Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, Асимптотика при $N \rightarrow \infty$ для N классических фермионов и бозонов, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 6, 849–866

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1229>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 16:37:47

УДК 517.9

АСИМПТОТИКА ПРИ $N \rightarrow \infty$ ДЛЯ N КЛАССИЧЕСКИХ ФЕРМИОНОВ И БОЗОНОВ

В. П. Маслов

Изучается асимптотика спектра некоторых осредненных операторов, связанных с оператором Лиувилля.

Библиография: 10 названий.

Мы рассмотрим уравнение Лиувилля для N тождественных частиц

$$\begin{aligned} & \hat{\mathcal{L}}_N \psi_N(q_1, p_1, \sigma_1; \dots; q_N, p_N, \sigma_N) \\ & \equiv -i \left(\sum_{j=1}^N p_j \frac{\partial}{\partial q_j} + \sum_{1 \leq j < l \leq N} \frac{\partial V(q_j - q_l)}{\partial q_j} \left(\frac{\partial}{\partial p_l} - \frac{\partial}{\partial p_j} \right) \right) \psi_N = \gamma \psi_N, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\psi_N \in L^2$ – антисимметрическая (в случае фермионов) или симметрическая (в случае бозонов) функция относительно перестановок переменных (q_j, p_j, σ_j) и (q_k, p_k, σ_k) при $j, k = 1, \dots, N$ и где $q_j, p_j \in \mathbb{R}^3$, σ_j – спиновая переменная, пробегающая конечное множество значений I .

Уравнение Лиувилля является пределом при $\hbar \rightarrow 0$ уравнения Вигнера, собственные значения которого равны разности собственных значений уравнения Шрёдингера, а собственные функции выражаются через пару соответствующих собственных функций уравнения Шрёдингера, причем если одна из них симметрична относительно перестановки частиц, а другая антисимметрична, то собственная функция уравнения Вигнера будет антисимметрична относительно перестановки частиц. Следовательно, и обобщения собственных функций предельного уравнения Лиувилля будут антисимметричны относительно перестановки частиц.

Таким образом, имеет смысл изучать спектр антисимметрических относительно перестановки частиц решений уравнений Лиувилля. Мы условно называем такие решения “классическими фермионами”. Аналогично, обобщенные симметрические собственные функции уравнения Лиувилля будем называть условно “классическими бозонами”.

Разумеется, спектр уравнения Лиувилля для симметрических решений содержит асимптотику разности собственных значений не только бозонных решений уравнения Шрёдингера. Однако скачок термодинамических величин для чисто бозонных квантовых решений, если он сохраняется при $\hbar \rightarrow 0$, не может не сказаться на скачке аналогичных термодинамических величин для уравнения Лиувилля. Таких скачков для

“классических бозонов” может быть только больше, т.е. могут появиться лишние, “паразитные” фазовые переходы.

Пусть $k, M \geq 0$ – целые числа. Обозначим

$$x_j \equiv (q_j, p_j, \sigma_j), \quad \int dx_j = \sum_{\sigma_j} \int dq_j dp_j.$$

Рассмотрим гильбертово пространство функций вида

$$\Psi(x_1, y_1; \dots; x_M, y_M; z_1, j_1; \dots; z_k, j_k),$$

где $x_l, y_l, z_m \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times I$, $j_m = 1, \dots, \infty$ для всех $m = 1, \dots, k$, и $l = 1, \dots, M$, которые удовлетворяют условиям

- а) функции симметричны относительно перестановок любых пар переменных (x_l, y_l) и (x_m, y_m) ;
- б) симметричны относительно перестановок любых пар переменных (z_l, j_l) и (z_m, j_m) .

Скалярное произведение имеет вид

$$\sum_{j_1, \dots, j_k=1}^{\infty} \int dx_1 dy_1 \dots dx_M dy_M dz_1 \dots dz_k \Psi^*(x_1, y_1; \dots; x_M, y_M; z_1, j_1; \dots; z_k, j_k) \\ \times \Phi(x_1, y_1; \dots; x_M, y_M; z_1, j_1; \dots; z_k, j_k) \stackrel{\text{def}}{=} (\Psi, \Phi).$$

Будем обозначать это пространство через $\mathcal{F}_{M,k}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Рассмотрим множество таких элементов $\Psi_{M,k} \in \mathcal{F}_{M,k}$, которые имеют вид

$$\Psi_{M,k}(x_1, y_1; \dots; x_M, y_M; z_1, j_1; \dots; z_k, j_k) \\ = f_{M,k}(x_1, y_1, \dots, x_M, y_M, z_1, \dots, z_k) \varepsilon_{j_1, \dots, j_k}^k, \quad (2)$$

где $f_{M,k}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k+2M})$ – антисимметричные относительно перестановок любых пар ξ_l и ξ_m функции, $\varepsilon_{j_1, \dots, j_k}^k$ – антисимметрическая относительно перестановок j_α и j_β функция, определяемая условиями

$$\varepsilon_{1,2,\dots,k}^k = 1, \quad \varepsilon_{k+s,j_2,\dots,j_k}^k = 0, \quad s > 0.$$

Элементы $\Psi_{M,k}$ вида (2) при фиксированном $\varepsilon_{j_1, \dots, j_k}^k$ образуют подпространство $\mathcal{F}_{M,k}^F$ пространства $\mathcal{F}_{M,k}$, называемое *фермионным подпространством*. Проектор на это подпространство будет обозначаться как $\hat{P}_{M,k}^F$:

$$\hat{P}_{M,k}^F: \mathcal{F}_{M,k} \rightarrow \mathcal{F}_{M,k}^F.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Определим *бозонное подпространство* $\mathcal{F}_{M,k}^B$. Пространство $\mathcal{F}_{M,k}^B$ является подпространством пространства $\mathcal{F}_{M,k}$ и состоит из таких элементов $\mathcal{F}_{M,k}$, которые симметричны относительно перестановок любых x_i и z_l и симметричны относительно перестановок любых j_l и j_m . Проектор на это подпространство будет обозначаться как $\hat{P}_{M,k}^B$:

$$\hat{P}_{M,k}^B: \mathcal{F}_{M,k} \rightarrow \mathcal{F}_{M,k}^B.$$

Рассмотрим теперь гильбертово пространство $\mathcal{F}$, элементами которого являются бесконечные наборы $\Psi = \{\Psi_{M,k}\}_{M,k}$, $\Psi_{M,k} \in \mathcal{F}_{M,k}$,

$$\|\Psi\|^2 = \sum_{M,k} \|\Psi_{M,k}\|^2 < \infty.$$

Это пространство является бесконечной прямой суммой пространств $\mathcal{F} = \bigoplus_{M,k} \mathcal{F}_{M,k}$ и называется *пространством Фока* [2]. Отметим, что пространство $\mathcal{F}$ отличается от обычных пространств Фока, используемых при описании многочастичных систем. Обозначим оператор проектирования на соответствующее слагаемое прямой суммы через $\hat{P}_{M,k}$:

$$\hat{P}_{M,k}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{M,k}, \quad \hat{P}_{M,k} \Psi = \Psi_{M,k},$$

а оператор вложения $\mathcal{F}_{M,k}$ в $\mathcal{F}$ как $\hat{i}_{M,k}$:

$$\hat{i}_{M,k}: \mathcal{F}_{M,k} \rightarrow \mathcal{F}, \quad \hat{i}_{M,k} \varphi = \{\delta_{Mm} \delta_{ks} \varphi\}_{m,s}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Введем понятие осредненного оператора в фермионном случае. Пусть задан набор операторов $\{\hat{A}_N\}_N$ в пространстве функций

$$\psi_N(x_1; \dots; x_N) \in L^2$$

антисимметричных относительно перестановок переменных x_i и x_j , $x_i \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times I$. Им отвечают операторы на подпространствах $\mathcal{F}_{m,s}^F$ функций вида (2),

$$\hat{\tilde{A}}_{2m+s} \Psi_{m,s} = (\hat{A}_{2m+s} f_{m,s}) \varepsilon_{j_1, \dots, j_s}^s.$$

