Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Ильюта, Высшие порядки Брюа и соотношения в группе кос, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 6, 840–848

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1228>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 15:52:10

УДК 512

ВЫСШИЕ ПОРЯДКИ БРЮА И СООТНОШЕНИЯ В ГРУППЕ КОС

Г. Г. Ильяута

В статье доказаны соотношения в группе кос, которые обобщают соотношение вида $aba = bab$. Они получаются с помощью обобщения на высшие порядки Брюа известного соответствия между разложениями элемента максимальной длины в группе Вейля A_{n-1} и специального вида линейными порядками на системе положительных корней A_{n-1} .

Библиография: 10 названий.

Наиболее естественным высшим аналогом отражения в конечной группе Кокстера, по-видимому, следует считать элемент наибольшей длины. Например, в отличие от другого претендента – элемента Кокстера – он имеет порядок 2 и не зависит от нумерации вершин соответствующей диаграммы Кокстера–Дынкина. Элемент Кокстера имеет другое преимущество – он определен и для бесконечных групп, порожденных отражениями, и, например при изучении распадений особенностей [1], именно элемент Кокстера (оператор классической монодромии) появляется как обобщенное отражение. В этой статье доказаны соотношения в симметрической группе (т.е. в группе Кокстера A_{n-1}) и в группе кос, которые обобщают соотношение $aba = bab$ и в которых роль обобщенных отражений играют элементы наибольшей длины в подгруппах симметрической группы (в группу кос они поднимаются как обобщения фундаментального элемента Гарсайда).

Доказанные соотношения тесно связаны с возникающими в теории высших порядков Брюа [2] специального вида линейными порядками (будем называть их допустимыми) на множестве k -подмножеств в $\bar{n} = \{1, \dots, n\}$. Сопоставим k -подмножеству $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \bar{n}$, $i_1 < \dots < i_k$, элемент наибольшей длины в группе перестановок на этом подмножестве, т.е. перестановку $(i_1, \dots, i_k) \rightarrow (i_k, \dots, i_1)$. В группу кос эта перестановка поднимается как обобщение фундаментального элемента Гарсайда (определение в следующем абзаце). Теперь для фиксированного k можно рассматривать произведения (например, в допустимых порядках) по всем k -подмножествам сопоставленных этим k -подмножествам элементов. Для $k = n - 1$ имеется лишь два допустимых порядка. Основной результат статьи состоит в доказательстве совпадения соответствующих этим двум порядкам произведений в симметрической группе и для четного n в группе кос. Отсюда следует, что для любого $k \leq n$ в симметрической группе совпадают произведения, отвечающие допустимым порядкам, которые отличаются лишь инверсиями (определение инверсии см. в п. 1). Это следствие обобщает (частично, по-

скольку для $2 < k < n - 1$ инверсии не транзитивны на допустимых порядках) известный для $k = 2$ факт, а именно: транспозиции в симметрической группе взаимно однозначно соответствуют 2-подмножествам в $\bar{n}$ и произведение всех транспозиций в любом допустимом порядке совпадает с элементом наибольшей длины, т.е. с перестановкой $(1, \dots, n) \rightarrow (n, \dots, 1)$ [3], [4].

Для точной формулировки результата введем обозначения. В группе кос

$$B_n = \langle b_1, \dots, b_{n-1} \mid b_i b_{i+1} b_i = b_{i+1} b_i b_{i+1}, b_j b_m = b_m b_j, |j - m| > 1 \rangle$$

рассмотрим элементы

$$h(i, j) = \prod_{m=i}^j b_m, \quad b(i, j) = h(i, j) b_j^{-1} h(j, i)$$

(знак $\prod$ используется в статье для обозначения произведений с некоммутирующими сомножителями и предполагается, что перемножение производится в порядке изменения индекса от нижнего до верхнего, причем индекс может как возрастать, так и убывать). Пусть для $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \bar{n}, i_1 < \dots < i_k$,

$$e_I = \prod_{j=1}^{[k/2]} b(i_j, i_{k+1-j} - 1), \quad e_i = e_{\bar{n} \setminus \{i\}}.$$

