Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Булинский, Статистический вариант центральной предельной теоремы для векторных случайных полей, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 4, 490–501

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm123>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 15:14:22

УДК 519.21

СТАТИСТИЧЕСКИЙ ВАРИАНТ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ВЕКТОРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

А. В. Булинский

Классическая ЦПТ Ньюмена для действительных строго стационарных ассоциированных случайных полей обобщается на строго стационарные квази-ассоциированные векторно-значные случайные поля, охватывающие, в частности, положительно или отрицательно ассоциированные поля с конечными вторыми моментами. Установлен также вариант ЦПТ со случайной матричной нормировкой, что позволяет строить приближенные доверительные интервалы для неизвестного вектора средних.

Библиография: 26 названий.

1. Введение. Цель этой работы – доказать центральную предельную теорему (ЦПТ), используя случайную матричную нормировку, для строго стационарных случайных полей, определенных на решетке $\mathbb{Z}^d$ и принимающих значения в пространстве $\mathbb{R}^k$. Суммирование мультииндексированных случайных векторов ведется по конечным множествам $U_n \subset \mathbb{Z}^d$, в определенном смысле растущим при $n \rightarrow \infty$. Структура зависимости рассматриваемых полей описывается в терминах *квази-ассоциированности*. Это понятие для действительных случайных полей было введено в [1] и для векторно-значных полей – в [2]. Родственные условия зависимости были предложены для случайных процессов в [3] и для полей – в [4].

Пусть $X = \{X_t, t \in T\}$ – семейство действительных случайных величин, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и индексированных переменной t из некоторого множества T . Напомним, что это семейство называется *ассоциированным* или *положительно зависимым* [5], если для любых конечных множеств $I, J \subset T$ и всех покоординатно неубывающих функций $f: \mathbb{R}^{|I|} \rightarrow \mathbb{R}, g: \mathbb{R}^{|J|} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{cov}(f(X_s, s \in I), g(X_t, t \in J)) \geq 0, \quad (1)$$

когда эта ковариация существует (здесь и далее $|I|$ обозначает число элементов конечного множества I). Запись $f(X_s, s \in I)$ означает, что для $I = \{s_1, \dots, s_m\}$ рассматривается произвольная функция $f(X_{u_1}, \dots, X_{u_m})$, где $(u_1, \dots, u_m)$ – любая перестановка набора $(s_1, \dots, s_m)$.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-03-00724, программы “Ведущие научные школы”, грант № НШ-1758.2003.1, и фонда INTAS, грант № 03-51-5018.

Имеются различные модификации этого определения. При дополнительном условии $I \cap J = \emptyset$ соотношение (1) вводит *слабую ассоциированность* [6] или *положительную ассоциированность*, а аналог (1) с неравенством противоположного знака задает *отрицательную ассоциированность* [7].

Заметим, что любое семейство независимых действительных случайных величин автоматически является ассоциированным и отрицательно ассоциированным.

В математической статистике, теории надежности, теории перколяции, статистической физике и самой теории вероятностей существуют интересные стохастические модели, описываемые семействами положительно или отрицательно ассоциированных случайных величин (см., например, [5]–[14]). В физической литературе, как правило, используются “FKG-неравенства”, влекущие ассоциированность.

Набор действительных случайных величин $X = \{X_t, t \in T\}$, имеющих $EX_t^2 < \infty$, $t \in T$, называется *квази-ассоциированным* [1], если для всех конечных непересекающихся множеств $I, J \subset T$ и любых ограниченных липшицевых функций $f: \mathbb{R}^{|I|} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^{|J|} \rightarrow \mathbb{R}$ выполняется следующее неравенство:

$$|\text{cov}(f(X_s, s \in I), g(X_t, t \in J))| \leq \text{Lip}(f) \text{Lip}(g) \sum_{s \in I} \sum_{t \in J} |\text{cov}(X_s, X_t)|. \quad (2)$$

Здесь

$$\text{Lip}(f) = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|_1} < \infty, \quad (3)$$

$\|x\|_1 = \sum_{s=1}^m |x_s|$ для $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Поскольку все нормы в пространстве $\mathbb{R}^m$ эквивалентны, выбор нормы $\|\cdot\|_1$ в (3) произведен лишь для удобства. Разумеется, в правую часть определения (2) можно включить и дополнительные множители.

В [15] было показано, что любое семейство положительно или отрицательно ассоциированных случайных величин с конечными вторыми моментами удовлетворяет неравенству (2). Следовательно, такие случайные поля всегда квази-ассоциированы.

Аналог (2) в случае гладких функций f и g был установлен в [16] для ассоциированных случайных величин (ср. [17]–[19]).

Пусть теперь $X = \{X_t, t \in T\}$ — случайное поле со значениями в пространстве $\mathbb{R}^k$. Обобщения упомянутых выше условий зависимости на семейства векторно-значных случайных величин рассматривались, например, в [20], [2] и [21]. Следующее определение дано в [2].