Пусть $k \geq 0$ – заданное целое число. *Осредненным оператором* $\bar{\hat{A}}$ будем называть оператор в пространстве Фока $\mathcal{F}$,

$$\bar{\hat{A}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+k)!}{4^m m!} \hat{i}_{m,k} \hat{\tilde{A}}_{2m+k} \hat{P}_{m,k}^F \hat{P}_{m,k}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3а. Введем понятие осредненного оператора в бозонном случае. Пусть задан набор операторов $\{\hat{A}_N\}_N$ в пространстве функций

$$\psi_N(x_1; \dots; x_N) \in L^2$$

симметричных относительно перестановок переменных x_i и x_j , $x_i \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times I$. Им отвечают операторы $\hat{\tilde{A}}_{m,s}$ на подпространствах $\mathcal{F}_{m,s}^B$, действующие как единичные по дискретным переменным j_l . Осредненным оператором $\bar{\hat{A}}$ будем называть оператор в пространстве Фока $\mathcal{F}$,

$$\bar{\hat{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+k)!}{4^m m!} \hat{i}_{m,k} \hat{\tilde{A}}_{2m+k} \hat{P}_{m,k}^B \hat{P}_{m,k}.$$

ПРИМЕР 1. Рассмотрим вектор $\Phi = \{\Phi_{m,s}\}_{m,s} \in \mathcal{F}$ такой, что $\Phi_{m,k} = 0$, если $m > M$. В этом случае действие фермионного осредненного оператора $\bar{\hat{A}}$ на Φ дается конечной суммой

$$\bar{\hat{A}}\Phi = \sum_{m=0}^M \frac{(2m+k)!}{4^m m!} \hat{i}_{m,k} \hat{\tilde{A}}_{2m+k} \hat{P}_{m,k}^F \Phi_{m,k}.$$

Если $\Phi_{m,k} = 0$ для всех $m \neq M$, то от суммы остается единственный член:

$$\bar{\hat{A}}\Phi = \frac{(2M+k)!}{4^M M!} \hat{i}_{M,k} \hat{\tilde{A}}_{2M+k} \hat{P}_{M,k}^F \Phi_{M,k}.$$

ПРИМЕР 2. Пусть $\hat{A}_N = (N-k)/2$. Соответствующий осредненный оператор в фермионном случае имеет вид

$$\bar{\bar{M}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+k)!}{4^m m!} m \hat{i}_{m,k} \hat{P}_{m,k}^F \hat{P}_{m,k}.$$

ПРИМЕР 3. Пусть $\hat{A}_N = \hat{\mathbf{E}}$, где $\hat{\mathbf{E}}$ – тождественный оператор. Осредненный оператор в фермионном случае имеет вид

$$\bar{\hat{\mathbf{E}}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+k)!}{4^m m!} \hat{i}_{m,k} \hat{P}_{m,k}^F \hat{P}_{m,k},$$

а в бозонном –

$$\bar{\hat{\mathbf{E}}} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+k)!}{4^m m!} \hat{i}_{m,k} \hat{P}_{m,k}^B \hat{P}_{m,k}.$$

Пусть задан некоторый элемент $\Psi \in \mathcal{F}$. Обозначим

$$\bar{\bar{M}} = \frac{(\Psi, \bar{\bar{M}}\Psi)}{(\Psi, \bar{\hat{\mathbf{E}}}\Psi)} = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+k)!}{4^m m!} m (\Psi, \hat{i}_{m,k} \hat{P}_{m,k}^F \hat{P}_{m,k} \Psi)}{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+k)!}{4^m m!} (\Psi, \hat{i}_{m,k} \hat{P}_{m,k}^F \hat{P}_{m,k} \Psi)}$$

в фермионном случае и

$$\begin{aligned}\overline{M} &= \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+k)!}{4^m m!} m(\Psi, \hat{i}_{mk} \hat{P}_{mk}^B \hat{P}_{mk} \Psi)}{\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+k)!}{4^m m!} (\Psi, \hat{i}_{mk} \hat{P}_{mk}^B \hat{P}_{mk} \Psi)}, \\ \overline{k} &= \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+k)!}{4^m m!} m(\Psi, \hat{i}_{mk} \hat{P}_{mk}^B \hat{P}_{mk} \Psi)}{\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+k)!}{4^m m!} (\Psi, \hat{i}_{mk} \hat{P}_{mk}^B \hat{P}_{mk} \Psi)}\end{aligned}$$

в бозонном.

Мы рассмотрели здесь лишь холостые и парные частицы. Совершенно аналогично можно рассмотреть тройки, четверки и т.д. и провести суммирование по ним (кластерное суммирование). Здесь мы проведем подробное исследование лишь для приведенного выше случая.

В качестве операторов $\hat{A}_N$ мы рассмотрим теперь операторы Лиувилля (1). Для того чтобы сформулировать теорему для фермионов, т.е. в случае, когда рассматриваются лишь антисимметрические решения (1), введем *бозонные* операторы рождения и уничтожения. Для определенности, спин фермионов будет считаться равным $1/2$, т.е. спиновая переменная $\sigma \in \{1, 2\}$.

Операторы рождения и уничтожения [2] в пространстве Фока определяются, как известно, следующим образом:

$$\begin{aligned}(\hat{B}^+(x, y)\Psi)_{M,k}(x_1, y_1; \dots; x_M, y_M; z_1, j_1; \dots; z_k, j_k) \\ = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{l=1}^M \delta(x - x_l) \delta(y - y_l) \Psi_{M-1,k}(x_1, y_1; \dots; \hat{x}_l, \hat{y}_l; \dots; x_M, y_M; z_1, j_1; \dots; z_k, j_k), \\ \text{при } M > 0,\end{aligned}\tag{3}$$

$$\begin{aligned}(\hat{B}^-(x, y)\Psi)_{M,k}(x_1, y_1; \dots; x_M, y_M; z_1, j_1; \dots; z_k, j_k) \\ = \sqrt{M+1} \Psi_{M+1,k}(x, y; x_1, y_1; \dots; x_M, y_M; z_1, j_1; \dots; z_k, j_k),\end{aligned}\tag{4}$$

где $\delta(x - x') = \delta(q - q') \delta(p - p') \delta_{\sigma\sigma'}$, $x = (q, p, \sigma)$, $x' = (q', p', \sigma')$, крышка над аргументом означает, что он пропущен, и, аналогично,

$$\begin{aligned}(\hat{b}^+(z, j)\Psi)_{M,k}(x_1, y_1; \dots; x_M, y_M; z_1, j_1; \dots; z_k, j_k) \\ = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{l=1}^M \delta(z - z_l) \delta_{jj_l} \Psi_{M,k-1}(x_1, y_1; \dots; x_M, y_M; z_1, j_1; \dots; \hat{z}_l, \hat{j}_l; \dots; z_k, j_k), \\ \text{при } k > 0,\end{aligned}\tag{5}$$

$$\begin{aligned}(\hat{b}^-(z, j)\Psi)_{M,k}(x_1, y_1; \dots; x_M, y_M; z_1, j_1; \dots; z_k, j_k) \\ = \sqrt{k+1} \Psi_{M,k+1}(x_1, y_1; \dots; x_M, y_M; z, j; z_1, j_1; \dots; z_k, j_k).\end{aligned}\tag{6}$$

Операторы (3), (5) называются *операторами рождения*, а операторы (4), (6) – *операторами уничтожения*. Вектор Ψ_0 пространства $\mathcal{F}$ такой, что

$$\Psi_{0M,k} = 0 \quad \text{при } (M, k) \neq (0, 0), \quad \Psi_{00,0} = 1,$$

называется *вакуумным вектором* [2] пространства Фока $\mathcal{F}$. Вектор Ψ_0 обладает свойством

$$\begin{aligned} \hat{B}^-(x, y)\Psi_0 &= 0 \quad \text{при всех } x, y, \\ \hat{b}^-(z, j)\Psi_0 &= 0 \quad \text{при всех } z, j. \end{aligned}$$

Как известно, элемент Ψ пространства Фока $\mathcal{F}$ может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} \Psi &= \sum_{M=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M!k!}} \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^{\infty} \int \cdots \int dx_1 dy_1 \cdots dx_M dy_M dz_1 \cdots dz_k \\ &\quad \times \Psi_{M,k}(x_1, y_1; \dots; x_M, y_M; z_1, j_1; \dots; z_k, j_k) \\ &\quad \times \hat{B}^+(x_1, y_1) \cdots \hat{B}^+(x_M, y_M) \hat{b}^+(z_1, j_1) \cdots \hat{b}^+(z_k, j_k) \Psi_0. \end{aligned} \quad (7)$$

Будем называть оператор, соответствующий набору $\{\hat{\mathcal{L}}_N - \gamma\}_N$, *осредненным оператором Гамильтона* и обозначать его как $\bar{\bar{\mathcal{L}}}$.

