi(t))^2}{R_v^\beta(t) - R_v^\varphi(t)} dt, \\ K_{xx}^f &= \int_0^T L_{xx}^f(t)e(t) dt, \quad K_{xx}^{+\varphi} = \int_0^T R_x^{+\varphi}(t) dt, \quad K_{xx}^{-\varphi} = \int_0^T R_x^{-\varphi}(t) dt; \end{aligned}$$

определим константу $K^\gamma \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$:

$$K^\gamma = N^\gamma + \int_0^T N_x^\varphi(t) dt.$$

Будем предполагать, что либо динамика системы (3.1) линейна:

$$f(t, x, u, v) = A(t)x + B(t)u + C(t)v, \quad (3.3)$$

либо $K^\gamma < +\infty$.

Определим константы

$$\begin{aligned} K_{uu}^J &= K^\gamma (K_{uu}^f + 2(K_{xu}^f K_u^f)^{1/2} + K_{xx}^f K_u^f) + 2(K_{xu}^\varphi K_u^f)^{1/2} + K_{xx}^{+\varphi} K_u^f + R^{+\gamma} K_u^f, \\ K_{vv}^J &= K^\gamma (K_{vv}^f + 2(K_{xv}^f K_v^f)^{1/2} + K_{xx}^f K_v^f) + 2(K_{xv}^\varphi K_v^f)^{1/2} + K_{xx}^{-\varphi} K_v^f + R^{-\gamma} K_v^f. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Положим по определению, что $(+\infty) \cdot 0 = 0 \cdot (+\infty) = 0$. Поэтому в случае линейной динамики (3.3) первые слагаемые в (3.4) равны 0, даже если $K^\gamma = +\infty$.

Наконец, будем предполагать, что

$$K_{uu}^J < 1, \quad K_{vv}^J < 1. \quad (3.5)$$

4. Известные результаты для дифференциальных игр с сильно выпукло-вогнутым интегрантом. Пусть $(t_0, x_0) \in \Omega$, $u \in \mathcal{U}$, $v \in \mathcal{V}$. Обозначим решение задачи Коши (3.1) $x(t)$ через $\chi(t, t_0, x_0, u, v)$. Определим функционал качества игры:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(t_0, x_0, u, v) &= \gamma(\chi(T, t_0, x_0, u, v)) \\ &\quad + \int_{t_0}^T (\varphi(t, \chi(t, t_0, x_0, u, v), u(t), v(t)) + \alpha(t, u(t)) - \beta(t, v(t))) dt. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Неравенства (3.5) обеспечивают сильную выпукло-вогнутость функционала $(u, v) \mapsto \mathcal{J}(t_0, x_0, u, v)$ для любых $(t_0, x_0) \in \Omega$, что вместе с другими предположениями п. 3 позволяет получить следующие две теоремы, доказанные в [5].

ТЕОРЕМА 4.1. *Для дифференциальной игры (3.1), (3.2) существует седловая точка в классе программных стратегий: для любых $(t_0, x_0) \in \Omega$ найдутся $\hat{u} \in \mathcal{U}$, $\hat{v} \in \mathcal{V}$ такие, что для всех $u \in \mathcal{U}$, $v \in \mathcal{V}$*

$$\mathcal{J}(t_0, x_0, \hat{u}, v) \leq \mathcal{J}(t_0, x_0, \hat{u}, \hat{v}) \leq \mathcal{J}(t_0, x_0, u, \hat{v}).$$

Если $(\hat{u}, \hat{v})$ – седловая точка функционала качества игры (3.1), (3.2), то функции $\hat{u}(\cdot)$ и $\hat{v}(\cdot)$ будем называть *оптимальными* программными стратегиями игроков для начальной позиции (t_0, x_0) .