Случайное поле X со значениями в $\mathbb{R}^k$ называется *квази-ассоциированным*, если для любых непересекающихся множеств $I, J \subset \mathbb{Z}^d$ и всех ограниченных липшицевых функций $f: \mathbb{R}^{k|I|} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^{k|J|} \rightarrow \mathbb{R}$ имеет место неравенство

$$|\text{cov}(f(X_s, s \in I), g(X_t, t \in J))| \leq \text{Lip}(f) \text{Lip}(g) \sum_{s \in I} \sum_{t \in J} \sum_{r, q=1}^k |\text{cov}(X_{s,r}, X_{t,q})|, \quad (4)$$

где $X_{s,r}$ обозначает r -ю компоненту вектора X_s .

Недавно в [22] было доказано, что любое гауссовское случайное поле $X = \{X_t, t \in T\}$ со значениями в $\mathbb{R}^k$ является квази-ассоциированным. Действительное гауссовское случайное поле X обладает свойством ассоциированности тогда и только тогда (см. [13]), когда его ковариационная функция неотрицательна, и обладает свойством отрицательной ассоциированности тогда и только тогда (см. [7]), когда $\text{cov}(X_s, X_t) \leq 0$ при всех

$s \neq t$. Таким образом, результаты [15] и [22] показывают, что понятие квази-ассоциированности приводит для полей с конечными вторыми моментами к строго более широкому классу объектов, чем понятия положительной и отрицательной ассоциированности.

Заканчивая обсуждение условий зависимости, заметим, что имеются различные возможности давать оценки левой части неравенства (4) для тех или иных классов “пробных функций” f и g (см., например, [23], [4] и [21]).

В п. 2 данной работы классическая теорема Ньюмена [12] обобщается на векторно-значные строго стационарные квази-ассоциированные случайные поля. В п. 3 доказывается статистический вариант ЦПТ. Для этого используются самонормализованные частные суммы случайных векторов.

2. ЦПТ для квази-ассоциированных строго стационарных векторных полей. В этом пункте мы докажем ЦПТ для частных сумм

$$S(U_n) = \sum_{j \in U_n} X_j, \quad n \in \mathbb{N},$$

мультииндексированных квази-ассоциированных случайных векторов X_j , используя неслучайную нормировку. Суммирование ведется по конечным множествам $U_n \subset \mathbb{Z}^d$, растущим в должном смысле.

Для $a = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}_+^d$, $V \subset \mathbb{R}^d$ и $j = (j_1, \dots, j_d) \in \mathbb{Z}^d$ пусть

$$\Lambda_0(a) = \{x = (x_1, \dots, x_d) : 0 < x_p \leq a_p, p = 1, \dots, d\}, \quad (5)$$

$$\Lambda_j(a) = \Lambda_0(a) + (j_1 a_1, \dots, j_d a_d), \quad (6)$$

$$J_a^+(V) = \{j : \Lambda_j(a) \cap V \neq \emptyset\}, \quad N_a^+(V) = |J_a^+(V)|, \quad (7)$$

$$J_a^-(V) = \{j : \Lambda_j(a) \subset V\}, \quad N_a^-(V) = |J_a^-(V)|. \quad (8)$$

Говорят, что $V_n \rightarrow \infty$ в смысле Ван Хова при $n \rightarrow \infty$, если для каждого $a \in \mathbb{R}_+^d$

$$N_a^-(V_n) \rightarrow \infty \text{ и } \frac{N_a^-(V_n)}{N_a^+(V_n)} \rightarrow 1 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Если V_n – ограниченные измеримые подмножества $\mathbb{R}^d$, то (см. [24, гл. 2, § 2.1]) $V_n \rightarrow \infty$ в смысле Ван Хова тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ верно соотношение

$$\frac{\mu((\partial V_n)^\varepsilon)}{\mu(V_n)} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (10)$$

где G^ε обозначает ε -окрестность (в евклидовой метрике) множества $G \subset \mathbb{R}^d$ и μ – мера Лебега в $\mathbb{R}^d$.

Естественный дискретный аналог этого понятия “регулярного роста” множеств $U_n \subset \mathbb{Z}^d$ был использован, например, в [25]. Для $U \subset \mathbb{Z}^d$ положим

$$\partial U = \left\{ s \in U : \inf_{t \in \mathbb{Z}^d \setminus U} \|s - t\| = 1 \right\},$$

где $\|x\| = \max_{1 \leq p \leq d} |x_p|$, $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$.

Говорят, что последовательность $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ конечных подмножеств $\mathbb{Z}^d$ стремится к бесконечности *регулярным образом* (ср. с (10)), если

$$\frac{|\partial U_n|}{|U_n|} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Следующий результат является обобщением теоремы 1 из [26], которая, в свою очередь, расширяла область действия классической ЦПТ Ньюмена [12].