Согласно лемме 4 в п. 1 $e_{\bar{n}}$ совпадает с фундаментальным элементом Гарсайда. В статье для четного n доказано следующее соотношение в B_n :

$$\prod_{i=1}^n e_i = \prod_{i=n}^1 e_i.$$

В группе перестановок такое соотношение (с заменой b_i на транспозицию $(i, i + 1)$) доказано для любого n . Например, для $n = 4$ имеем

$$b_1 b_2 b_1 (b_1 b_2 b_3 b_2 b_1)^2 b_2 b_3 b_2 = b_2 b_3 b_2 (b_1 b_2 b_3 b_2 b_1)^2 b_1 b_2 b_1.$$

Высшие порядки Брюа были введены Ю. А. Маниным и В. В. Шехтманом при изучении многомерного уравнения Янга–Бакстера. В теории уравнений Янга–Бакстера высшие соотношения в группе кос отвечают построению решений многомерных уравнений Янга–Бакстера из решений двумерного уравнения [5] (поскольку высшие соотношения в группе кос являются, конечно же, следствиями определяющих соотношений). В серии соотношений в группе кос, анонсированной в [5], приведенному выше соотношению для $n = 4$ по размерности отвечает соотношение

$$b_1 b_2 b_1 b_2 b_3 b_2 b_1 b_2 b_1 b_2 b_3 b_2 = b_2 b_3 b_2 b_1 b_2 b_1 b_2 b_3 b_2 b_1 b_2 b_1.$$

В п. 4 мы выразим через фундаментальный элемент Гарсайда левую и правую части соотношений из [5].

С каждым допустимым порядком на транспозициях из симметрической группы связаны две таблицы Юнга [3], [4]. Очевидное обобщение для одной из этих таблиц для $k > 2$ приводится в [6] (используются многомерные таблицы Юнга). В п. 5, исходя из рассмотрения элемента наибольшей длины как обобщения транспозиции, мы сопоставим для четного k каждому допустимому порядку обычную двумерную таблицу Юнга. Возможно, такой подход окажется более перспективным для ответа на вопрос Манина и Шехтмана [2] о перенесении на допустимые порядки на k -множествах в $\bar{n}$ результатов [4].

1. Обозначения и вспомогательные формулы. Пусть S_n – группа перестановок на $\overline{n}$, $\pi: B_n \rightarrow S_n: b_i \mapsto (i, i+1)$ – естественный эпиморфизм, R_n – автоморфизм группы B_n , действующий на образующих следующим образом: $R_n(b_i) = b_{n-i}$ [7], $\omega_n: (1, \dots, n) \rightarrow (n, \dots, 1)$ – элемент наибольшей длины в S_n относительно множества порождающих $(i, i+1), i = 1, \dots, n-1$,

$$\Delta_n = \prod_{i=n-1}^1 h(1, i)$$

– фундаментальный элемент Гарсайда в B_n [7]. Известно, что $\pi(\Delta_n) = \omega_n$ [8].

ЛЕММА 1. $b(i, j) = b(j, i)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $i = j$ равенство выполняется; для $|i - j| = 1$ оно совпадает с одним из определяющих соотношений в группе кос; осталось доказать его для $|i - j| > 1$. Доказываем по индукции:

$$\begin{aligned} b(i, j) &= h(i, j-2)b_{j-1}b_jb_{j-1}h(j-2, i) = h(i, j-2)b_jb_{j-1}b_jh(j-2, i) \\ &= b_jh(i, j-2)b_{j-1}h(j-2, i)b_j = b_jb(i, j-1)b_j = b_jb(j-1, i)b_j = b(j, i). \end{aligned}$$

ЛЕММА 2 [7]. *Справедливы следующие соотношения:*

- а) $b_k h(i, j) = \begin{cases} h(i, j)b_{k-1}, & \text{если } i < k \leq j, \\ h(i, j)b_{k+1}, & \text{если } i \geq k > j; \end{cases}$
- б) $R_n(\Delta_n) = \Delta_n$;
- в) $b\Delta_n^{2m-1} = \Delta_n^{2m-1}R_n(b)$, $b\Delta_n^{2m} = \Delta_n^{2m}b$, $b \in B_n$, $m \in \mathbb{Z}$.

