Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Монахов, М. В. Селькин, Нормальные подгруппы конечных групп и формации с нормализаторными условиями, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 6, 867–870

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1230>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 13:15:51

УДК 512.542

НОРМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП И ФОРМАЦИИ С НОРМАЛИЗАТОРНЫМИ УСЛОВИЯМИ

В. С. Монахов, М. В. Селькин

Исследуется строение нормальной подгруппы K конечной группы G при условии, что нетривиальные пересечения K с максимальными подгруппами группы G принадлежат произвольной формации с нормализаторным условием.

Библиография: 6 названий.

Будем говорить, что формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет *нормализаторному условию*, если $\mathfrak{F}$ наследственна и содержит всякую конечную группу, у которой нормализаторы всех силовских подгрупп принадлежат $\mathfrak{F}$. По теореме из [1] формация $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп удовлетворяет нормализаторному условию. Нетрудно проверить, что класс всех вполне факторизуемых групп и класс всех φ -дисперсивных групп с абелевыми силовскими подгруппами являются формациями, удовлетворяющими нормализаторному условию (см. леммы 1 и 2).

Пусть $\mathfrak{F}$ – произвольная формация, удовлетворяющая нормализаторному условию. В настоящей заметке исследуется строение нормальной подгруппы K конечной группы G при условии, что $K \cap M \in \mathfrak{F}$ для каждой максимальной подгруппы M группы G , не содержащей K . Полученные результаты развивают один из фрагментов раздела 3.1 монографии [2].

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и определения стандартны, их можно найти, например, в [2], [3]. Запись $G = [A]B$ означает полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B .

ЛЕММА 1. Пусть φ – некоторое упорядочение множества простых чисел и $\mathfrak{B}$ – класс всех φ -дисперсивных групп с абелевыми силовскими подгруппами. Тогда $\mathfrak{B}$ – формация, удовлетворяющая нормализаторному условию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что класс $\mathfrak{B}$ замкнут относительно подгрупп, факторгрупп и прямых произведений. Поэтому $\mathfrak{B}$ – наследственная формация. Пусть p – простой делитель порядка группы G такой, что $q \nmid p$ для всех $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$, и G_p – ее силовская p -подгруппа (см. [3, с. 251]). По условию $N_G(G_p) \in \mathfrak{B}$, поэтому G_p абелева. Ясно, что $N_G(G_p) = [G_p]D$, где D – p -дополнение в $N_G(G_p)$, которое существует по теореме I.18.2 из [4]. Так как $N_G(G_p)$ φ -дисперсивна, то $N_G(G_p) = G_p \times D$ и в G имеется нормальное p -дополнение $G_{p'}$ по теореме IV.2.6 из [4]. Если Q – произвольная

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Белорусского фонда фундаментальных исследований, грант № Ф96-301.

силовская подгруппа группы $G_{p'}$, то Q силовская в G и по условию леммы $N_G(Q) \in \mathfrak{B}$. Так как $\mathfrak{B}$ – наследственная формация, то $N_{G_{p'}}(Q) = N_G(Q) \cap G_{p'} \in \mathfrak{B}$. К подгруппе $G_{p'}$ применима индукция, по которой $G_{p'} \in \mathfrak{B}$. Теперь из выбора числа p следует, что $G \in \mathfrak{B}$. Лемма доказана.

Вполне факторизуемой называют группу, у которой все подгруппы дополняемы. Хорошо известно, что вполне факторизуемая группа сверхразрешима с элементарными абелевыми силовскими подгруппами (см. [5, теорема 7.1]).

ЛЕММА 2. *Класс всех вполне факторизуемых групп является наследственной формацией, удовлетворяющей нормализаторному условию.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{H}$ – класс всех вполне факторизуемых групп. Тогда $\mathfrak{H}$ содержится в классе $\mathfrak{B}$ из леммы 1, если упорядочение φ таково, что $p \varphi q$ всегда влечет $p > q$. Поэтому каждая группа G , у которой нормализаторы силовских подгрупп принадлежат $\mathfrak{H}$, содержится в $\mathfrak{B}$, в частности, G дисперсивна по Оре. Но теперь G совпадает с нормализатором силовской подгруппы, поэтому $G \in \mathfrak{H}$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, удовлетворяющая нормализаторному условию. Если K – нормальная подгруппа группы G и $M \cap K \in \mathfrak{F}$ для каждой максимальной подгруппы M группы G , не содержащей K , то для некоторого множества простых чисел π подгруппа $K = [K_\pi]K_{\pi'}$, где $K_\pi \in \mathfrak{N}$, а $K_{\pi'} \in \mathfrak{F}$. В частности, если $\mathfrak{F}$ разрешима, то и подгруппа K разрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через π обозначим множество всех простых делителей p порядка подгруппы K , для которых силовская p -подгруппа из K нормальна в K . Ясно, что существует π -холловская подгруппа K_π в K и K_π – нильпотентная нормальная подгруппа в K . По теореме I.18.2 из [4] существует π' -холловская подгруппа $K_{\pi'}$ и для любого $p \in \pi'$ силовская p -подгруппа K_p подгруппы K ненормальна в G , поэтому $N_G(K_p) \neq G$. Пусть M – максимальная в G подгруппа, содержащая $N_G(K_p)$. По лемме Фраттини $G = KN_G(K_p)$, поэтому K не содержится в M . По условию теоремы пересечение $M \cap K \in \mathfrak{F}$, а так как $\mathfrak{F}$ – наследственная формация и $N_{K_{\pi'}}(K_p) = N_G(K_p) \cap K_{\pi'} \subseteq M \cap K$, то $N_{K_{\pi'}}(K_p) \in \mathfrak{F}$. Но $\mathfrak{F}$ удовлетворяет нормализаторному условию, поэтому $K_{\pi'} \in \mathfrak{F}$. Теорема доказана.