ТЕОРЕМА 1. Пусть $X = \{X_j, j \in \mathbb{Z}^d\}$ – строго стационарное квази-ассоциированное случайное поле со значениями в пространстве $\mathbb{R}^k$. Предположим, что при всех $r, q = 1, \dots, k$

$$\sigma_{r,q} = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} |\text{cov}(X_{0,r}, X_{j,q})| < \infty. \quad (12)$$

Тогда для любых конечных множеств $U_n \subset \mathbb{Z}^d$, удовлетворяющих условию (11), справедливо соотношение

$$|U_n|^{-1/2}(S(U_n) - |U_n|\mathbf{E}X_0) \xrightarrow{D} N(0, C) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Здесь C – матрица с элементами

$$c_{r,q} = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \text{cov}(X_{0,r}, X_{j,q}), \quad r, q = 1, \dots, k, \quad (14)$$

и “ $\xrightarrow{D}$ ” обозначает слабую сходимость распределений векторов в $\mathbb{R}^k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы основано на известных методах (см. [12], [20] и [26]). Начнем с вспомогательных результатов.

ЛЕММА 1. Пусть $X = \{X_j, j \in \mathbb{Z}^d\}$ – стационарное в широком смысле случайное поле со значениями в $\mathbb{R}^k$ такое, что выполнено условие (12). Пусть $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ – последовательность регулярно растущих конечных подмножеств $\mathbb{Z}^d$ (см. (11)). Тогда

$$|U_n|^{-1} \text{var } S(U_n) \rightarrow C \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (15)$$

где $\text{var } S(U_n)$ – ковариационная матрица $S(U_n)$ и C – матрица, введенная согласно (14). Соотношение (15) означает сходимость всех элементов матриц $|U_n|^{-1} \text{var } S_n$ к соответствующим элементам матрицы C при $n \rightarrow \infty$.

Для строго стационарного действительного случайного поля X (т.е. при $k = 1$) это утверждение было установлено в работе [25]. В многомерном случае для полей, стационарных в широком смысле, доказательство полностью аналогично.

Следующая лемма представляет собой расширение сферы действия неравенства, доказанного в статье [20].

ЛЕММА 2. Пусть $Y_1, \dots, Y_p, p \geq 2$, – квази-ассоциированные случайные векторы со значениями в $\mathbb{R}^k$. Тогда для любого $\lambda \in \mathbb{R}^k$ имеет место оценка

$$\left| \mathbf{E} \exp\left\{i \sum_{m=1}^p (\lambda, Y_m)\right\} - \prod_{m=1}^p \mathbf{E} \exp\{i(\lambda, Y_m)\} \right| \leq \sqrt{2} \|\lambda\|^2 \sum_{\substack{m,s=1 \\ m \neq s}}^p \sum_{r,q=1}^k |\text{cov}(Y_{m,r}, Y_{s,q})|, \quad (16)$$

где $(\cdot, \cdot)$ обозначает скалярное произведение в $\mathbb{R}^k$ и $i^2 = -1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всех $\lambda \in \mathbb{R}^k$ и $1 \leq v \leq p-1$, $v \in \mathbb{N}$, верно тождество

$$\begin{aligned} \Delta_{v,p} &= \mathbb{E} \exp \left\{ i \sum_{u=v}^p (\lambda, Y_u) \right\} - \mathbb{E} \exp \{ i(\lambda, Y_v) \} \mathbb{E} \exp \left\{ i \sum_{u=v+1}^p (\lambda, Y_u) \right\} \\ &= \text{cov} \left(\cos(\lambda, Y_v), \cos \left(\sum_{u=v+1}^p (\lambda, Y_u) \right) \right) - \text{cov} \left(\sin(\lambda, Y_v), \sin \left(\sum_{u=v+1}^p (\lambda, Y_u) \right) \right) \\ &\quad + i \left[\text{cov} \left(\cos(\lambda, Y_v), \sin \left(\sum_{u=v+1}^p (\lambda, Y_u) \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \text{cov} \left(\sin(\lambda, Y_v), \cos \left(\sum_{u=v+1}^p (\lambda, Y_u) \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

Заметим, что $f(x_1, \dots, x_k) = \cos(\sum_{r=1}^k \lambda_r x_r)$ и

$$g(x_{v+1,1}, \dots, x_{v+1,k}, \dots, x_{p,1}, \dots, x_{p,k}) = \cos \left(\sum_{r=1}^k \lambda_r \sum_{q=v+1}^p x_{q,r} \right)$$

при каждом фиксированном $\lambda \in \mathbb{R}^k$ являются липшицевыми функциями такими, что $\text{Lip}(f) \leq \|\lambda\|$ и $\text{Lip}(g) \leq \|\lambda\|$. Используя аналогичные неравенства для функций типа синусов, а также тривиальную оценку $|a+ib| \leq \sqrt{2} \max\{|a|, |b|\}$, где $a, b \in \mathbb{R}$, мы видим, что квази-ассоциированность набора величин $Y_1, \dots, Y_p$ влечет неравенство

$$|\Delta_{v,p}| \leq 2\sqrt{2} \|\lambda\|^2 \sum_{u=v+1}^p \sum_{r,t=1}^k |\text{cov}(Y_{v,r}, Y_{u,t})|.$$

Левую часть (16) оценивает $\sum_{v=1}^{p-1} |\Delta_{v,p}|$. Это завершает доказательство леммы.