Из теоремы 4.1 следует, что функция цены игры Υ (см. [3, с. 78]) может быть определена следующей формулой:

$$\Upsilon(t_0, x_0) = \min_{u \in \mathcal{U}} \max_{v \in \mathcal{V}} \mathcal{J}(t_0, x_0, u, v) = \max_{v \in \mathcal{V}} \min_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{J}(t_0, x_0, u, v). \quad (4.2)$$

Пусть $t \in [0, T]$, $x \in X(t)$, $u \in P(t)$, $v \in Q(t)$, $\psi \in \mathbb{R}^{1 \times n}$. Определим функцию Понтрягина

$$\mathcal{H}(t, x, u, v, \psi) = \psi f(t, x, u, v) + \varphi(t, x, u, v) + \alpha(t, u) - \beta(t, v).$$

ТЕОРЕМА 4.2. *Для того чтобы программные стратегии $\hat{u} \in \mathcal{U}$, $\hat{v} \in \mathcal{V}$ были оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы существовала абсолютно непрерывная функция $\psi: [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times n}$ такая, что почти всюду на отрезке $t \in [t_0, T]$ выполнено*

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{v}(t), \psi(t)), \quad \psi(T) = \frac{d\gamma}{dx}(\hat{x}(T)), \quad (4.3)$$

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi}(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{v}(t), \psi(t)), \quad \hat{x}(t_0) = x_0, \quad (4.4)$$

$$\mathcal{H}(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), v, \psi(t)) \leq \mathcal{H}(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{v}(t), \psi(t)) \leq \mathcal{H}(t, \hat{x}(t), u, \hat{v}(t), \psi(t)) \quad (4.5)$$

для всех $u \in P(t)$, $v \in Q(t)$.

5. Непрерывность оптимальных стратегий и гладкость функции цены игры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Пусть $\hat{u}, \hat{v}$ – оптимальные программные стратегии игроков для начальной позиции $(t_0, x_0) \in \Omega$. Функцию $\hat{x}: [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, являющуюся решением задачи Коши (4.4), будем называть *оптимальной траекторией фазового вектора* для начальной позиции (t_0, x_0) , а функцию $\psi: [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times n}$, являющуюся решением задачи Коши (4.3), – *оптимальной траекторией сопряженного вектора* для начальной позиции (t_0, x_0) .

ТЕОРЕМА 5.1. *Для любой начальной позиции $(t_0, x_0) \in \Omega$ оптимальные программные стратегии $\hat{u}(\cdot)$, $\hat{v}(\cdot)$ являются непрерывными функциями на отрезке $[t_0, T]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\hat{u}(\cdot)$, $\hat{v}(\cdot)$ – оптимальные программные стратегии игроков, $\hat{x}(\cdot)$, $\psi(\cdot)$ – оптимальные траектории фазового и сопряженного векторов для начальной позиции $(t_0, x_0) \in \Omega$. Из (4.3) следует, что для почти всех $t \in [t_0, T]$

$$\left\| \frac{d\psi(t)}{dt} \right\| \leq \|\psi(t)\| M_x^f(t) + N_x^\varphi(t), \quad \|\psi(T)\| \leq N^\gamma.$$

Поэтому для всех $t \in [t_0, T]$

$$\|\psi(t)\| \leq K^\gamma e(t). \quad (5.1)$$

Для любых $t \in [t_0, T]$, $u \in P_0$, $v \in Q_0$ обозначим $\mu(t, u, v) = \psi(t)f(t, \hat{x}(t), u, v) + \varphi(t, \hat{x}(t), u, v)$. Из предположений п. 3 и неравенства (5.1) следует выполнение условий (2.3) теоремы 2.2 для любых $\omega = t \in \Omega = [t_0, T]$, $u \in P_0$, $v \in Q_0$, где

$$R_u^\mu(t) = L_{uu}^f(t)K^\gamma e(t) + R_u^\varphi(t), \quad R_v^\mu(t) = L_{vv}^f(t)K^\gamma e(t) + R_v^\varphi(t).$$

Отсюда и из определения константы K_{uu}^f следует, что для любого $t \in [t_0, T]$ справедливо неравенство

$$R_u^\alpha(t) - R_u^\mu(t) \geq (R_u^\alpha(t) - R_u^\varphi(t))(1 - K^\gamma K_{uu}^f),$$

что вместе с условиями (3.4) и (3.5) дает неравенство

$$R_u^\alpha(t) - R_u^\mu(t) \geq R_u^{\min}(1 - K_{uu}^J) > 0.$$

Аналогично, для любого $t \in [t_0, T]$ справедливо неравенство

$$R_v^\beta(t) - R_v^\mu(t) \geq R_v^{\min}(1 - K_{vv}^J) > 0.$$

Тем самым, выполнены условия (2.8) теоремы 2.3. Из предположений п. 3 легко получить выполнение остальных условий утверждения а) теоремы 2.3, применение которого дает требуемое утверждение.