Отметим, что, придавая различные значения формации $\mathfrak{F}$, из теоремы 1 можно извлечь ряд следствий. Например, в силу лемм 1 и 2 и результата из [1] условиям теоремы 1 удовлетворяют формации $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{N}$. Для $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$ теорема 1 дает новые результаты, а для $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ она превращается в теорему 2 из [6].

Если нормальная подгруппа K имеет тривиальное пересечение с подгруппой Фраттини $\Phi(G)$ группы G , то строение нильпотентной нормальной подгруппы K_π можно существенно уточнить. Напомним, что для формации $\mathfrak{F}$ и группы G через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$ -корадикал группы G (см. [3, с. 10]). Подгруппа Фиттинга группы G обозначается через $F(G)$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, удовлетворяющая нормализаторному условию, и K – нормальная подгруппа группы G такая, что $K \cap \Phi(G) = 1$. Если $M \cap K \in \mathfrak{F}$ для каждой максимальной подгруппы M группы G , не содержащей K , то либо $K \in \mathfrak{F}$, либо $K^{\mathfrak{F}} = F(K)$ – единственная минимальная нормальная в G*

подгруппа из K , являющаяся силовой p -подгруппой в K для некоторого простого p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 1 подгруппа $K = [K_\pi]K_{\pi'}$, где $K_\pi \in \mathfrak{N}$, $K_{\pi'} \in \mathfrak{F}$. Пусть K не принадлежит $\mathfrak{F}$. Тогда $K_\pi \neq 1$. Пусть N – произвольная минимальная нормальная в G подгруппа, содержащаяся в K_π . Так как $K_\pi \in \mathfrak{N}$, то N – элементарная абелева p -группа для некоторого простого p . Поскольку N не содержится в $\Phi(G)$, существует максимальная в G подгруппа M такая, что $G = [N]M$. Отсюда $K = [N](K \cap M)$. Но по условию теоремы $K \cap M \in \mathfrak{F}$, поэтому $K^{\mathfrak{F}} \subseteq N$. Так как $K^{\mathfrak{F}}$ – характеристическая в K подгруппа, то $K^{\mathfrak{F}}$ нормальна в G . По условию $K \notin \mathfrak{F}$, поэтому $K^{\mathfrak{F}} \neq 1$, а из минимальности N следует, что $K^{\mathfrak{F}} = N$. Отсюда, в частности, следует, что N – единственная минимальная нормальная в G подгруппа, содержащаяся в K_π , а по лемме 7.9 из [3] подгруппа $K_\pi = N$, поэтому N – силовая в K подгруппа.

Предположим, что существует нормальная в G подгруппа L , содержащаяся в K и отличная от N . Так как L не содержится в $\Phi(G)$, существует максимальная в G подгруппа H такая, что $LH = G$. Теперь $K \cap H \in \mathfrak{F}$, а так как $K = L(K \cap H)$, то $N = K^{\mathfrak{F}} \leq L$, противоречие. Теорема доказана.

В случае $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ строение подгруппы K допускает более подробное описание (см. [2, раздел 3.1]). Некоторые из результатов этого раздела могут быть распространены на произвольные формации, удовлетворяющие нормализаторному условию. Например, из следующей теоремы в случае $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ вытекает лемма 3.1.1 из [2].