Теперь перейдем к доказательству теоремы 1. Для $a = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}_+^d$, $U \subset \mathbb{Z}^d$ и $j \in \mathbb{Z}^d$ положим $\tilde{\Lambda}_0(a) = \Lambda_0(a) \cap \mathbb{Z}^d$, $\tilde{\Lambda}_j(a) = \Lambda_j(a) \cap \mathbb{Z}^d$, где $\Lambda_0(a)$ и $\Lambda_j(a)$ были введены в (5) и (6). Тогда для $U \subset \mathbb{Z}^d$ точно так же, как для $V \subset \mathbb{R}^d$ (т.е. используя $\tilde{\Lambda}_0(a)$ и $\tilde{\Lambda}_j(a)$ вместо $\Lambda_0(a)$ и $\Lambda_j(a)$ в (7), (8)) определим $J_a^+(U)$ и $J_a^-(U)$.

Для каждого фиксированного $a \in \mathbb{R}_+^d$ рассмотрим множество $M_n = J_a^-(U_n)$ и

$$U_n^{(1)} = \bigcup_{j \in M_n} \tilde{\Lambda}_j(a), \quad U_n^{(0)} = U_n \setminus U_n^{(1)}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (17)$$

Пусть $\|\cdot\|_0$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^k$. Имеем

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{j \in U_n^{(0)}} (X_j - \mathbb{E} X_j) \right\|_0^2 \leq |U_n^{(0)}| \sum_{r=1}^k \sigma_{r,r}. \quad (18)$$

Поэтому легко видеть, что в силу справедливости соотношений

$$\frac{|U_n^{(0)}|}{|U_n|} \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \frac{|U_n^{(1)}|}{|U_n|} \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty \quad (19)$$

для доказательства (13) достаточно установить следующее:

$$|U_n^{(1)}|^{-1/2}(S(U_n^{(1)}) - |U_n^{(1)}|\mathbf{E}X_0) \xrightarrow{D} N(0, C(a)), \quad n \rightarrow \infty, \quad (20)$$

где $C(a) \rightarrow C$ при $a \rightarrow \infty$ (т.е. $a_r \rightarrow \infty$ для каждого $r = 1, \dots, k$).

Введем случайные поля $\{Y_j(a), j \in M_n\}, n \in \mathbb{N}$, где

$$Y_j(a) = |\tilde{\Lambda}_j(a)|^{-1/2}(S(\tilde{\Lambda}_j(a)) - |\tilde{\Lambda}_j(a)|\mathbf{E}X_0). \quad (21)$$

Тогда

$$|U_n^{(1)}|^{-1/2}(S(U_n^{(1)}) - |U_n^{(1)}|\mathbf{E}X_0) = |M_n|^{-1/2} \sum_{j \in M_n} Y_j(a). \quad (22)$$

При всех $j \in \mathbb{Z}^d$ по лемме 1 имеем

$$\text{var } Y_j(a) = \frac{\text{var } S(\tilde{\Lambda}_0(a))}{|\tilde{\Lambda}_0(a)|} = C(a) \rightarrow C \quad \text{при } a \rightarrow \infty. \quad (23)$$

Очевидно, $\{|M_n|^{-1/2}Y_j(a), j \in M_n\}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ и $a \in \mathbb{R}_+^k$ является набором квази-ассоциированных случайных векторов. Следовательно, лемма 2 и (23) позволят свести доказательство (20) к ЦПТ для массива независимых центрированных случайных векторов, имеющих ковариационную матрицу $C(a)$, если при любом $a \in \mathbb{R}_+^k$

$$\Delta(n, a) = \frac{1}{|M_n|} \sum_{\substack{s, t \in M_n \\ s \neq t}} \sum_{r, q=1}^k |\text{cov}(Y_{s,r}(a), Y_{t,q}(a))| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Для $\varepsilon \in (0, 1/2)$ рассмотрим множества

$$\Lambda_0^\varepsilon(a) = \{s \in \mathbb{Z}^d : \varepsilon a_r < s_r \leq (1 - \varepsilon)a_r, r = 1, \dots, k\}.$$

Пусть $S_r(U)$ обозначает r -ю компоненту вектора $S(U)$, $U \subset \mathbb{Z}^d$. Тогда при всех $n \in \mathbb{N}$ и $a \in \mathbb{R}_+^d$

$$\begin{aligned} \Delta(n, a) &\leq |\Lambda_0(a)|^{-1} \sum_{j \neq 0} \sum_{r, q=1}^k |\text{cov}(S_r(\Lambda_0(a)), S_q(\Lambda_j(a)))| \\ &\leq \sum_{\|j\| > \varepsilon a_0} \sum_{r, q=1}^k |\text{cov}(X_{0,r}, X_{j,q})| + \left(1 - \frac{|\Lambda_0^\varepsilon(a)|}{|\Lambda_0(a)|}\right) \sum_{r, q=1}^k \sigma_{r,q}, \end{aligned} \quad (24)$$

где $a_0 = \min_{r=1, \dots, k} |a_r|$. Выберем ε достаточно малым, а затем возьмем $a \in \mathbb{R}_+^d$ достаточно большим (т.е. все компоненты a будут достаточно велики). В силу (12) мы получим из (24) требуемый результат. Доказательство завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Мы дали детальное доказательство теоремы 1, чтобы выявить роль условия квази-ассоциированности. Более того, как видно, чтобы доказать ЦПТ для строго стационарных векторно-значных полей, достаточно использовать в (4) должные оценки ковариаций только функций типа синусов и косинусов от определенным образом нормализованных сумм исходных случайных векторов, берущихся по кубам. Конечно, при этом налагаются условия вида (11) и (12).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Так же, как в работе [12], можно использовать ренорм-группы для построения полей типа (21) при всех $j \in \mathbb{Z}^d$. Рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 1, показывают, что конечномерные распределения таких полей с ростом параллелепипедов разбиения $\mathbb{R}^d$ будут слабо сходиться к соответствующим конечномерным распределениям централизованного гауссовского поля, имеющего независимые значения.