ТЕОРЕМА 5.2. Для любого $t_0 \in [0, T]$ функция цены игры $\Upsilon(t_0, \cdot)$ липшицево дифференцируема на множестве $X(t_0)$ с константой, не зависящей от t_0 , и для любого $x_0 \in X(t_0)$ справедливо равенство

$$\frac{\partial \Upsilon}{\partial x}(t_0, x_0) = \psi(t_0), \quad (5.2)$$

где $\psi(\cdot)$ – траектория сопряженного вектора для начальной позиции (t_0, x_0) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\hat{u}(\cdot), \hat{v}(\cdot)$ – оптимальные программные стратегии игроков, а $\hat{x}(\cdot)$ – оптимальная траектория фазового вектора для начальной позиции (t_0, x_0) . Для любого вектора $\eta \in X(t_0)$ обозначим через $u^\eta(\cdot), v^\eta(\cdot)$ оптимальные программные стратегии игроков, а через $x^\eta(\cdot)$ оптимальную траекторию фазового вектора для начальной позиции (t_0, η) . Тогда $\Upsilon(t_0, \eta) = \mathcal{J}(t_0, \eta, u^\eta, v^\eta)$, $\Upsilon(t_0, x_0) = \mathcal{J}(t_0, x_0, \hat{u}, \hat{v})$. Поскольку $\mathcal{J}(t_0, \eta, u^\eta, v^\eta) \geq \mathcal{J}(t_0, \eta, u^\eta, \hat{v})$, выполнено

$$\Upsilon(t_0, \eta) - \Upsilon(t_0, x_0) \geq \mathcal{J}(t_0, \eta, u^\eta, \hat{v}) - \mathcal{J}(t_0, \eta, \hat{u}, \hat{v}). \quad (5.3)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \varphi_x(t) &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{v}(t)), & f_x(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{v}(t)), \\ f_u(t) &= \frac{\partial f}{\partial u}(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{v}(t)). \end{aligned}$$

Пусть для любого $\tau \in [t_0, T]$ функция $t \mapsto \Phi(t, \tau) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ является решением задачи Коши

$$\frac{\partial \Phi(t, \tau)}{\partial t} = -\Phi(t, \tau) f_x(t), \quad t \in [t_0, T], \quad \Phi(\tau, \tau) = E.$$

Из уравнения (4.3) следует, что для любого $t \in [t_0, T]$ справедлива формула

$$\psi(t) = \frac{d\gamma}{dx}(\hat{x}(T))\Phi(t, T) + \int_t^T \varphi_x(\tau)\Phi(t, \tau) d\tau. \quad (5.4)$$

Для любой допустимой программной стратегии $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ определим

$$\rho(u) = \left(\int_{t_0}^T (R_u^\alpha(t) - R_u^\varphi(t)) \|u(t)\|^2 dt \right)^{1/2}.$$

В силу леммы 2 из [5] и формулы (5.4) существуют константы $K_{u\eta}^J$ и $K_{\eta\eta}^{+J}$ такие, что для любой допустимой программной стратегии $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \mathcal{J}(t_0, \eta, u, \hat{v}) - \mathcal{J}(t_0, \eta, \hat{u}, \hat{v}) \\ & \geq \int_{t_0}^T (\varphi(t, \hat{x}(t), u(t), \hat{v}(t)) + \alpha(t, u(t)) - \varphi(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{v}(t)) - \alpha(t, \hat{u}(t)) \\ & \quad + \psi(t) f_u(t)(u(t) - \hat{u}(t))) dt \\ & \quad + \psi(t_0)(\eta - x_0) - \frac{1}{2} K_{uu}^J \rho^2(u - \hat{u}) - K_{u\eta}^J \rho(u - \hat{u}) \|\eta - x_0\| - \frac{1}{2} K_{\eta\eta}^{+J} \|\eta - x_0\|^2. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Из правой части неравенства (4.5) следует, что $0 \in \partial_u \mathcal{H}(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{v}(t), \psi(t))$ для любого $t \in [t_0, T]$. Поэтому

$$\psi(t) f_u(t) \in -\partial_u (\varphi(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{v}(t)) + \alpha(t, \hat{u}(t))).$$