ТЕОРЕМА 1. *Осредненный оператор $\bar{\bar{\mathcal{L}}}$ может быть записан в виде*

$$\bar{\bar{\mathcal{L}}} = \mathcal{L}(\hat{B}^+(x_1, \sigma_1; x_2, \sigma_2), \hat{b}^+(y, \gamma, j), \hat{b}^-(y', \gamma', j') \hat{B}^-(x'_1, \sigma'_1; x'_2, \sigma'_2)),$$

где функция $\mathcal{L}$ имеет вид

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}(\Phi^*(x_1, x_2), \varphi^*(y, j), \varphi(y', j'), \Phi(x'_1, x'_2)) \\ &= \left\{ \int dx \left(-ip \frac{\partial}{\partial q} - \gamma \right) G(\overset{3}{x}, \overset{1}{x}) - \frac{i}{2} \iint dx dx' (\nabla V)(q - q') \left(\frac{\partial}{\partial p'} - \frac{\partial}{\partial p} \right) \right. \\ &\quad \times (G(\overset{3}{x}; \overset{1}{x}) G(\overset{3}{x}'; \overset{1}{x}') - G(\overset{3}{x}; \overset{1}{x}') G(\overset{3}{x}'; \overset{1}{x}) + R^*(\overset{3}{x}'; \overset{3}{x}) R(\overset{1}{x}'; \overset{1}{x})) \Big\} \\ &\quad \times \sum_{M=0}^{\infty} \left[\frac{(2M+k)!}{4^M (M!)^2 k!} \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^{\infty} \int \cdots \int dx_1 \cdots dx_{2M} dy_1 \cdots dy_k \right. \\ &\quad \times \Phi^*(x_1; x_2) \cdots \Phi^*(x_{2M-1}; x_{2M}) \varphi^*(y_1, j_1) \cdots \varphi^*(y_k, j_k) \\ &\quad \times \underset{x_1, \dots, x_{2M}, y_1, \dots, y_k}{\text{Asymm}} \underset{j_1, \dots, j_k}{\text{Asymm}} \Phi(x_1, x_2) \cdots \Phi(x_{2M-1}, x_{2M}) \varphi(y_k, j_k) \cdots \varphi(y_1, j_1) \\ &\quad \times \exp \left(- \iint dz dz' \Phi^*(z; z') \Phi(z; z') \right) \exp \left(- \sum_{l=1}^{\infty} \int dw \varphi^*(w, l) \varphi(w, l) \right) \Big], \end{aligned} \quad (8)$$

здесь числа над операторами обозначают порядок их действия, $x = (q, p, \sigma)$, $x' = (q', p', \sigma')$, Asymm – оператор антисимметризации (индексы – переменные, по которым он действует), функции $G(x_1, x_2)$ и $R(x_1, x_2)$ следующим образом выражаются через функции Φ^* , Φ , φ^* , φ :

$$G(x_1; x_2) = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\varphi}^*(x_1, j) \tilde{\varphi}(x_2, j) + \iint dz dw \tilde{\Phi}^*(z, x_1) \tilde{\Phi}(z, w) M(w, x_2), \quad (9)$$

$$R(x_1, x_2) = - \int dz \tilde{\Phi}(x_1, z) M(z, x_2), \quad (10)$$

где

$$\tilde{\varphi}(x, j) = \sum_{l=1}^{\infty} \Lambda_{jl} \varphi(x, l),$$

а Λ_{jl} – числа такие, что

$$\int dx \tilde{\varphi}^*(x, j) \tilde{\varphi}(x, l) = \delta_{jl},$$

где

$$\tilde{\Phi}(x_1, x_2) = \text{Asymm}_{x_1, x_2} \left(\Phi(x_1, x_2) - \sum_{j=1}^{\infty} \int dy \Phi(x_1, y) \tilde{\varphi}^*(y, j) \tilde{\varphi}(x_2, j) \right)$$

и $M(x_1, x_2)$ определяется как решение уравнения

$$M(x_1, x_2) + \iint dz dw M(x_1, z) \tilde{\Phi}^*(w, z) \tilde{\Phi}(w, x_2) = \delta(x_1 - x_2). \quad (11)$$

Для доказательства этой теоремы потребуются следующие два вспомогательных утверждения.

Рассмотрим антисимметричное пространство Фока F [2], элементами которого являются бесконечные последовательности

$$f = (f_0, f_1(x_1), f_2(x_1, x_2), \dots),$$

где $f_0 \in \mathbb{C}$, $f_s = \text{Asymm}_{x_1, \dots, x_s} f_s \in L^2$. Операторы рождения и уничтожения в этом пространстве определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} (a^+(x)f)_s &= \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{j=1}^s (-1)^j \delta(x - x_j) f_{s-1}(x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_s), \\ (a^-(x)f)_s &= \sqrt{s+1} f_{s+1}(x, x_1, \dots, x_s). \end{aligned} \quad (12)$$

Имеют место перестановочные соотношения

$$\begin{aligned} a^-(x) a^+(y) + a^+(y) a^-(x) &= \delta(x - y), \\ a^-(x) a^-(y) &= -a^-(y) a^-(x), \quad a^+(x) a^+(y) = -a^+(y) a^+(x). \end{aligned}$$

Вакуумный вектор в пространстве F имеет вид $Y^{(0)} = (1, 0, 0, \dots)$.

ЛЕММА 1. Функции $G(x, y)$ и $R(x, y)$, определенные в формулировке теоремы 1, можно записать в виде

$$G(x, y) = \frac{(Y, a^+(x) a^-(y) Y)}{(Y, Y)}, \quad R(x, y) = \frac{(Y, a^-(x) a^+(y) Y)}{(Y, Y)},$$

где $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в F ,

$$Y = \int dx_1 \cdots dx_k \varphi(x_1, 1) \cdots \varphi(x_k, k) a^+(x_1) \cdots a^+(x_k) \\ \times \exp \left\{ \frac{1}{2} \int dy dz \Phi(y, z) a^+(y) a^+(z) \right\} Y^{(0)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения операторов рождения и уничтожения в F следует, что $(2M + k)$ -е компоненты вектора Y имеют вид

$$Y_{2M+k}(x_1, \dots, x_{2M+k}) = \frac{\sqrt{(2M+k)!}}{M! 2^M} \text{Asymm}_{x_1, \dots, x_{2M+k}} \{ \varphi(x_1, 1) \cdots \varphi(x_k, k) \\ \times \Phi(x_{k+1}, x_{k+2}) \cdots \Phi(x_{2M+k-1}, x_{2M+k}) \}.$$

Остальные компоненты равны 0. Отсюда видно, что $Y = \sigma \tilde{Y}$, где σ – константа, равная по модулю 1,

$$\tilde{Y} = \int dx_1 \cdots dx_k \tilde{\varphi}(x_1, 1) \cdots \tilde{\varphi}(x_k, k) a^+(x_1) \cdots a^+(x_k) \\ \times \exp \left\{ \frac{1}{2} \int dy dz \tilde{\Phi}(y, z) a^+(y) a^+(z) \right\} Y^{(0)}, \quad (13)$$