3. Статистический вариант ЦПТ. Чтобы построить приближенные доверительные области для неизвестного вектора средних строго стационарного квази-ассоциированного случайного поля со значениями в $\mathbb{R}^k$, требуются состоятельные оценки ковариационной матрицы C , введенной в (13). Если C – невырожденная матрица, то (13) влечет следующее соотношение:

$$(C|U_n|)^{-1/2}(S(U_n) - |U_n|EX_0) \xrightarrow{D} N(0, I), \quad (25)$$

где I – единичная матрица порядка k . Таким образом, если имеется последовательность состоятельных оценок $\hat{C}(U_n) = (\hat{c}_{r,q}(U_n))_{r,q=1}^k$ матрицы $C = (c_{r,q})_{r,q=1}^k$, т.е. таких, что при всех $r, q = 1, \dots, k$

$$\hat{c}_{r,q}(U_n) \xrightarrow{P} c_{r,q} \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (26)$$

то в силу (25) и (26) приходим к формуле

$$(\hat{C}(U_n)|U_n|)^{-1/2}(S(U_n) - |U_n|EX_0) \xrightarrow{D} N(0, I). \quad (27)$$

Здесь $\hat{C}(U_n) = \hat{C}(X_j, j \in U_n)$, $n \in \mathbb{N}$, и “ $\xrightarrow{P}$ ” обозначает сходимость по вероятности.

Другими словами, в ЦПТ используется случайная нормализация. В этой связи можно напомнить известную процедуру студентизации для независимых слагаемых.

Для строго стационарной последовательности ($d = 1$), обладающей перемешиванием или свойством ассоциированности, и множеств $U_n = \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, две оценки дисперсий частных сумм были предложены в статье [18]. Эти оценки обеспечивали ЦПТ со случайной нормировкой. Более общие семейства оценок дисперсий частных сумм были введены в [26]. В последней работе изучались действительные ассоциированные случайные поля.

Для $j \in U \subset \mathbb{Z}^d$ ($1 \leq |U| < \infty$), $b = b(U) > 0$ и $r, q = 1, \dots, k$ положим

$$K_j(b) = \{t \in \mathbb{Z}^d : \|j - t\| \leq b\}, \quad Q_j = Q_j(U, b) = U \cap K_j(b), \quad (28)$$

$$\hat{c}_{r,q}(U) = \frac{1}{|U|} \sum_{j \in U} |Q_j| \left(\frac{S_r(Q_j)}{|Q_j|} - \frac{S_r(U)}{|U|} \right) \left(\frac{S_q(Q_j)}{|Q_j|} - \frac{S_q(U)}{|U|} \right). \quad (29)$$

Заметим, что для зависимых слагаемых вместо традиционных оценок ковариационной матрицы, применяемых в случае независимых наблюдений, здесь возникают усредненные величины $S_r(Q_j)/|Q_j|$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ – последовательность регулярно растущих конечных множеств $U_n \subset \mathbb{Z}^d$ (т.е. удовлетворяющих (11)). Предположим, что $b(U_n) = b_n$, где $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ – такая последовательность натуральных чисел, что

$$b_n \rightarrow \infty, \quad \frac{b_n^d |\partial U_n|}{|U_n|} \rightarrow 0, \quad \frac{b_n^{3d} |\partial U_n|}{|U_n|^2} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (30)$$

Тогда справедливо соотношение (26). Кроме того, если матрица C невырожденная, тогда имеет место (27).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценки $(\hat{c}_{r,q}(U))_{r,q=1}^k$, введенные согласно (29), а также элементы матрицы C инвариантны относительно преобразования $X_j \mapsto X_j - \mathbf{E}X_0$, $j \in U$. Поэтому без потери общности мы можем далее считать, что $\mathbf{E}X_0 = 0 \in \mathbb{R}^k$. Обозначим $\|\xi\|_L$ норму случайной величины ξ в пространстве $L = L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Для каждого фиксированных $r, q = 1, \dots, k$ имеем