Из этого условия и условий $\varphi(t, x, \cdot, v) \in \text{WCo}(P(t); R_u^\varphi(t))$, $\alpha(t, \cdot) \in \text{SCo}(P(t); R_u^\alpha(t))$ получаем неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^T (\varphi(t, \hat{x}(t), u(t), \hat{v}(t)) + \alpha(t, u(t)) - \varphi(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{v}(t)) \\ & \quad - \alpha(t, \hat{u}(t)) + \psi(t) f_u(t)(u(t) - \hat{u}(t))) dt \\ & \geq \frac{1}{2} \int_{t_0}^T (R_u^\alpha(t) - R_u^\varphi(t)) \|u(t) - \hat{u}(t)\|^2 dt = \frac{1}{2} \rho^2(u - \hat{u}). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Из неравенств (5.3), (5.5), (5.6) следует неравенство

$$\begin{aligned} \Upsilon(t_0, \eta) - \Upsilon(t_0, x_0) & \geq \psi(t_0)(\eta - x_0) + \frac{1}{2}(1 - K_{uu}^J) \rho^2(u^\eta - \hat{u}) \\ & \quad - K_{u\eta}^J \rho(u^\eta - \hat{u}) \|\eta - x_0\| - \frac{1}{2} K_{\eta\eta}^{+J} \|\eta - x_0\|^2. \end{aligned}$$

Обозначая

$$R_x^{+\Upsilon} = K_{\eta\eta}^{+J} + \frac{(K_{u\eta}^J)^2}{1 - K_{uu}^J},$$

получим

$$\begin{aligned} \Upsilon(t_0, \eta) - \Upsilon(t_0, x_0) &\geq \psi(t_0)(\eta - x_0) + \frac{1}{2}(1 - K_{uu}^J) \left(\rho(u^\eta - \hat{u}) - \|\eta - x_0\| \frac{K_{u\eta}^J}{1 - K_{uu}^J} \right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} R_x^{+\Upsilon} \|\eta - x_0\|^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Upsilon(t_0, \eta) - \Upsilon(t_0, x_0) \geq \psi(t_0)(\eta - x_0) - \frac{1}{2} R_x^{+\Upsilon} \|\eta - x_0\|^2. \quad (5.7)$$

Аналогично, существует константа $R_x^{-\Upsilon}$ такая, что для любого $\eta \in X(t_0)$ справедливо неравенство

$$\Upsilon(t_0, \eta) - \Upsilon(t_0, x_0) \leq \psi(t_0)(\eta - x_0) + \frac{1}{2} R_x^{-\Upsilon} \|\eta - x_0\|^2. \quad (5.8)$$

Из (5.7), (5.8) следует неравенство

$$|\Upsilon(t_0, \eta) - \Upsilon(t_0, x_0) - \psi(t_0)(\eta - x_0)| \leq \frac{1}{2} R_x^{\Upsilon} \|\eta - x_0\|^2,$$

где $R_x^{\Upsilon} = \max\{R_x^{+\Upsilon}, R_x^{-\Upsilon}\}$.

Из последнего неравенства следует дифференцируемость функции $\Upsilon(t_0, \cdot)$ в точке x_0 и равенство (5.2). Из неравенств (5.7), (5.8) соответственно легко получить условия $\Upsilon(t_0, \cdot) \in \text{WCo}(X(t_0); R_x^{+\Upsilon})$, $\Upsilon(t_0, \cdot) \in -\text{WCo}(X(t_0); R_x^{-\Upsilon})$, из которых в силу теоремы 1.1 следует липшицева дифференцируемость функции $\Upsilon(t_0, \cdot)$ на множестве $X(t_0)$ с константой R_x^{Υ} .

Заметим, что липшицева дифференцируемость функции $\Upsilon(t_0, \cdot)$ также следует непосредственно из теоремы 2 из [5] и теоремы 1.1.