Следующая лемма доказывается многократным применением соотношения а) леммы 2.

ЛЕММА 3. *Если $i < k \leq m < j$, то $b(i, j)b(k, m) = b(k, m)b(i, j)$.*

ЛЕММА 4. $\Delta_n = \prod_{i=1}^{[n/2]} b(i, n-i)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $b(i, j)$ является поднятием транспозиции, т.е.

$$\pi(b(i, j)) = \begin{cases} (i, j+1), & \text{если } i \leq j, \\ (i+1, j), & \text{если } i \geq j, \end{cases}$$

то π переводит правую часть доказываемого равенства в ω_0 . В разложении правой части по образующим столько же элементов, сколько и в разложении Δ_n из определения. Лемма вытекает из этих двух замечаний согласно предложению 5.7 (ii) из [8].

ЗАМЕЧАНИЕ. Согласно лемме 3 равенство леммы 4 представляет Δ_n в виде произведения коммутирующих элементов. В теории конечных групп Кокстера этот факт соответствует известному представлению элемента наибольшей длины в группе в виде произведения коммутирующих инволюций. Коммутирование сомножителей в равенстве леммы 4 является ключевым фактом в доказательстве основных результатов статьи.

Определим допустимые порядки на множестве $C(n, k)$ k -подмножеств в $\bar{n}$. Полное определение высших порядков Брюа нам не понадобится, его можно найти в [2].

Для $e \in C(n, k+1)$ назовем *пакетом* в $C(n, k)$ множество $\{d : d \in C(n, k), d \subset e\}$. Например, единственный пакет в $C(n, n-1)$ совпадает с $C(n, n-1)$. На $C(n, k)$ имеется естественный линейный порядок – лексикографический. Произольный порядок на $C(n, k)$ назовем *допустимым*, если на каждом пакете он индуцирует либо лексикографический порядок, либо обратный лексикографическому. В частности, любой линейный порядок на $C(n, 1)$ является допустимым и множество линейных порядков на $C(n, 1)$ совпадает с множеством перестановок $\bar{n}$.

Скажем, что два допустимых порядка *связаны инверсией*, если они отличаются порядком на единственном пакете, элементы которого расположены в обоих допустимых порядках последовательно (между ними нет элементов, не принадлежащих этому пакету).

2. В этом пункте доказан основной результат статьи.

ТЕОРЕМА 1. *Для четного n*

$$\prod_{i=1}^n e_i = \prod_{i=n}^1 e_i.$$

Доказательство вытекает из следующих двух лемм. Введем обозначения

$$E(i, j) = \prod_{k=j}^i e_k, \quad \Delta(i, j) = \prod_{k=j-1}^i h(i, k).$$

В частности, $\Delta(1, n) = \Delta_n$.