где $\tilde{\varphi}(x, j)$ и $\tilde{\Phi}(x, y)$ – те же, что и в формулировке теоремы 1. Следовательно, утверждение леммы можно записать как

$$G(x, y) = \frac{(\tilde{Y}, a^+(x) a^-(y) \tilde{Y})}{(\tilde{Y}, \tilde{Y})}, \quad R(x, y) = \frac{(\tilde{Y}, a^-(x) a^+(y) \tilde{Y})}{(\tilde{Y}, \tilde{Y})}.$$

Из перестановочных соотношений (12) следует, что

$$a^-(y) \tilde{Y} = \sum_{s=1}^k (-1)^s \tilde{\varphi}(y, s) \Psi^{(s)} + (-1)^k \Psi^{(0)}(y),$$

где

$$\Psi^{(s)} = \int dx_1 \cdots \widehat{dx_s} \cdots dx_k \tilde{\varphi}(x_1, 1) \cdots \widehat{\tilde{\varphi}(x_s, s)} \cdots \tilde{\varphi}(x_k, k) a^+(x_1) \cdots \widehat{a^+(x_s)} \cdots a^+(x_k) \\ \times \exp \left\{ \frac{1}{2} \int dy dz \tilde{\Phi}(y, z) a^+(y) a^+(z) \right\} Y^{(0)},$$

$$\Psi^{(0)}(y) = \int dx_1 \cdots dx_k \tilde{\varphi}(x_1, 1) \cdots \tilde{\varphi}(x_k, k) a^+(x_1) \cdots a^+(x_k) a^-(y) \\ \times \exp \left\{ \frac{1}{2} \int dz dz' \tilde{\Phi}(z, z') a^+(z) a^+(z') \right\} Y^{(0)}.$$

Замечая, что

$$\begin{aligned} a^-(y) \exp \left\{ \frac{1}{2} \int dz dz' \tilde{\Phi}(z, z') a^+(z) a^+(z') \right\} Y^{(0)} \\ = \int d\xi \tilde{\Phi}(y, \xi) a^+(\xi) \exp \left\{ \frac{1}{2} \int dz dz' \tilde{\Phi}(z, z') a^+(z) a^+(z') \right\} Y^{(0)}, \end{aligned}$$

и используя перестановочные соотношения (12), получим

$$\Psi^{(0)}(y) = (-1)^k \int d\xi \tilde{\Phi}(y, \xi) a^+(\xi) \tilde{Y}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (\tilde{Y}, a^+(x) a^-(y) \tilde{Y}) &= \sum_{s, m=1}^k (-1)^{s+m} \tilde{\varphi}^*(x, m) \tilde{\varphi}(y, s) (\Psi^{(m)}, \Psi^{(s)}) \\ &+ \sum_{s=1}^k (-1)^{s-1} \tilde{\varphi}(y, s) (\Psi^{(0)}(x), \Psi^{(s)}) + \int d\xi \tilde{\Phi}(y, \xi) (\tilde{Y}, a^+(x) a^+(\xi) \tilde{Y}). \end{aligned} \quad (14)$$

Вычислим скалярные произведения $(\Psi^{(m)}, \Psi^{(s)})$ и $(\Psi^{(0)}(x), \Psi^{(s)})$. Из определения вектора $\Psi^{(s)}$ следует, что его $(2M + k - 1)$ -е компоненты имеют вид

$$\begin{aligned} \Psi_{2M+k-1}^{(s)} &= \frac{\sqrt{(2M+k-1)!}}{M!2^M} \text{Asymm}_{x_1, \dots, x_{2M+k-1}} \left\{ \tilde{\varphi}(x_1, 1) \cdots \widehat{\tilde{\varphi}(x_s, s)} \cdots \tilde{\varphi}_k(x_{k-1}, k) \right. \\ &\quad \left. \times \widehat{\Phi}(x_k, x_{k+1}) \cdots \tilde{\Phi}(x_{2M+k-2}, x_{2M+k-1}) \right\}, \end{aligned}$$

а остальные равны 0. Следовательно,

$$\begin{aligned} (\Psi^{(m)}, \Psi^{(s)}) &= \delta_{ms} \sum_{M=0}^{\infty} \frac{(2M+k-1)!}{(M!2^M)^2} \int dx_1 \cdots dx_{2M+k-1} \\ &\quad \times \left| \text{Asymm}_{x_1, \dots, x_{2M+k-1}} \left\{ \tilde{\varphi}(x_1, 1) \cdots \widehat{\tilde{\varphi}(x_s, s)} \cdots \tilde{\varphi}_k(x_{k-1}, k) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \widehat{\Phi}(x_k, x_{k+1}) \cdots \tilde{\Phi}(x_{2M+k-2}, x_{2M+k-1}) \right\} \right|^2. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что

$$\int dx \tilde{\varphi}^*(x, j) \tilde{\varphi}(x, l) = \delta_{jl}, \quad \int dx \tilde{\varphi}^*(x, j) \tilde{\Phi}(x, y) = 0, \quad (15)$$

получим

$$\begin{aligned} (\Psi^{(m)}, \Psi^{(s)}) &= \delta_{ms} \sum_{M=0}^{\infty} \frac{(2M)!}{(M!2^M)^2} \int dx_1 \cdots dx_{2M} \\ &\quad \times \left| \text{Asymm}_{x_1, \dots, x_{2M}} \tilde{\Phi}(x_1, x_2) \cdots \tilde{\Phi}(x_{2M-1}, x_{2M}) \right|^2 = \delta_{ms} \|\tilde{Y}_{k=0}\|^2, \end{aligned}$$

где

$$\tilde{Y}_{k=0} = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int dz dz' \tilde{\Phi}(z, z') a^+(z) a^+(z') \right\} Y^{(0)}.$$

Заметим, что из соотношений (15) следует, что

$$\begin{aligned} \|\tilde{Y}\|^2 &= \sum_{M=0}^{\infty} \frac{(2M+k)!}{(M!2^M)^2} \int dx_1 \cdots dx_{2M+k} \left| \text{Asymm}_{x_1, \dots, x_{2M+k-1}} \left\{ \tilde{\varphi}(x_1, 1) \cdots \tilde{\varphi}(x_k, k) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \hat{\Phi}(x_{k+1}, x_{k+2}) \cdots \tilde{\Phi}(x_{2M+k-1}, x_{2M+k}) \right\} \right|^2 \\ &= \sum_{M=0}^{\infty} \frac{(2M)!}{(M!2^M)^2} \int dx_1 \cdots dx_{2M} \left| \text{Asymm}_{x_1, \dots, x_{2M}} \left\{ \hat{\Phi}(x_1, x_2) \cdots \tilde{\Phi}(x_{2M-1}, x_{2M}) \right\} \right|^2 \\ &= \|\tilde{Y}_{k=0}\|^2. \end{aligned}$$

В итоге $(\Psi^{(m)}, \Psi^{(s)}) = \delta_{ms}(\tilde{Y}, \tilde{Y})$.

Вычислим теперь $(\Psi^{(0)}(x), \Psi^{(s)})$. Из определения следует, что отличные от 0 компоненты вектора $\Psi^{(0)}(x)$ имеют вид

$$\begin{aligned} (\Psi^{(0)}(x))_{2M+k+1} &= \frac{\sqrt{(2M+k+1)!}}{M!2^M} \text{Asymm}_{x_1, \dots, x_{2M+k+1}} \left\{ \tilde{\varphi}(x_1, 1) \cdots \tilde{\varphi}(x_k, k) \tilde{\Phi}(x, x_{k+1}) \right. \\ &\quad \left. \times \tilde{\Phi}(x_{k+2}, x_{k+3}) \cdots \tilde{\Phi}(x_{2M+k}, x_{2M+k+1}) \right\}. \end{aligned}$$

Из соотношений (15) следует, что скалярные произведения соответствующих компонент $\Psi^{(0)}(x)$ и $\Psi^{(s)}$ равны 0. Следовательно, $(\Psi^{(0)}(x), \Psi^{(s)}) = 0$.