ЛЕММА 5.1. *Для любых $t_0 \in (0, T]$, $x_0 \in X(t_0)$ существуют число $t_* \in [0, t_0)$ и вектор $x_* \in X(t_*)$ такие, что оптимальная траектория $\hat{x}(\cdot)$ фазового вектора для начальной позиции (t_*, x_*) удовлетворяет условию $\hat{x}(t_0) = x_0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим множество

$$W = \{(t, x, \psi) : t \in [0, T], x \in X(t), \psi \in \mathbb{R}^{1 \times n}, \|\psi\| \leq K^\gamma e(t)\}.$$

Следуя рассуждениям при доказательстве теоремы 5.1, легко видеть, что для любых $(t, x, \psi) \in W$ функция Понтрягина $(u, v) \mapsto \mathcal{H}(t, x, u, v, \psi)$ сильно выпукло-вогнута и имеет седловую точку, которую обозначим через $(u^H(t, x, \psi), v^H(t, x, \psi))$. Из утверждения а) теоремы 2.3 легко получить, что функции $(t, x, \psi) \mapsto u^H(t, x, \psi)$, $(t, x, \psi) \mapsto v^H(t, x, \psi)$ непрерывны на множестве W .

Для любых $(t, x, \psi) \in W$ определим

$$\begin{aligned} F(t, x, \psi) &= f(t, x, u^H(t, x, \psi), v^H(t, x, \psi)), \\ F_1(t, x, \psi) &= \frac{\partial f}{\partial x}(t, x, u^H(t, x, \psi), v^H(t, x, \psi)). \end{aligned}$$

Пусть $\hat{x}: [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\psi: [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times n}$ – оптимальные траектории фазового и сопряженного векторов для начальной позиции (t_0, x_0) . Обозначим $\psi_0 = \psi(t_0)$ и рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}(t)}{dt} &= F(t, \hat{x}(t), \psi(t)), \quad \hat{x}(t_0) = x_0, \\ \frac{d\psi(t)}{dt} &= -\psi(t) F_1(t, \hat{x}(t), \psi(t)), \quad \psi(t_0) = \psi_0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Из непрерывности функций $u^H(\cdot)$, $v^H(\cdot)$ и предположений п. 3 следует непрерывность функций $F(\cdot)$ и $F_1(\cdot)$ на множестве W . Поэтому в некоторой левой полукрестности точки t_0 существуют функции $\hat{x}(\cdot)$, $\psi(\cdot)$, являющиеся решением задачи Коши (5.9). Выберем точку $t_* < t_0$ из этой полукрестности. Из теоремы 4.2 следует, что функция $\hat{x}: [t_*, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ является оптимальной траекторией фазового вектора для начальной позиции (t_*, x_*) , где $x_* = \hat{x}(t_*)$.

ЛЕММА 5.2. *Если $\hat{u}(\cdot)$, $\hat{v}(\cdot)$ – оптимальные программные стратегии игроков, а $\hat{x}(\cdot)$ – оптимальная траектория фазового вектора для некоторой начальной позиции $(t_0, x_0) \in \Omega$, то функция*

$$t \mapsto \varphi(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{v}(t)) + \alpha(t, \hat{u}(t)) - \beta(t, \hat{v}(t))$$

непрерывна на $[t_0, T]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi(\cdot)$ – оптимальная траектория сопряженного вектора для начальной позиции (t_0, x_0) . Из правой части неравенства (4.5) теоремы 4.2 следует, что для любого $t \in [t_0, T]$ справедливо включение $0 \in \partial_u \mathcal{H}(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{v}(t), \psi(t))$, т.е.

$$\psi(t) \frac{\partial f}{\partial u}(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{v}(t)) + \frac{\partial \varphi}{\partial u}(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{v}(t)) \in -\partial_u \alpha(t, \hat{u}(t)).$$

Для любых $t \in [t_0, T]$, $\xi^u \in \mathbb{R}^{1 \times p}$ определим

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_u(t) &= -\psi(t) \frac{\partial f}{\partial u}(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{v}(t)) - \frac{\partial \varphi}{\partial u}(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{v}(t)), \\ \alpha^*(t, \xi^u) &= \max_{u \in P(t)} (\xi^u u - \alpha(t, u)). \end{aligned}$$

Из условия $\hat{\xi}_u(t) \in \partial_u \alpha(t, \hat{u}(t))$ следует, что максимум достигается на векторе $u = \hat{u}(t)$. В силу предположений п. 3 и теоремы 5.1 функция $\hat{\xi}_u(\cdot)$ непрерывна на $[t_0, T]$.