ЛЕММА 5. *Имеет место равенство*

$$E(1, n) = \Delta_n h(2, n-1) E(2, n-1) (b(1, n-1))^{n-4} h(1, n-2) \Delta_n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению в $e_i, i = 2, \dots, n-1$, входит множитель $b(1, n-1)$, и согласно лемме 3 он коммутирует со всеми другими множителями в $e_i, i = 2, \dots, n-1$. Поэтому все множители $b(1, n-1)$ можно вынести из произведения $e_{n-1} \cdots e_2$, и то, что останется от этого произведения, также по определению совпадает с $E(2, n-1)$:

$$E(1, n) = e_n b(1, n-1) E(2, n-1) (b(1, n-1))^{n-4} b(1, n-1) e_1.$$

Согласно лемме 4

$$e_n = \Delta_{n-1} = \prod_{i=n-2}^1 h(1, i).$$

По лемме 3 из [7]

$$\Delta_{n-1} = \prod_{i=1}^{n-2} h(1, i).$$

Поэтому по лемме 1

$$e_n b(1, n-1) = e_n b(n-1, 1) = \left(\prod_{i=1}^{n-2} h(i, 1) \right) h(n-1, 1) h(2, n-1) = \Delta_n h(2, n-1).$$

По лемме 1 $R_n(e_1) = e_n$. Поэтому

$$\begin{aligned} b(1, n-1)e_1 &= R_n(b(n-1, 1)\Delta_{n-1}) = R_n\left(h(n-1, 2)h(1, n-1) \prod_{i=n-2}^1 h(1, i)\right) \\ &= R_n(h(n-1, 2)\Delta_n) = h(1, n-2)\Delta_n. \end{aligned}$$

ЛЕММА 6. Для четного n

$$\prod_{i=n}^1 e_i = \prod_{i=1}^{n/2} b_{2i-1}^{-1} \Delta_n^{n-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказываем по индукции, используя лемму 5:

$$\begin{aligned} \prod_{i=n}^1 e_i &= E(1, n) = \Delta_n h(2, n-1) E(2, n-1) (b(1, n-1))^{n-4} h(1, n-2) \Delta_n \\ &= \Delta_n h(2, n-1) \prod_{i=1}^{(n-2)/2} b_{2i}^{-1} (\Delta(2, n-1))^{n-3} (b(1, n-1))^{n-4} h(1, n-2) \Delta_n. \end{aligned}$$

По лемме 4

$$\Delta(2, n-1) = \prod_{i=2}^{n/2} b(i, n-i).$$

Поэтому $\Delta(2, n-1)b(1, n-1) = \Delta_n$ и

$$\prod_{i=n}^1 e_i = \Delta_n h(2, n-1) \prod_{i=1}^{(n-2)/2} b_{2i}^{-1} \Delta_n^{n-3} (b(1, n-1))^{-1} h(1, n-2) \Delta_n.$$

Пользуясь соотношением в) леммы 2, собираем вместе все Δ_n :

$$\prod_{i=n}^1 e_i = h(n-2, 1) \prod_{i=1}^{(n-2)/2} b_{n-2i}^{-1} (b(n-1, 1))^{-1} h(1, n-2) \Delta_n^{n-1}.$$

Аналогично доказательству соотношения а) леммы 2 с использованием соотношений

$$b_i b_{i+1} b_i^{-1} = b_{i+1}^{-1} b_i b_{i+1}$$

получаем равенство $h(n-2, 1) b_i^{-1} = b_{i-1}^{-1} h(n-2, 1)$. Поэтому, используя лемму 1, имеем

$$\prod_{i=n}^1 e_i = \prod_{i=1}^{(n-2)/2} b_{n-2i-1} h(n-2, 1) (b(1, n-1))^{-1} h(1, n-2) \Delta_n^{n-1} = \prod_{i=1}^{n/2} b_{2i-1} \Delta_n^{n-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. По лемме 1

$$R_n \left(\prod_{i=n}^1 e_i \right) = \prod_{i=1}^n e_i.$$

Поскольку все b_{2i-1} коммутируют между собой, согласно соотношению б) леммы 2

$$R_n \left(\prod_{i=1}^{n/2} b_{2i-1} \Delta_n^{n-1} \right) = \prod_{i=1}^{n/2} b_{n-2i-1} \Delta_n^{n-1} = \prod_{i=1}^{n/2} b_{2i-1} \Delta_n^{n-1}.$$

Теорема доказана.