Подставив найденные скалярные произведения в (14) и разделив на $(\tilde{Y}, \tilde{Y})$, получим

$$g(x, y) = \sum_{s=1}^k \tilde{\varphi}_s^*(x) \tilde{\varphi}_s(y) + \int d\xi \tilde{\Phi}(y, \xi) r^*(\xi, x),$$

где введены обозначения

$$g(x, y) = \frac{(\tilde{Y}, a^+(x) a^-(y) \tilde{Y})}{(\tilde{Y}, \tilde{Y})}, \quad r(x, y) = \frac{(\tilde{Y}, a^-(x) a^-(y) \tilde{Y})}{(\tilde{Y}, \tilde{Y})}.$$

Цель состоит в том, чтобы показать, что $g(x, y) = G(x, y)$, $r(x, y) = R(x, y)$.

Полученные выше формулы позволяют записать функцию $r(x, y)$ в виде

$$\begin{aligned} r(x, y) &= \frac{1}{\|\tilde{Y}\|^2} \left(\tilde{Y}, a^-(x) \left(\sum_{s=1}^k (-1)^{s-1} \tilde{\varphi}_s(y) \Psi^{(s)} + (-1)^k \Psi^{(0)}(y) \right) \right) \\ &= \frac{1}{\|\tilde{Y}\|^2} \left\{ \sum_{s=1}^k (-1)^{s-1} \tilde{\varphi}_s(y) (a^+(x) \tilde{Y}, \Psi^{(s)}) + \int d\xi \tilde{\Phi}(y, \xi) (\tilde{Y}, a^-(x) a^+(\xi) \tilde{Y}) \right\}. \end{aligned}$$

Отличные от 0 компоненты фокковского вектора $a^+(x) \tilde{Y}$ имеют вид

$$\begin{aligned} (a^+(x) \tilde{Y})_{2M+k+1} &= (-1)^k \frac{\sqrt{(2M+k+1)!}}{M!2^M} \text{Asymm}_{x_1, \dots, x_{2M+k+1}} \left\{ \tilde{\varphi}(x_1, 1) \cdots \tilde{\varphi}(x_k, k) \right. \\ &\quad \left. \times \delta(x - x_{k+1}) \tilde{\Phi}(x_{k+2}, x_{k+3}) \cdots \tilde{\Phi}(x_{2M+k}, x_{2M+k+1}) \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что в силу соотношений (15) $(a^+(x)\tilde{Y}, \Psi^{(s)}) = 0$. Следовательно,

$$r(x, y) = \frac{1}{\|\tilde{Y}\|^2} \int d\xi \tilde{\Phi}(y, \xi) (\tilde{Y}, a^-(x) a^+(\xi) \tilde{Y}).$$

Переставив операторы $a^-(x)$ и $a^+(y)$, получим

$$r(x, y) = \int d\xi \tilde{\Phi}(y, \xi) \{\delta(x - \xi) - g(\xi, x)\}.$$

Выразим в последней формуле g через r :

$$\begin{aligned} r(x, y) &= \tilde{\Phi}(y, x) - \int d\xi \tilde{\Phi}(y, \xi) g^*(x, \xi) \\ &= -\tilde{\Phi}(x, y) - \int d\xi \tilde{\Phi}(y, \xi) \left\{ \sum_{s=1}^k \tilde{\varphi}(x, s) \tilde{\varphi}^*(\xi) + \int d\eta \tilde{\Phi}^*(\xi, \eta) r(\eta, x) \right\} \\ &= -\tilde{\Phi}(x, y) + \int d\xi d\eta \tilde{\Phi}(\xi, y) \tilde{\Phi}^*(\xi, \eta) r(\eta, x). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что оператор $\hat{r}$ с интегральным ядром $r(x, y)$ удовлетворяет соотношению

$$\hat{r} = -\hat{\Phi} - \hat{r}\hat{\Phi}^+\hat{\Phi},$$

где $\hat{\Phi}$ – оператор с интегральным ядром $\tilde{\Phi}(x, y)$, $\hat{\Phi}^+$ – оператор с интегральным ядром $\tilde{\Phi}^*(y, x)$. Выразим $\hat{r}$ через $\hat{\Phi}$:

$$\hat{r}(1 + \hat{\Phi}^+\hat{\Phi}) = -\hat{\Phi},$$

откуда

$$\hat{r} = -\hat{\Phi}(1 + \hat{\Phi}^+\hat{\Phi})^{-1}.$$

В свою очередь, оператор $\hat{g}$ с интегральным ядром $g(x, y)$ можно записать как

$$\hat{g} = \sum_{s=1}^k \hat{\pi}_s^* + \hat{\Phi}^+\hat{\Phi}(1 + \hat{\Phi}^+\hat{\Phi})^{-1},$$

где $\hat{\pi}_s$ – оператор проектирования на $\tilde{\varphi}(x, s)$. Интегральное ядро оператора $(1 + \hat{\Phi}^+\hat{\Phi})^{-1}$ равно $M(x, y)$, где $M(x, y)$ имеет вид (11). Это означает, что $g(x, y) = G(x, y)$, $r(x, y) = R(x, y)$.

ЛЕММА 2. Проектор $\hat{\Pi}_{M,k}^F = \hat{i}_{M,k} \hat{P}_{M,k}^F \hat{P}_{M,k}$ может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_{M,k}^F = & \frac{1}{M!k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^k \int dx_1 dy_1 \cdots dx_M dy_M dz_1 \cdots dz_k \hat{B}^+(x_1, y_1) \cdots \hat{B}^+(x_M, y_M) \\ & \times \hat{b}^+(z_1, i_1) \cdots \hat{b}^+(z_k, i_k) \\ & \times \text{Asymm}_{x_1, y_1, \dots, x_M, y_M, z_1, \dots, z_k} \text{Asymm}_{i_1, \dots, i_k} \{ \hat{B}^-(x_1, y_1) \cdots \hat{B}^-(x_M, y_M) \\ & \times \hat{b}^-(z_1, i_1) \cdots \hat{b}^-(z_k, i_k) \} \\ & \times \exp \left(- \int d\xi d\eta \hat{B}^+(\xi, \eta) \hat{B}^-(\xi, \eta) \right) \exp \left(- \sum_{j=1}^{\infty} \int d\zeta \hat{b}^+(\zeta, j) \hat{b}^-(\zeta, j) \right), \end{aligned} \quad (16)$$

где числа над операторами обозначают порядок их действия [2].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим правую часть (16) как $\hat{\pi}_{M,k}^F$. Разложим экспоненты в определении $\hat{\pi}_{M,k}^F$ в ряд и расставим операторы рождения после операторов уничтожения:

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_{M,k}^F = & \frac{1}{M!k!} \sum_{l,s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+s}}{l!s!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^k \sum_{j_1, \dots, j_s=1}^{\infty} \int dx_1 dy_1 \cdots dx_M dy_M dz_1 \cdots dz_k \\ & \times d\xi_1 d\eta_1 \cdots d\xi_l d\eta_l d\zeta_1 \cdots d\zeta_s \\ & \times \hat{B}^+(x_1, y_1) \cdots \hat{B}^+(x_M, y_M) \hat{b}^+(z_1, i_1) \cdots \hat{b}^+(z_k, i_k) \\ & \times \hat{B}^+(\xi_1, \eta_1) \cdots \hat{B}^+(\xi_l, \eta_l) \hat{b}^+(\zeta_1, j_1) \cdots \hat{b}^+(\zeta_s, j_s) \\ & \times \text{Asymm}_{x_1, y_1, \dots, x_M, y_M, z_1, \dots, z_k} \text{Asymm}_{i_1, \dots, i_k} \{ \hat{B}^-(x_1, y_1) \cdots \hat{B}^-(x_M, y_M) \\ & \times \hat{b}^-(z_1, i_1) \cdots \hat{b}^-(z_k, i_k) \} \\ & \times \hat{B}^-(\xi_1, \eta_1) \cdots \hat{B}^-(\xi_l, \eta_l) \hat{b}^-(\zeta_1, j_1) \cdots \hat{b}^-(\zeta_s, j_s). \end{aligned}$$