$$\|\hat{c}_{r,q}(U_n) - c_{r,q}\|_L \leq I_1(U_n) + I_2(U_n) + I_3(U_n),$$

где

$$\begin{aligned} I_1(U_n) &= \frac{1}{|U_n|} \left\| \sum_{j \in U_n} |Q_j| \left\{ \left(\frac{S_r(Q_j)}{|Q_j|} - \frac{S_r(U_n)}{|U_n|} \right) \left(\frac{S_q(Q_j)}{|Q_j|} - \frac{S_q(U_n)}{|U_n|} \right) - \frac{S_r(Q_j)}{|Q_j|} \frac{S_q(Q_j)}{|Q_j|} \right\} \right\|_L, \\ I_2(U_n) &= \frac{1}{|U_n|} \left\| \sum_{j \in U_n} \frac{1}{|Q_j|} (S_r(Q_j) S_q(Q_j) - \mathbf{E} S_r(Q_j) S_q(Q_j)) \right\|_L, \\ I_3(U_n) &= \left| \frac{1}{|U_n|} \sum_{j \in U_n} \frac{1}{|Q_j|} \mathbf{E} S_r(Q_j) S_q(Q_j) - c_{r,q} \right|. \end{aligned}$$

В силу условий (12) и (30)

$$\begin{aligned} I_1(U_n) &\leq |U_n|^{-3} \mathbf{E} |S_r(U_n) S_q(U_n)| \sum_{j \in U_n} |Q_j| \\ &\quad + |U_n|^{-2} \sum_{j \in U_n} (\mathbf{E} |S_r(Q_j) S_q(U_n)| + \mathbf{E} |S_r(U_n) S_q(Q_j)|) \\ &\leq (\sigma_{r,r} \sigma_{q,q})^{1/2} \{K_0(b_n) |U_n|^{-1} + 2|K_0(b_n)|^{1/2} |U_n|^{-1/2}\} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (31)$$

Для $c > 0$ введем функции

$$h_1(x) = \text{sign}(x) \min\{|x|, c\}, \quad h_2(x) = x - h_1(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (32)$$

Для непустого конечного множества $Q \subset \mathbb{Z}^d$ положим

$$\bar{S}_r(Q) = \frac{S_r(Q)}{\sqrt{|Q|}}, \quad r = 1, \dots, k.$$

Заметим, что

$$I_2(U_n) \leq \sum_{p,m=1}^2 I_2^{(p,m)}(U_n), \quad (33)$$

где

$$I_2^{(p,m)}(U_n) = \frac{1}{|U_n|} \left\| \sum_{j \in U_n} h_p(\bar{S}_r(Q_j)) h_m(\bar{S}_q(Q_j)) - \mathbb{E} h_p(\bar{S}_r(Q_j)) h_m(\bar{S}_q(Q_j)) \right\|_L.$$

Для $b, n \in \mathbb{N}$ определим множества

$$T_n^{(b)} = \left\{ s \in U_n : \inf_{t \in \partial U_n} \|s - t\| \leq b \right\}.$$

Введем $T_n = T_n^{(b_n)}$, где b_n удовлетворяют условию (30). Тогда

$$\begin{aligned} & I_2^{(1,2)}(U_n) + I_2^{(2,1)}(U_n) + I_2^{(2,2)}(U_n) \\ & \leq 2|U_n|^{-1} \sum_{j \in U_n} (\mathbb{E}|h_1(\bar{S}_r(Q_j))h_2(\bar{S}_q(Q_j))| + \mathbb{E}|h_2(\bar{S}_r(Q_j))h_1(\bar{S}_q(Q_j))| \\ & \quad + \mathbb{E}|h_2(\bar{S}_r(Q_j))h_2(\bar{S}_q(Q_j))|) \\ & \leq 2(\mathbb{E}|h_1(\bar{S}_r(K_0(b_n)))h_2(\bar{S}_q(K_0(b_n)))| + \mathbb{E}|h_2(\bar{S}_r(K_0(b_n)))h_1(\bar{S}_q(K_0(b_n)))| \\ & \quad + \mathbb{E}|h_2(\bar{S}_r(K_0(b_n)))h_2(\bar{S}_q(K_0(b_n)))| + 3|T_n||U_n|^{-1}(\sigma_{r,r}\sigma_{q,q})^{1/2}) \\ & \leq 4(\sigma_{r,r}\mathbb{E}(\bar{S}_q(K_0(b_n))^2 \mathbf{1}\{|\bar{S}_q(K_0(b_n))| \geq c\}))^{1/2} \\ & \quad + 2(\sigma_{q,q}\mathbb{E}(\bar{S}_r(K_0(b_n))^2 \mathbf{1}\{|\bar{S}_r(K_0(b_n))| \geq c\}))^{1/2} + 6|T_n||U_n|^{-1}(\sigma_{r,r}\sigma_{q,q})^{1/2}, \end{aligned}$$

здесь $\mathbf{1}$ – индикатор события.