Приведем еще две формулы, которые делают более понятным различие между четным и нечетным n в теореме 1. Доказательство этих формул легко получается по индукции с использованием рекуррентного соотношения из леммы 5. Напомним, что $R_n^2 = \text{Id}$, и поэтому

$$R_n^i = \begin{cases} \text{Id} & \text{для четных } i, \\ R_n & \text{для нечетных } i. \end{cases}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. а) Для четных n

$$\prod_{i=n}^1 e_i = \prod_{i=1}^{n/2} R_n^{i+1} (h(n-i-1, i)) \Delta_n \prod_{i=n/2}^1 R_n^{i+1} (h(i, n-i-1)) \Delta_n^{n-3}.$$

б) Для нечетных n

$$\prod_{i=n}^1 e_i = \prod_{i=1}^{(n-1)/2} R_n^{i+1} (h(n-i-1, i)) \prod_{i=(n-1)/2}^1 R_n^{i+1} (h(i, n-i-1)) \Delta_n^{n-2}.$$

3. Результаты о симметрической группе.

ТЕОРЕМА 2. а) *Имеет место равенство*

$$\pi\left(\prod_{i=n}^1 e_i\right) = \pi\left(\prod_{i=1}^n e_i\right).$$

б) *Для четных n*

$$\pi\left(\prod_{i=n}^1 e_i\right) = \prod_{i=1}^{n/2} (2i-1, 2i)\omega_n.$$

в) *Для нечетных n*

$$\pi\left(\prod_{i=n}^1 e_i\right) = \omega_n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для четных n теорема 2 следует из теоремы 1. Утверждение в) доказывается аналогично лемме 6 по индукции. Оно также вытекает из утверждения б) предложения 1, поскольку

$$\pi(\Delta_n) = \omega_n, \quad \omega_n^2 = \text{Id}, \quad \pi(h(i, j)h(j, i)) = \text{Id}.$$

Утверждение а) для нечетных n следует из утверждения в) так же, как теорема 1 следует из леммы 6. Теорема доказана.

Сопоставим допустимому порядку $d \in A(n, k)$ перестановку

$$E_d = \prod_{I \in C(n, k)} \pi(e_I) \in S_n$$

(сомножители расположены в порядке d).

Из теоремы 2 вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Если допустимые порядки $d_1, d_2 \in A(n, k)$ связаны инверсией, то $E_{d_1} = E_{d_2}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Тем же методом обобщения можно доказать теоремы 1 и 2 для более общего определения пакета. А именно, для $m \geq 1$ назовем m -пакетом множество

$$\{\bar{n} \setminus \{1, \dots, m\}, \bar{n} \setminus \{2, \dots, m+1\}, \dots, \bar{n} \setminus \{n-m+1, \dots, n\}\}.$$

В определении высших порядков Брюа и в теоремах 1, 2 использовались 1-пакеты.

4. В этом пункте вычисляются в терминах фундаментального элемента Гарсайда Δ_n левая и правая части анонсированных в [5] соотношений в группе кос. В наших обозначениях соотношения из [5] выглядят следующим образом:

$$\Delta(1, n-1)\Delta(2, n)\Delta(1, n-1) \cdots = \Delta(2, n)\Delta(1, n-1)\Delta(2, n) \cdots \quad (1)$$

(по n сомножителей с каждой стороны). Например, для $n = 3$ $\Delta(1, 2) = b_1$, $\Delta(2, 3) = b_2$, $b_1 b_2 b_1 = b_2 b_1 b_2$; для $n = 4$ $\Delta(1, 3) = b_1 b_2 b_1$, $\Delta(2, 4) = b_2 b_3 b_2$, и получается указанное во введении соотношение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Левая и правая части соотношения (1) равны Δ_n^{n-2} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению

$$\Delta(1, n-1) = \Delta_{n-1} = (h(1, n-1))^{-1} \Delta_n.$$

По лемме 1 и соотношению б) леммы 2

$$\Delta(2, n) = R_n(\Delta(1, n-1)) = (h(n-1, 1))^{-1} \Delta_n.$$

Согласно соотношению в) леммы 2

$$\Delta_n h(1, n-1) = h(n-1, 1) \Delta_n.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \Delta(1, n-1) \Delta(2, n) \Delta(1, n-1) \cdots &= (h(1, n-1))^{-n} \Delta_n^n, \\ \Delta(2, n) \Delta(1, n-1) \Delta(2, n) \cdots &= (h(n-1, 1))^{-n} \Delta_n^n. \end{aligned}$$

Согласно [9]

$$(h(n-1, 1))^n = (h(1, n-1))^n = \Delta_n^2.$$

5. Задачи.

ЗАДАЧА 1. Следующее определение обобщает на $A(n, 2m)$ одно из двух отображений из $A(n, 2)$ в множество таблиц Юнга [3]. Задача состоит в том, чтобы определить обобщение второго отображения и описать их связи аналогично [3].

Пусть $m \leq n/2$. Занумеруем в лексикографическом порядке элементы $C(n, m)$. Тогда любому $\{i_1, \dots, i_{2m}\} \in C(n, 2m)$, $i_1 < \dots < i_{2m}$, отвечает пара чисел $i < j$, где i является номером $\{i_1, \dots, i_m\}$, а j — номером $\{i_{m+1}, \dots, i_{2m}\}$. Тем самым, любому линейному порядку на $C(n, 2m)$ (и, в частности, любому элементу $A(n, 2m)$) соответствует таблица Юнга, в которой на месте ij стоит номер в линейном порядке элемента из $C(n, 2m)$, соответствующего ij (предполагается, что таблица Юнга состоит из тех клеток ij , которым соответствует элемент $C(n, 2m)$).

ЗАДАЧА 2. Найти определяющие соотношения для групп

$$\langle e_I \mid |I| = k \rangle \subset B_n, \quad \langle \pi(e_I) \mid |I| = k \rangle \subset S_n.$$

ЗАДАЧА 3. В [9], [10] доказано следующее обобщение соотношения $aba = bab$ в группе кос B_n (гипотеза Кокстера): если $P = b_1 b_3 \dots$, $Q = b_2 b_4 \dots$, то $PQP \dots = QPQ \dots$ (по n сомножителей с каждой стороны). Существует ли аналог этого соотношения для групп из задачи 2?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Т. 2. М.: Наука, 1984.
- [2] Manin Y., Schechtman V. Arrangements of hyperplanes, higher braid groups and higher Bruhat orders // Adv. Stud. Pure Math. 1985. V. 44. P. 289–308.
- [3] Edelman P., Greene C. Balanced tableaux // Adv. Math. 1987. V. 63. P. 42–99.
- [4] Stanley R. On the number of reduced decomposition of elements of Coxeter groups // European J. Combin. 1984. V. 5. P. 359–372.
- [5] Li Y., Hu Z. Solution of n -simplex equation from solutions of braid group representation // J. Phys. A. 1995. V. 28. P. L219–L223.
- [6] Ильюта Г. Г. Геометрические реализации высших порядков Брюа и M -морсификации // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 6. С. 91–100.
- [7] Гарсайд Ф. Группа кос и другие группы // Математика (сб. переводов). 1970. Т. 14. № 4. С. 116–132.
- [8] Брискорн Э., Сайто К. Группы Артина и группы Кокстера // Математика (сб. переводов). 1974. Т. 18. № 3. С. 56–79.
- [9] Enomoto H., Mizutani H., Tokushige N. A word problem in Artin semigroups // Discrete Math. 1992. V. 104. P. 159–166.
- [10] Servatius H. An Artin relation of length n in the braid group // Discrete Math. 1992. V. 104. P. 185–189.

Коломенский педагогический институт

Поступило
15.10.98