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, содержащая $\mathfrak{N}$ и удовлетворяющая нормализаторному условию, и пусть K – субнормальная подгруппа группы G . Если $M \cap K \in \mathfrak{F}$ для каждой максимальной подгруппы M группы G , не содержащей K , то $K \in \mathfrak{F}^n$ для некоторого натурального n . В частности, если $\mathfrak{F}$ – разрешимая формация, то подгруппа K разрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по числу $|G| + |K|$. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G . Согласно лемме 7.2 из [3] подгруппа KN/N субнормальна в G/N . Пусть M/N – максимальная подгруппа группы G/N , не содержащая KN/N . Тогда M не содержит K , поэтому $M \cap K \in \mathfrak{F}$. Теперь $M/N \cap KN/N = (M \cap K)N/N \simeq M \cap K/M \cap K \cap N \in \mathfrak{F}$ и по индукции $KN/N \simeq K/N \cap K \in \mathfrak{F}^n$ для некоторого натурального n .

Если $N \cap K \neq K$, то $N \cap K$ субнормальна в G . Кроме того, каждая максимальная в G подгруппа M , не содержащая $K \cap N$, не содержит K , поэтому $K \cap M \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, то $K \cap N \cap M \in \mathfrak{F}$. По индукции $K \cap N \in \mathfrak{F}^m$ для некоторого натурального m , поэтому $K \in \mathfrak{F}^{n+m}$, и в этом случае теорема справедлива.

Пусть $N \cap K = K$, т.е. $K \subseteq N$. Пусть $x \in G$ и H – максимальная подгруппа группы G , которая не содержит K^x . Тогда максимальная подгруппа $H^{x^{-1}}$ не содержит K и по условию теоремы $H^{x^{-1}} \cap K \in \mathfrak{F}$. Теперь $H \cap K^x \in \mathfrak{F}$ и для K^x все условия теоремы выполняются.

Если N разрешима, то $K \in \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть N неразрешима. Тогда N и K – прямые произведения изоморфных простых неабелевых групп по теореме I.9.12 из [4]. Пусть $K = L_1 \times \dots \times L_k$, где L_1 – простая группа. Если $k \geq 2$, то для L_1 все условия теоремы выполняются, поэтому $L_1 \in \mathfrak{F}^n$. Но теперь $K \in \mathfrak{F}^n$, и теорема в этом случае справедлива.

Пусть K – простая неабелева группа. Так как N – минимальная нормальная подгруппа группы G , то $N = K^{x_1} \times \dots \times K^{x_n}$, где $K^{x_1} = K$. Пусть P – силовская p -подгруппа группы N . Очевидно, $P \cap K^{x_i}$ – силовская p -подгруппа K^{x_i} для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Поэтому $P = (P \cap K^{x_1}) \times \dots \times (P \cap K^{x_n})$. Пусть $D = N_{K^{x_1}}(P \cap K^{x_1}) \times \dots \times N_{K^{x_n}}(P \cap K^{x_n})$ и $y \in D$. Тогда $y = y_1 \dots y_n$, где $y_i \in N_{K^{x_i}}(P \cap K^{x_i})$. Элемент y_i нормализует $P \cap K^{x_i}$ и централизует $P \cap K^{x_j}$ для всех $j \neq i$. Поэтому $y_i \in N_N(P)$ и $y \in N_N(P)$. Таким образом, $D \subseteq N_N(P)$.

Ввиду леммы Фраттини $G = N_G(P)N$. Из строения N следует, что $N_G(P) \neq G$. Пусть M – максимальная подгруппа группы G , содержащая $N_G(P)$. Тогда $MN = G$ и $P \subseteq M \cap N$. Так как $N = K^{x_1} \times \dots \times K^{x_n}$, найдется номер $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, для которого подгруппа K^{x_k} не содержится в M . Поскольку $N_N(P) \subseteq M$, то $N_{K^{x_k}}(P \cap K^{x_k}) \subseteq M$. Как отмечалось выше, подгруппа K^{x_k} удовлетворяет условиям теоремы, поэтому $M \cap K^{x_k} \in \mathfrak{F}$. Но тогда $N_{K^{x_k}}(P \cap K^{x_k}) \in \mathfrak{F}$, так как $\mathfrak{F}$ – наследственная формация. Из сопряженности подгруппы K и K^{x_k} получаем, что $N_K(P \cap K) \in \mathfrak{F}$.

Итак, для любого $p \in \pi(K)$ нормализатор силовской p -подгруппы из K содержится в $\mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ удовлетворяет нормализаторному условию, то $K \in \mathfrak{F}$. Теорема доказана полностью.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bianchi M., Mauri A.G., Hauck P. On finite groups with nilpotent Sylow-normalizers // Arch. Math. 1968. Т. 74. № 3. С. 193–197.
- [2] Селькин М. В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп. Минск: Белорусская наука, 1997.
- [3] Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
- [4] Huppert B. Endliche Gruppen. I. Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1967.
- [5] Черников С. Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп. М.: Наука, 1980.
- [6] Монахов В. С., Селькин М. В. О строении нормальных подгрупп конечных групп // Вопросы алгебры. Вып. 6. Минск: Университетское, 1993. С. 96–100.