Нетрудно видеть, что при каждом $r = 1, \dots, k$ семейство $\{\bar{S}_r^2(K_0(b_n))\}_{n=1}^\infty$ равномерно интегрируемо. Следовательно, принимая во внимание (30), видим, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $c = c(\varepsilon)$ такое, что при всех достаточно больших n

$$I_2^{(1,2)}(U_n) + I_2^{(2,1)}(U_n) + I_2^{(2,2)}(U_n) < \varepsilon. \quad (34)$$

Теперь заметим, что

$$(I_2^{(1,1)}(U_n))^2 \leq |U_n|^{-2} \sum_{j,t \in U_n} |\text{cov}(h_1(\bar{S}_r(Q_j))h_1(\bar{S}_q(Q_j)), h_1(\bar{S}_r(Q_t))h_1(\bar{S}_q(Q_t)))|.$$

Учитывая (32), приходим к неравенствам

$$\begin{aligned} & |U_n|^{-2} \sum_{\substack{j,t \in U_n \\ \|j-t\| \leq 2b_n}} |\text{cov}(h_1(\bar{S}_r(Q_j))h_1(\bar{S}_q(Q_j)), h_1(\bar{S}_r(Q_t))h_1(\bar{S}_q(Q_t)))| \\ & \leq 2c^2|U_n|^{-2} \sum_{\substack{j,t \in U_n \\ \|j-t\| \leq 2b_n}} \mathbb{E}|h_1(\bar{S}_r(Q_j))h_1(\bar{S}_q(Q_j))| \\ & \leq 2^{d+1}c^2|U_n|^{-1}|K_0(b_n)|(\sigma_{r,r}\sigma_{q,q})^{1/2}. \end{aligned} \quad (35)$$

Свойство квази-ассоциированности позволяет получить, что

$$\begin{aligned}
 & |U_n|^{-2} \sum_{\substack{j, t \in U_n \\ \|j-t\| > 2b_n}} |\text{cov}(h_1(\bar{S}_r(Q_j))h_1(\bar{S}_q(Q_j)), h_1(\bar{S}_r(Q_t))h_1(\bar{S}_q(Q_t)))| \\
 & \leq c^2 |U_n|^{-2} \sum_{\substack{j, t \in U_n \\ \|j-t\| > 2b_n}} |Q_j|^{-1/2} |Q_t|^{-1/2} \sum_{u \in Q_j, v \in Q_t} (|\text{cov}(X_{u,r}, X_{v,q})| \\
 & + |\text{cov}(X_{u,q}, X_{v,r})| + |\text{cov}(X_{u,r}, X_{v,r})| + |\text{cov}(X_{u,q}, X_{v,q})|). \quad (36)
 \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\substack{j, t \in U_n \\ \|j-t\| > 2b_n}} |Q_j|^{-1/2} |Q_t|^{-1/2} \sum_{u \in Q_j, v \in Q_t} |\text{cov}(X_{u,r}, X_{v,q})| \\
 & \leq \sum_{u, v \in U_n} |\text{cov}(X_{u,r}, X_{v,q})| \sum_{\substack{j \in U_n \\ Q_j \ni u}} |Q_j|^{-1/2} \sum_{\substack{t \in U_n \\ Q_t \ni v}} |Q_t|^{-1/2} \\
 & \leq \frac{1}{2} \sum_{u, v \in U_n} |\text{cov}(X_{u,r}, X_{v,q})| \left[\left(\sum_{\substack{j \in U_n \\ Q_j \ni u}} |Q_j|^{-1/2} \right)^2 + \left(\sum_{\substack{t \in U_n \\ Q_t \ni v}} |Q_t|^{-1/2} \right)^2 \right] \\
 & \leq (|K_0(U_n)| |U_n| + |K_0(U_n)|^2 |T_n|) \sigma_{r,q}.
 \end{aligned}$$

Оценивая аналогичным образом все суммы, фигурирующие в правой части неравенства (36), и применяя (35), видим, что

$$\begin{aligned}
 & (I_2^{(1,1)}(U_n))^2 \leq c^2 \{2^{d+1} |U_n|^{-1} |K_0(b_n)| (\sigma_{r,r} \sigma_{q,q})^{1/2} \\
 & + (|K_0(b_n)| |U_n|^{-1} + |K_0(b_n)|^2 |T_n| |U_n|^{-2}) (\sigma_{r,q} + \sigma_{q,r} + \sigma_{r,r} + \sigma_{q,q})\}. \quad (37)
 \end{aligned}$$

Учитывая (30), (33), (34) и (37), получаем, что

$$I_2(U_n) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (38)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
 & |U_n|^{-1} \sum_{j \in U_n} |Q_j|^{-1} \mathbb{E} S_r(Q_j) S_q(Q_j) \\
 & = |U_n|^{-1} |U_n \setminus T_n| |K_0(b_n)|^{-1} \mathbb{E} S_r(K_0(b_n)) S_q(K_0(b_n)) \\
 & + |U_n|^{-1} \sum_{j \in T_n} |Q_j|^{-1} \mathbb{E} S_r(Q_j) S_q(Q_j).
 \end{aligned}$$

В силу (15) справедливо следующее соотношение:

$$|K_0(b_n)|^{-1} \mathbb{E} S_r(K_0(b_n)) S_q(K_0(b_n)) \rightarrow c_{r,q} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Согласно (30) имеем

$$|T_n| |U_n|^{-1} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Воспользовавшись очевидным неравенством

$$|Q_j|^{-1} \mathbf{E} |S_r(Q_j) S_q(Q_j)| \leq (\sigma_{r,r\sigma_{q,q}})^{1/2}, \quad j \in \mathbb{Z}^d,$$

заключаем, что

$$I_3(U_n) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (39)$$

Соотношения (31), (38) и (39) влекут (26). Теорема 2 полностью доказана.