Заметим, что для любого $t \in [t_0, T]$ функция $\alpha^*(t, \cdot)$ удовлетворяет условию Липшица на множестве $\mathbb{R}^{1 \times p}$ с константой $\max_{t \in [t_0, T]} \|\hat{u}(t)\|$. Согласно предположению п. 3 для любого $\xi^u \in \mathbb{R}^{1 \times p}$ функция $\alpha^*(\cdot, \xi^u)$ непрерывна. Поэтому функция $t \mapsto \alpha^*(t, \hat{\xi}_u(t))$ непрерывна, откуда следует непрерывность функции $t \mapsto \alpha(t, \hat{u}(t)) = \hat{\xi}_u(t) \hat{u}(t) - \alpha^*(t, \hat{\xi}_u(t))$. Аналогично, функция $t \mapsto \beta(t, \hat{v}(t))$ непрерывна на отрезке $[t_0, T]$. Непрерывность функции $t \mapsto \varphi(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{v}(t))$ следует из теоремы 5.1 и непрерывности функций $\hat{x}(\cdot)$ и $\varphi(\cdot)$.

ЛЕММА 5.3. *Функция $\partial \Upsilon / \partial x$ непрерывна на множестве Ω .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольную начальную позицию $(t_0, x_0) \in \Omega$. Если $t_0 > 0$, то в силу леммы 5.1 существуют число $t_* \in [0, t_0]$ и вектор $x_* \in X(t_*)$ такие, что оптимальная траектория фазового вектора $\hat{x}(\cdot)$ для начальной позиции (t_*, x_*) удовлетворяет условию $\hat{x}(t_0) = x_0$. Если $t_0 = 0$, то положим $(t_*, x_*) = (t_0, x_0)$.

В силу теоремы 5.2 функция $x \mapsto \partial \Upsilon(t, x) / \partial x$ удовлетворяет условию Липшица на множестве $X(t)$ с константой, не зависящей от t . Поэтому

$$\left\| \frac{\partial \Upsilon}{\partial x}(t, \hat{x}(t)) - \frac{\partial \Upsilon}{\partial x}(t, x) \right\| \rightarrow 0 \quad \text{при } (t, x) \rightarrow (t_0, x_0).$$

Из теоремы 5.2 также следует, что

$$\left\| \frac{\partial \Upsilon}{\partial x}(t, \hat{x}(t)) - \frac{\partial \Upsilon}{\partial x}(t_0, x_0) \right\| = \|\psi(t) - \psi(t_0)\| \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow t_0,$$

где $\psi(\cdot)$ – оптимальная траектория сопряженного вектора для начальной позиции (t_*, x_*) .

Поэтому

$$\left\| \frac{\partial \Upsilon}{\partial x}(t, x) - \frac{\partial \Upsilon}{\partial x}(t_0, x_0) \right\| \rightarrow 0 \quad \text{при } (t, x) \rightarrow (t_0, x_0).$$

ЛЕММА 5.4. *Пусть задан отрезок $\Delta \subset \mathbb{R}$ и функция $g: \Delta \times \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что для любого $t \in \Delta$ функции $\tau \mapsto g(t, \tau)$, $t \mapsto g(t, t)$ дифференцируемы на отрезке Δ и функция $(t, \tau) \mapsto dg(t, \tau) / d\tau$ непрерывна на множестве $\Delta \times \Delta$. Тогда для любого $t_0 \in \Delta$ функция $t \mapsto g(t, t_0)$ дифференцируема в точке $t = t_0$ и справедливо равенство*

$$\left. \frac{dg(t, \tau)}{d\tau} \right|_{(t, \tau) = (t_0, t_0)} = \left. \frac{d}{dt} g(t, t) \right|_{t=t_0} - \left. \frac{\partial g(t, \tau)}{\partial \tau} \right|_{(t, \tau) = (t_0, t_0)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме о среднем для любого числа δ , удовлетворяющего включению $t_0 + \delta \in \Delta$, существует число $\theta \in [0, 1]$ такое, что

$$\frac{g(t_0 + \delta, t_0) - g(t_0 + \delta, t_0 + \delta)}{\delta} = - \frac{\partial g(t, \tau)}{\partial \tau} \bigg|_{(t, \tau) = (t_0 + \delta, t_0 + \theta \delta)} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} - \frac{\partial g(t, \tau)}{\partial \tau} \bigg|_{(t, \tau) = (t_0, t_0)}.$$