Из определений операторов рождения и уничтожения следует, что

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_{M,k}^F = & \frac{1}{M!k!} \sum_{l,s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+s}}{l!s!} \sum_{M_0=M+l}^{\infty} \sum_{k_0=k+s}^{\infty} \hat{i}_{M_0, k_0} \\ & \times \sum_{1 \leq a_1 \neq \dots \neq a_{M+l} \leq M_0} \sum_{1 \leq b_1 \neq \dots \neq b_{k+s} \leq k_0} \theta(i_{b_1}, k) \cdots \theta(i_{b_k}, k) \\ & \times \text{Asymm}_{x_{a_1}, y_{a_1}, \dots, x_{a_M}, y_{a_M}, z_{b_1}, \dots, z_{b_k}} \text{Asymm}_{i_{b_1}, \dots, i_{b_k}} \hat{P}_{M_0, k_0}, \end{aligned}$$

где

$$\theta(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i \leq j, \\ 0, & \text{если } i > j, \end{cases}$$

переменные x_i, y_i, z_i, j_i , по которым применяются антисимметризаторы, имеют тот же смысл, что и в определении 1. Изменив порядок суммирования по M_0 и l и по индексам k_0 и s и выполнив суммирование по $a_{M+1}, \dots, a_{M+l}$ и по $b_{k+1}, \dots, b_{k+s}$, получим

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_{M,k}^F &= \frac{1}{M!k!} \sum_{M_0=M}^{\infty} \sum_{k_0=k}^{\infty} \sum_{l=0}^{M_0-M} \sum_{s=0}^{k_0-k} \frac{(-1)^{l+s}}{l!s!} \frac{(M_0-M)!}{(M_0-M-l)!} \frac{(k_0-k)!}{(k_0-k-s)!} \\ &\times \hat{i}_{M_0,k_0} \sum_{1 \leq a_1 \neq \dots \neq a_M \leq M_0} \sum_{1 \leq b_1 \neq \dots \neq b_k \leq k_0} \theta(i_{b_1}, k) \cdots \theta(i_{b_k}, k) \\ &\times \text{Asymm}_{x_{a_1}, y_{a_1}, \dots, x_{a_M}, y_{a_M}, z_{b_1}, \dots, z_{b_k}} \text{Asymm}_{i_{b_1}, \dots, i_{b_k}} \hat{P}_{M_0, k_0}. \end{aligned}$$

Выполняя суммирование по s и l и учитывая, что соответствующие суммы равны 0, если $M_0 \neq M$ и $k_0 \neq k$, получим

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_{M,k}^F &= \frac{1}{M!k!} \hat{i}_{M,k} \sum_{1 \leq a_1 \neq \dots \neq a_M \leq M} \sum_{1 \leq b_1 \neq \dots \neq b_k \leq k} \theta(i_{b_1}, k) \cdots \theta(i_{b_k}, k) \\ &\times \text{Asymm}_{x_{a_1}, y_{a_1}, \dots, x_{a_M}, y_{a_M}, z_{b_1}, \dots, z_{b_k}} \text{Asymm}_{i_{b_1}, \dots, i_{b_k}} \hat{P}_{M,k} \\ &= \hat{i}_{M,k} \theta(i_1, k) \cdots \theta(i_k, k) \text{Asymm}_{x_1, y_1, \dots, x_M, y_M, z_1, \dots, z_k} \text{Asymm}_{i_1, \dots, i_k} \hat{P}_{M,k}. \end{aligned}$$

Замечая, что

$$\hat{P}_{M,k}^F = \theta(i_1, k) \cdots \theta(i_k, k) \text{Asymm}_{x_1, y_1, \dots, x_M, y_M, z_1, \dots, z_k} \text{Asymm}_{i_1, \dots, i_k},$$

получим равенство $\hat{\pi}_{M,k}^F = \hat{i}_{M,k} \hat{P}_{M,k}^F \hat{P}_{M,k} = \hat{\Pi}_{M,k}^F$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $\Psi \in \mathcal{F}$. Раскроем определение осредненного оператора и воспользуемся формулой (7):

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}\Psi &= \sum_{M=0}^{\infty} \frac{(2M+k)!}{4^M M!} \hat{i}_{M,k} (\hat{\mathcal{L}}_{2M+k} - \gamma) \hat{P}_{M,k}^F \hat{P}_{M,k} \Psi \\ &= \sum_{M=0}^{\infty} \frac{(2M+k)!}{4^M M!} \frac{1}{\sqrt{M!k!}} \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^k \int dx_1 \cdots dx_{2M} dy_1 \cdots dy_k \\ &\times \hat{B}^+(x_1, x_2) \cdots \hat{B}^+(x_{2M-1}, x_{2M}) \hat{b}^+(y_1, j_1) \cdots \hat{b}^+(y_k, j_k) \\ &\times (\hat{\mathcal{L}}_{2M+k} - \gamma) \text{Asymm}_{x_1, \dots, x_{2M}, y_1, \dots, y_k} \text{Asymm}_{j_1, \dots, j_k} \\ &\times \Psi_{M,k}(x_1, x_2; \dots; x_{2M-1}, x_{2M}; y_1, j_1; \dots; y_k, j_k) \Psi_0. \end{aligned}$$

Лемма 2 позволяет записать оператор $\bar{\mathcal{L}}$ в виде

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}} = & \sum_{M=0}^{\infty} \frac{(2M+k)!}{4^M (M!)^2 k!} \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^k \int dx_1 \cdots dx_{2M} dy_1 \cdots dy_k \\ & \times \hat{B}^+(x_1, x_2) \cdots \hat{B}^+(x_{2M-1}, x_{2M}) \hat{b}^+(y_1, j_1) \cdots \hat{b}^+(y_k, j_k) \\ & \times (\hat{\mathcal{L}}_{2M+k} - \gamma) \underset{x_1, \dots, x_{2M}, y_1, \dots, y_k}{\text{Asymm}} \underset{j_1, \dots, j_k}{\text{Asymm}} \left\{ \hat{B}^-(x_1, x_2) \cdots \hat{B}^-(x_{2M-1}, x_{2M}) \right. \\ & \times \left. \hat{b}^-(y_1, j_1) \cdots \hat{b}^-(y_k, j_k) \right\} \\ & \times \exp \left(- \int d\xi d\eta \hat{B}^+(\xi, \eta) \hat{B}^-(\xi, \eta) \right) \exp \left(- \sum_{j=1}^{\infty} \int d\zeta \hat{b}^+(\zeta, j) \hat{b}^-(\zeta, j) \right) \Psi. \end{aligned}$$

Просуммировав по $j_1, \dots, j_k$, получим

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}} = & \sum_{M=0}^{\infty} \frac{(2M+k)!}{4^M (M!)^2} \int dx_1 \cdots dx_{2M} dy_1 \cdots dy_k \hat{B}^+(x_1, x_2) \cdots \hat{B}^+(x_{2M-1}, x_{2M}) \\ & \times \hat{b}^+(y_1, 1) \cdots \hat{b}^+(y_k, k) \\ & \times (\hat{\mathcal{L}}_{2M+k} - \gamma) \underset{x_1, \dots, x_{2M}, y_1, \dots, y_k}{\text{Asymm}} \left\{ \hat{B}^-(x_1, x_2) \cdots \hat{B}^-(x_{2M-1}, x_{2M}) \right. \\ & \times \left. \hat{b}^-(y_1, 1) \cdots \hat{b}^-(y_k, k) \right\} \\ & \times \exp \left(- \int d\xi d\eta \hat{B}^+(\xi, \eta) \hat{B}^-(\xi, \eta) \right) \exp \left(- \sum_{j=1}^{\infty} \int d\zeta \hat{b}^+(\zeta, j) \hat{b}^-(\zeta, j) \right) \Psi. \end{aligned} \quad (17)$$