Автор признателен доценту С. А. Боровковой и профессору М. Деккингу за приглашение в Технический университет Делфта (Нидерланды), где в декабре 2002 года была выполнена эта работа, а также всем сотрудникам лаборатории CROSS этого университета за гостеприимство.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bulinski A., Suquet C. Normal approximation for quasi-associated random fields // Statist. Probability Lett. 2001. V. 54. P. 215–226.
- [2] Булинский А. В. Асимптотическая нормальность квази-ассоциированных векторных случайных полей // Обзорение прикладн. и промысл. матем. 2000. Т. 7. С. 482–483.
- [3] Doukhan P., Louhichi S. A new weak dependence condition and application to moment inequalities // Stoch. Proc. Appl. 1999. V. 84. P. 313–342.
- [4] Doukhan P., Lang G. Rates in the empirical central limit theorem for stationary weakly dependent random fields // Statist. Inf. Stoch. Proc. 2002. V. 5. P. 199–228.
- [5] Esary J., Proschan F., Walkup D. Association of random variables with applications // Ann. Math. Statist. 1967. V. 38. P. 1466–1474.
- [6] Newman C. M. Asymptotic independence and limit theorems for positively and negatively dependent random variables // Inequalities in Statistics and Probability / ed. Y. L. Tong. IMS Lecture Notes Monograph Ser. Hayward, CA: Inst. Math. Statist., 1984. P. 127–140.
- [7] Joag-Dev K., Proschan F. Negative association of random variables, with applications // Ann. Statist. 1983. V. 11. P. 286–295.
- [8] Ebrahimi E. On the dependence structure of certain multidimensional Ito processes and corresponding hitting times // J. Multivar. Anal. 2002. V. 81. P. 128–137.
- [9] Evans S. Association and random measures // Probability Theory Related Fields. 1990. V. 86. P. 1–19.
- [10] Fortuin C., Kasteleyn P., Ginibre J. Correlation inequalities on some partially ordered sets // Comm. Math. Phys. 1971. V. 22. P. 89–103.
- [11] Lee M.-L. T., Rachev S. T., Samorodnitsky G. Association of stable random variables // Ann. Probability. 1990. V. 18. P. 1759–1764.
- [12] Newman C. M. Normal fluctuations and FKG-inequalities // Comm. Math. Phys. 1980. V. 74. P. 119–128.
- [13] Pitt L. Positively correlated normal variables are associated // Ann. Probability. 1982. V. 10. P. 496–499.
- [14] Rachev S. T., Xin H. Test on association of random variables in the domain of a multivariate stable law // Probability Math. Statist. 1993. V. 14. P. 125–141.
- [15] Булинский А. В., Шабанович Э. Асимптотическое поведение некоторых функционалов от положительно и отрицательно зависимых случайных полей // Фундамент. и прикл. матем. 1998. Т. 4. С. 479–492.
- [16] Birkel T. On the convergence rate in the central limit theorem for associated processes // Ann. Probab. 1988. V. 16. №4. P. 1685–1698.
- [17] Roussas G. G. Asymptotic normality of random fields of positively and negatively associated processes // J. Multivar. Anal. 1994. V. 50. P. 152–173.
- [18] Peligrad M., Shao Q.-M. Estimation of variance of partial sums of an associated sequence of random variables // Stochastic Proc. Appl. 1995. V. 56. P. 307–319.

- [19] Bulinski A. V. On the convergence rates in the central limit theorem for positively and negatively dependent random fields // Proceedings of the Kolmogorov semester in the Euler Math. Inst. (March 1993) / ed. I. A. Ibragimov, A. Yu. Zaitsev. Probability Theory and Mathematical Statistics. London: Gordon and Breach, 1996. P. 3–14.
- [20] Burton R., Dabrowski A. R., Dehling H. An invariance principle for quasi-associated random vectors // Stochastic Process. Appl. 1986. V. 23. P. 301–306.
- [21] Bulinski A., Shashkin A. Rates in the CLT for vector-valued random fields // Prépublications de Mathématiques de l'Université Paris 10. V. 24. Nanterre, 2003. P. 1–27.
- [22] Пашкин А. П. Квази-ассоциированность гауссовских систем векторов // УМН. 2002. Т. 57. № 6. С. 199–200.
- [23] Бахтин Ю. Ю., Булинский А. В. Моментные неравенства для сумм зависимых мультииндексированных величин // Фундамент. и прикл. матем. 1997. Т. 3. С. 1101–1108.
- [24] Рюэль Д. Статистическая механика. М.: Мир, 1972.
- [25] Bolthausen E. On the central limit theorem for mixing random fields // Ann. Probability. 1982. V. 10. P. 1047–1050.
- [26] Булинский А. В., Вронский М. А. Статистический вариант ЦПТ для ассоциированных случайных полей // Фундамент. и прикл. матем. 1996. Т. 2. С. 891–908.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: bulinski@mech.math.msu.su

Поступило
18.03.2003