Кроме того,

$$\frac{g(t_0 + \delta, t_0 + \delta) - g(t_0, t_0)}{\delta} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \frac{dg(t, t)}{dt} \bigg|_{t=t_0}.$$

Следовательно,

$$\frac{g(t_0 + \delta, t_0) - g(t_0, t_0)}{\delta} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \frac{dg(t, t)}{dt} \bigg|_{t=t_0} - \frac{\partial g(t, \tau)}{\partial \tau} \bigg|_{(t, \tau) = (t_0, t_0)}.$$

ТЕОРЕМА 5.3. *Функция цены игры непрерывно дифференцируема на множестве Ω и для любых $(t, x) \in \Omega$ справедливо уравнение Айзекса–Беллмана (уравнение дифференциального минимакса [3, с. 138]):*

$$-\frac{\partial \Upsilon(t, x)}{\partial t} = \min_{u \in P(t)} \max_{v \in Q(t)} \left(\frac{\partial \Upsilon(t, x)}{\partial x} f(t, x, u, v) + \varphi(t, x, u, v) + \alpha(t, u) - \beta(t, v) \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольную начальную позицию $(t_0, x_0) \in \Omega$. Если $t_0 > 0$, то в силу леммы 5.1 существуют число $t_* \in [0, t_0]$ и вектор $x_* \in X(t_*)$ такие, что оптимальная траектория фазового вектора $\hat{x}(\cdot)$ для начальной позиции (t_*, x_*) удовлетворяет условию $\hat{x}(t_0) = x_0$. Если $t_0 = 0$, то положим $(t_*, x_*) = (t_0, x_0)$. Пусть $\hat{u}(\cdot), \hat{v}(\cdot)$ – оптимальные программные стратегии игроков, а $\psi(\cdot)$ – оптимальная траектория сопряженного вектора для начальной позиции (t_*, x_*) . По определению функции цены игры для любого $t \in [t_*, T]$ справедливо равенство

$$\Upsilon(t, \hat{x}(t)) = \gamma(\hat{x}(T)) + \int_t^T (\varphi(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau), \hat{v}(\tau)) + \alpha(\tau, \hat{u}(\tau)) - \beta(\tau, \hat{v}(\tau))) d\tau.$$

Отсюда и из леммы 5.2 следует, что функция $t \mapsto \Upsilon(t, \hat{x}(t))$ дифференцируема на отрезке $[t_*, T]$ и справедливо равенство

$$-\frac{d}{dt} \Upsilon(t, \hat{x}(t)) = \varphi(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{v}(t)) + \alpha(t, \hat{u}(t)) - \beta(t, \hat{v}(t)). \quad (5.10)$$

Поскольку множество Ω открыто, а функция $\hat{x}(\cdot)$ непрерывна, то существует отрезок $\Delta \subset [t_*, T]$, $t_0 \in \text{int}(\Delta)$ такой, что для любых $(t, \tau) \in \Delta \times \Delta$ имеет место включение $(t, \hat{x}(\tau)) \in \Omega$. При $(t, \tau) \in \Delta \times \Delta$ определим $g(t, \tau) = \Upsilon(t, \hat{x}(\tau))$.

В силу леммы 5.3 функция

$$(t, \tau) \mapsto \frac{\partial g(t, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial \Upsilon}{\partial x}(t, \hat{x}(\tau)) f(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau), \hat{v}(\tau))$$

непрерывна на множестве $\Delta \times \Delta$.