Из (17) следует, что виковский символ оператора $\bar{\mathcal{L}}$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Phi^*, \varphi^*, \varphi, \Phi) = & (\tilde{Y}, \hat{L}\tilde{Y}) \exp \left(- \int dx dy \Phi^*(x, y) \Phi(x, y) \right) \\ & \times \exp \left(- \sum_{j=1}^{\infty} \int dz \varphi^*(z, j) \varphi(z, j) \right), \end{aligned}$$

где $\tilde{Y}$ имеет вид (13),

$$\begin{aligned} \hat{L} = & \int dx a^+(x) \left(-ip \frac{\partial}{\partial q} - \gamma \right) a^-(x) \\ & - \frac{i}{2} \int dx dx' a^+(x) a^+(x') (\nabla V)(q - q') \left(\frac{\partial}{\partial p'} - \frac{\partial}{\partial p} \right) a^-(x') a^-(x). \end{aligned}$$

Согласно лемме 1 средние значения $\langle a^+(x)a^-(y) \rangle$ и $\langle a^-(x)a^-(y) \rangle$, где $\langle \widehat{O} \rangle = (Y, \widehat{O}Y)/(Y, Y)$, равны соответственно $G(x, y)$ и $R(x, y)$. В свою очередь, среднее от произведения из четырех операторов $a^+(x_1)a^+(x_2)a^-(\xi_1)a^-(\xi_2)$ по состоянию Y находится с помощью хорошо известных из квантовой электродинамики формул Вика [10]:

$$\begin{aligned} \langle a^+(x_1)a^+(x_2)a^-(\xi_2)a^-(\xi_1) \rangle &= \langle a^+(x_1)a^+(x_2) \rangle \langle a^-(\xi_2)a^-(\xi_1) \rangle \\ &- \langle a^+(x_1)a^-(\xi_2) \rangle \langle a^+(x_2)a^-(\xi_1) \rangle + \langle a^+(x_1)a^-(\xi_1) \rangle \langle a^+(x_2)a^-(\xi_2) \rangle. \end{aligned}$$

В результате символ оператора $\widetilde{\mathcal{L}}$ может быть записан в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Phi^*, \varphi^*, \varphi, \Phi) &= \left\{ \int dx \left(-ip \frac{\partial}{\partial q} - \gamma \right) G(\overset{3}{x}; \overset{1}{x}) - \frac{i}{2} \iint dx dx' (\nabla V)(q - q') \right. \\ &\times \left(\frac{\partial}{\partial p'} - \frac{\partial}{\partial p} \right) (G(\overset{3}{x}; \overset{1}{x}) G(\overset{3}{x'}; \overset{1}{x'}) - G(\overset{3}{x}; \overset{1}{x'}) G(\overset{3}{x'}; \overset{1}{x}) + R^*(\overset{3}{x'}; \overset{3}{x}) R(\overset{1}{x'}; \overset{1}{x})) \Big\} \\ &\times \|\widetilde{Y}\|^2 \exp \left(- \int dx dy \Phi^*(x, y) \Phi(x, y) \right) \exp \left(- \sum_{j=1}^{\infty} \int dz \varphi^*(z, j) \varphi(z, j) \right). \end{aligned}$$

Подставив в эту формулу вычисленное в доказательстве леммы 1 значение для $\|\widetilde{Y}\|^2$, получим утверждение теоремы.

В теории слабо неидеального бозе-газа в физической литературе применяется термин: “полагают бозе-операторы c -числами”. Математически это правильная процедура, так как определяет нестандартные характеристики исходной задачи при таких малых параметрах, при которых коммутаторы между операторами рождения и уничтожения после определенного изменения масштабов, становятся малыми. Точно так же уравнения Гайзенберга, написанные в форме уравнений Ньютона (Гамильтона) для некоммутирующих операторов $\widehat{p} = -i\hbar\partial/\partial q$ и q , если их “превратить в c -числа” переходят в классические уравнения Ньютона (Гамильтона), т.е. являются нестандартными характеристиками квантовой задачи в квазиклассическом приближении. В теории слабо неидеального бозе-газа имеются два связанных между собой малых параметра $1/N$, где N – число частиц, и либо слабая связь, либо малая плотность.

После приведенной выше процедуры осреднения остается только один большой параметр – среднее число частиц и превращение операторов рождения и уничтожения, т.е. снятие крышек над операторами с точки зрения нестандартных характеристик означает получение аналога классического гамильтониана лишь при условии $\overline{N} \rightarrow \infty$ при не слабой связи. Более того, как следует из существенно более сложной теории туннельных эффектов, о которой будет упомянуто в конце статьи, для фермионов оценки равномерные по увеличению связи и, значит, допустима очень сильная связь.

Итак, мы рассмотрим функцию $\mathcal{L}$ как “классический” гамильтониан. Характеристики определяются решениями следующих уравнений:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi^*(x_1; x_2)}(\Phi^*, \varphi^*, \varphi, \Phi) = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi^*(x, j)}(\Phi^*, \varphi^*, \varphi, \Phi) = 0, \quad (19)$$

$$\mathcal{L}(\Phi^*, \varphi^*, \varphi, \Phi) = 0.$$

Уравнения (18), (19) определяют точку покоя бесконечномерной гамильтоновой системы уравнений, отвечающей уравнению (1).

Учитывая формулы (8)–(10), получим, что уравнения (18), (19) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \left(-ip_2 \frac{\partial}{\partial q_2} - ip_1 \frac{\partial}{\partial q_1} \right) G(x_1, x_2) \\ & - i \int dx' (\nabla V)(q_2 - q') \left(\frac{\partial}{\partial p'} - \frac{\partial}{\partial p_2} \right) \{ -R^*(x_1, \overset{2}{x}') R(\overset{1}{x}', x_2) \\ & - G(x_1, \overset{1}{x}') G^*(x_2, \overset{3}{x}') + G(x_1, x_2) G^*(\overset{1}{x}', \overset{3}{x}') \} \\ & - i \int dx' (\nabla V)(q_1 - q') \left(\frac{\partial}{\partial p'} - \frac{\partial}{\partial p_1} \right) \{ -R(\overset{3}{x}', x_2) R^*(x_1, \overset{1}{x}') \\ & - G(\overset{1}{x}', x_2) G^*(\overset{3}{x}', x_1) + G(x_1, x_2) G^*(\overset{3}{x}', \overset{1}{x}') \} = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \left(-ip_2 \frac{\partial}{\partial q_2} - ip_1 \frac{\partial}{\partial q_1} - i(\nabla V)(q_1 - q_2) \left(\frac{\partial}{\partial p_2} - \frac{\partial}{\partial p_1} \right) - 2\gamma \right) R(x_1, x_2) \\ & - i \int dx' (\nabla V)(q_2 - q') \left(\frac{\partial}{\partial p'} - \frac{\partial}{\partial q_2} \right) \{ -G^*(x_1, \overset{3}{x}') R(\overset{1}{x}', x_2) \\ & - G^*(x_2, \overset{3}{x}') R(x_1, \overset{1}{x}') + G^*(\overset{1}{x}', \overset{3}{x}') R(x_1, x_2) \} \\ & + i \int dx' (\nabla V)(q_1 - q') \left(\frac{\partial}{\partial p'} - \frac{\partial}{\partial p_1} \right) \{ -G(\overset{3}{x}', x_2) R(x_1, \overset{1}{x}') \\ & - G(\overset{3}{x}', x_1) R(\overset{1}{x}', x_2) - G(\overset{3}{x}', \overset{1}{x}') R(x_1, x_2) \} = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

где $x_1 = (q_1, p_1, \sigma_1)$, $x_2 = (q_2, p_2, \sigma_2)$, $x' = (q', p', \sigma')$.