Применяя лемму 5.4 и формулу (5.10), получаем равенство

$$-\frac{\partial \Upsilon}{\partial t}(t_0, x_0) = \frac{\partial \Upsilon}{\partial x}(t_0, x_0) f(t_0, x_0, \hat{u}(t_0), \hat{v}(t_0)) + \varphi(t_0, x_0, \hat{u}(t_0), \hat{v}(t_0)) + \alpha(t_0, \hat{u}(t_0)) - \beta(t_0, \hat{v}(t_0)). \quad (5.11)$$

Поскольку согласно теореме 5.2

$$\frac{\partial \Upsilon}{\partial x}(t_0, x_0) = \psi(t_0),$$

то в силу теоремы 4.2 формулу (5.11) можно переписать в виде

$$-\frac{\partial \Upsilon}{\partial t}(t_0, x_0) = \min_{u \in P(t_0)} \max_{v \in Q(t_0)} \left(\frac{\partial \Upsilon}{\partial x}(t_0, x_0) f(t_0, x_0, u, v) + \varphi(t_0, x_0, u, v) + \alpha(t_0, u) - \beta(t_0, v) \right).$$

Из непрерывности правой части последнего уравнения следует непрерывность функции $\partial \Upsilon / \partial t$ на множестве Ω .

Для любых $(t, x) \in \Omega$ через $(u_{\text{pos}}(t, x), v_{\text{pos}}(t, x))$ обозначим седловую точку функции

$$(u, v) \mapsto \frac{\partial \Upsilon(t, x)}{\partial x} f(t, x, u, v) + \varphi(t, x, u, v) + \alpha(t, u) - \beta(t, v).$$

Функции $u_{\text{pos}}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$, $v_{\text{pos}}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q$ являются оптимальными *позиционными* стратегиями игроков [3].

ТЕОРЕМА 5.4. *Оптимальные позиционные стратегии игроков u_{pos} , v_{pos} непрерывны на множестве Ω .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим функцию $\mu: \Omega \times P_0 \times Q_0 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\mu(t, x, u, v) = \frac{\partial \Upsilon(t, x)}{\partial x} f(t, x, u, v) + \varphi(t, x, u, v).$$

Из теоремы 5.2 и формулы (5.1) получаем неравенство

$$\left\| \frac{\partial \Upsilon(t, x)}{\partial x} \right\| \leq K^\gamma e(t), \quad (t, x) \in \Omega.$$

Отсюда и из предположений п. 3 следуют условия (2.3), (2.4) теоремы 2.2, где $\omega = (t, x)$,

$$\begin{aligned} R_u^\mu(t) &= L_{uu}^f(t) e(t) K^\gamma + R_u^\varphi(t), & R_v^\mu(t) &= L_{vv}^f(t) e(t) K^\gamma + R_v^\varphi(t), \\ L_{uu}^\mu(t) &= L_{uu}^f(t) e(t) K^\gamma + L_{uu}^\varphi(t), & L_{uv}^\mu(t) &= L_{uv}^f(t) e(t) K^\gamma + L_{uv}^\varphi(t), \\ L_{vv}^\mu(t) &= L_{vv}^f(t) e(t) K^\gamma + L_{vv}^\varphi(t). \end{aligned}$$

Из (3.4) и (3.5) получаем неравенство $K^\gamma K_{uu}^f < 1$, из которого следуют условия (2.8) теоремы 2.3.

Используя лемму 5.3, получим, что для любых $u \in P_0$, $v \in Q_0$ функции

$$(t, x) \mapsto \frac{\partial \mu}{\partial u}(t, x, u, v), \quad (t, x) \mapsto \frac{\partial \mu}{\partial v}(t, x, u, v)$$

непрерывны на множестве Ω . Отсюда и из предположений п. 3 следует, что выполнены все условия утверждения а) теоремы 2.3, применение которого завершает доказательство теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
- [2] Понтрягин Л. С. Линейные дифференциальные игры преследования // Матем. сб. 1980. Т. 112. № 3. С. 307–330.
- [3] Красовский Н. Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
- [4] Субботин А. И. Минимаксные неравенства и уравнение Гамильтона–Якоби. М.: Наука, 1991.
- [5] Иванов Г. Е. Седловая точка для дифференциальных игр с сильно выпукло-вогнутым интегрантом // Матем. заметки. 1997. Т. 62. № 5. С. 725–743.

Московский физико-технический институт
E-mail: givanov@math.mipt.ru

Поступило
20.05.96
Исправленный вариант
13.07.98