Рассмотрим решения системы (20), (21), являющиеся функциями от разности $q_1 - q_2$: $G(x_1, x_2) = g(q_1 - q_2, p_1, p_2)$, $R(x_1, x_2) = r(q_1 - q_2, p_1, p_2)$. Такие решения можно представить в виде

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk G_k(p_1, p_2) e^{ik(q_1 - q_2)}, \\ R(x_1, x_2) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk R_k(p_1, p_2) e^{ik(q_1 - q_2)}. \end{aligned}$$

Уравнения на функции $G_k(p_1, p_2)$ и $R_k(p_1, p_2)$ имеют вид

$$\begin{aligned} & (-p_2 + p_1)k G_k(p_1, p_2) + \int dp' dk' \tilde{V}(-k + k')(-k + k') \left(\frac{\partial}{\partial p'} - \frac{\partial}{\partial p_2} \right) \\ & \times \{ R_k^*(\overset{3}{p}', p_1) R_{k'}(\overset{1}{p}', p_2) - G_k(p_1, \overset{1}{p}') G_{k'}(\overset{3}{p}', p_2) \} \\ & + \int dp' dk' \tilde{V}(-k' + k)(-k' + k) \left(\frac{\partial}{\partial p'} - \frac{\partial}{\partial p_1} \right) \\ & \times \{ R_{k'}^*(\overset{1}{p}', p_1) R_k(\overset{3}{p}', p_2) - G_{k'}(p_1, \overset{3}{p}') G_k(\overset{1}{p}', p_2) \} = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
& \left((p_1 - p_2)k - 2\gamma + \int dk' \tilde{V}(k - k')(k - k') \left(\frac{\partial}{\partial p_2} - \frac{\partial}{\partial p_1} \right) \right) R_{k'}(p_1, p_2) \\
& + \int dp' dk' \left(\frac{\partial}{\partial p'} - \frac{\partial}{\partial p_1} \right) (-\tilde{V}(k - k')(k - k') G_k(\overset{3}{p}', p_2) R_{k'}(p_1, \overset{1}{p}')) \\
& - \tilde{V}(k + k')(k + k') G_{k'}(\overset{3}{p}', p_1) R_k(\overset{1}{p}', p_2)) \\
& + \int dp' dk' \left(\frac{\partial}{\partial p'} - \frac{\partial}{\partial p_2} \right) (-\tilde{V}(k + k')(k + k') G_{-k}(\overset{3}{p}', p_1) R_{k'}(\overset{1}{p}', p_2) \\
& - \tilde{V}(k - k')(k - k') G_{k'}(\overset{3}{p}', p_2) R_k(p_1, \overset{1}{p}')) = 0,
\end{aligned} \tag{23}$$

где

$$\tilde{V}(k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dx V(x) e^{-ikx}.$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
B_k(p_1, p_2) &= \int dk' \tilde{V}(k - k')(k - k') \left(\frac{\partial}{\partial p_2} - \frac{\partial}{\partial p_1} \right) R_{k'}(p_1, p_2), \\
\Lambda_k(p_1, p_2) &= p_1 k \delta(p_1 - p_2) - \gamma + \int dk' \tilde{V}(k + k')(k + k') \left(\frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{\partial}{\partial p_2} \right) G_{k'}(p_1, p_2).
\end{aligned}$$

Для приведенных достаточно сложных уравнений может быть получена L - A пара. Отметим, что как этот факт, так и случай, разобранный в [8], являются частными случаями более общей теоремы [9].

ТЕОРЕМА 2. *Коммутатор матриц*

$$A_k = \begin{pmatrix} \hat{G}_k - \frac{1}{2} & -\hat{R}_{-k}^* \\ \hat{R}_k & -\hat{G}_{-k}^* + \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad L_k = \begin{pmatrix} \hat{\Lambda}_k^* & -\hat{B}_{-k}^* \\ \hat{B}_k & -\hat{\Lambda}_{-k} \end{pmatrix},$$

где $\hat{G}_k$, $\hat{R}_k$, $\hat{B}_k$, $\hat{\Lambda}_k$ – операторы с интегральными ядрами G_k , R_k , B_k , Λ_k , имеет вид

$$[A_k, L_k] = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_k & \hat{\beta}_{-k}^* \\ \hat{\beta}_k & \hat{\alpha}_{-k}^* \end{pmatrix},$$

где интегральное ядро $\alpha_k(p_1, p_2)$ оператора $\hat{\alpha}_k$ равно левой части (22), а интегральное ядро $\beta_k(p_1, p_2)$ оператора $\hat{\beta}_k$ равно левой части (23).

При рассмотрении классических фермионов так же, как при рассмотрении квантовых фермионов, уравнение для холостых фермионов является частным случаем уравнения для пар и уравнения для R и G не зависят от того, сколько холостых фермионов имеется в исходной задаче. Этот удивительный факт имеет место только для фермионов. Поэтому можно предполагать, что именно пары играют ключевую роль в фазовом переходе для фермионов. В случае бозонов это свойство не имеет места. Значит, возможно, тройки, четверки и т.д. бозонов играют не меньшую роль, чем пары. А возможно, и

достаточно большие кластеры из бозонов играют ключевую роль в фазовых переходах для симметрических решений уравнения Лиувилля. Отметим, между прочим, что в физической литературе рассматриваются всегда именно симметрические решения уравнения Лиувилля для многих частиц, т.е. по нашей “вольной” терминологии, классические бозоны.

Суммирование для общего случая выглядит следующим образом:

$$\bar{A} = \frac{\sum_{k_1=0}^N \cdots \sum_{k_N=0}^N \frac{(\sum_{i=1}^N i k_i)!}{\prod_{i=1}^N (k_i!)^{i-1}} \prod_{j=1}^N \varepsilon_j^{k_j} (\Psi, \hat{A} \hat{i}_{k_1, \dots, k_N} \hat{P}_{k_1, \dots, k_N}^B \hat{P}_{k_1, \dots, k_N} \Psi)}{\sum_{k_1=0}^N \cdots \sum_{k_N=0}^N \frac{(\sum_{i=1}^N i k_i)!}{\prod_{i=1}^N (k_i!)^{i-1}} \prod_{j=1}^N \varepsilon_j^{k_j} (\Psi, \hat{i}_{k_1, \dots, k_N} \hat{P}_{k_1, \dots, k_N}^B \hat{P}_{k_1, \dots, k_N} \Psi)},$$

где $N = \sum_{i=1}^N i k_i$ – среднее число бозонов, k_i – число кластеров, содержащих i бозонов, операторы $\hat{i}_{k_1, \dots, k_N}$, $\hat{P}_{k_1, \dots, k_N}^B$, $\hat{P}_{k_1, \dots, k_N}$ определяются по аналогии с введенными выше операторами $\hat{i}_{k_1, k_2}$, $\hat{P}_{k_1, k_2}^B$ и $\hat{P}_{k_1, k_2}$. Это суммирование даже для пар достаточно сложно, и мы не имеем возможности здесь его привести.

Автор выражает глубокую благодарность Г. Ковалю и А. Рууге за помощь в работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Боголюбов Н. Н. Избранные труды. Т. 3. Киев: Наукова думка, 1971.
- [2] Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1965.
- [3] Maslov V. P. Quasi-particles associated with isoenergetic manifolds corresponding to classical self-consistent fields. X // Russian J. Math. Phys. 1997. V. 5. № 2. P. 273–278.
- [4] Maslov V. P. Deterministic quantum chaos for systems of bosons and fermions // Russian J. Math. Phys. 1997. V. 5. № 4. P. 473–488.
- [5] Maslov V. P. Quasi-particles associated with Lagrangian manifolds corresponding to classical self-consistent fields. I // Russian J. Math. Phys. 1994. V. 2. № 4. P. 527–534.
- [6] Ландау Л. Д., Лифшиц И. М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: ГИФМЛ, 1963.
- [7] Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ. М.: Наука, 1977.
- [8] Маслов В. П. Об одном методе осреднения для квантовой задачи многих тел // Функцион. анализ и его прилож. 1999. Т. 33. № 4. С. 50–64.
- [9] Маслов В. П., Рууге А. Э. Пара Лакса для уравнений характеристик осредненных многочастичных операторов // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 5. С. 793–796.
- [10] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Квантовые поля. М.: Наука, 1980.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
16.09.99