Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Д. Мышкис, Многозначные решения дифференциальных уравнений второго порядка, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 6, 871–878

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1231>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 10:49:23

УДК 517.91

МНОГОЗНАЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. Д. Мышкис

Многозначные (не множественно-значные, как в теории дифференциальных включений!) решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) естественно появляются в геометрических и физических задачах, когда независимая и зависимая переменные x, y являются геометрическими координатами текущей точки искомой линии. В заметке приводятся несколько простых результатов, относящихся к гладким многозначным решениям вещественных ОДУ второго порядка, разрешенных относительно y'' ; при этом отмечается особая роль в данном вопросе уравнений третьей степени относительно y' . Метод исследования основан на комбинации ОДУ для $y(x)$ и $x(y)$.

Библиография: 3 названия.

1. Введение. Многозначные (не множественно-значные, как в теории дифференциальных включений!) решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) естественно появляются в геометрических и физических задачах, когда независимая и зависимая переменные x, y являются геометрическими координатами текущей точки искомой линии. Конечно, эти координаты можно считать однозначными функциями некоторого параметра – например, длины дуги этой линии; однако в ряде случаев рассмотрение непосредственной зависимости $y(x)$ оказывается более естественным. В этой заметке будет приведено несколько простых результатов, относящихся к гладким многозначным решениям (M -решениям) вещественных ОДУ второго порядка. Особая роль в данном вопросе уравнений третьей степени относительно y' отмечалась, в частности, в статьях [1], [2].

Основная идея построения M -решений весьма проста и состоит в замене при необходимости зависимости $y(x)$ на зависимость $x(y)$. Рассмотрим уравнение

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)) \quad (1)$$

(точные предположения будут указаны в п. 3). Тогда если $y'(x) \neq 0$ на некотором интервале $a < x < b$, то при $x \in (a, b)$ можно перейти к зависимости $x(y)$, для которой уравнение имеет вид

$$x''(y) = -f\left(x(y), y, \frac{1}{x'(y)}\right) x'(y)^3. \quad (2)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-00909а, и Фонда фундаментальных исследований Министерства путей сообщения РФ, грант НИОКР 47/98.5.6.

При этом если $y(x) \rightarrow y_0$ и $y'(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow b^-$ и мы хотим охватить уравнением (2) концевую точку (b, y_0) интегральной линии, то правую часть уравнения (2) надо дополнить предельным значением $g(b, y_0, 0^+)$, где $g(x, y, w) := -f(x, y, 1/w)w^3$.

Мы видим, что для конечности этого предельного значения необходимо, чтобы величина $|f(x, y, z)|$ росла при $z \rightarrow \infty$ не быстрее, чем z^3 . Кроме того, представив

$$g(x, y, w) = g(x, y, 0^+) + g_1(x, y, w),$$

получаем, что для выполнения условия Липшица по w при $w = 0$ надо требовать, чтобы $g_1(x, y, w) = O(w)$ при $w \rightarrow 0^+$. Для f это означает возможность представления

$$f(x, y, z) = -g(x, y, 0^+)z^3 + O(z^2) \quad \text{при } z \rightarrow \infty.$$

Аналогично рассматривается случай, когда $y'(x) \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow b^-$; при этом, вообще говоря, $g(x, y, 0^+) \neq g(x, y, 0^-)$. Если это так, то при сохранении уравнения (1) продолжение интегральной линии через точку (b, y_0) в классе C^2 невозможно. Более того, продолжение может оказаться невыполнимым даже в классе C^1 , что легко показать на следующем примере.

2. Примеры. Рассмотрим уравнение

$$y''(x) = [1 + y'(x)^2]^{3/2}. \quad (3)$$

Его непродолжимыми в стандартном смысле интегральными линиями служат произвольно расположенные на плоскости x, y открытые “нижние” полуокружности радиуса 1. Здесь $g(x, y, w) = -(1 + w^{-2})^{3/2}w^3$, т.е. $g(x, y, 0^+) \equiv -1 \neq 1 \equiv g(x, y, 0^-)$. Очевидно, что при сохранении уравнения (3) продолжение интегральных линий через точки с вертикальной касательной в классе C^1 невозможно, так как появляются точки возврата. Естественным продолжением таких линий в классе C^2 (и единственным в классе аналитических линий) здесь служат соответствующие “верхние” полуокружности, которые являются интегральными линиями для уравнения

$$y''(x) = -[1 + y'(x)^2]^{3/2}. \quad (4)$$

Обратно, если исходным является уравнение (4), то при продолжении интегральной линии через точки с вертикальной касательной надо перейти к уравнению (3). Отметим, что правая часть уравнения (3) при $|y'(x)| \rightarrow \infty$ имеет вид $|y'(x)|^3 + O(y'(x)^2)$.

Аналогичная ситуация возникает в ряде физических задач при построении линий раздела сред. Так, дифференциальное уравнение равновесной линии для плоской задачи о капиллярной жидкости в однородном поле тяжести имеет вид

$$y''(x) = [1 + y'(x)^2]^{3/2}[by(x) + q],$$

а для аналогичной осесимметричной задачи при наличии вращения – вид

$$y''(x) = [1 + y'(x)^2]^{3/2}[by(x) - px^2 + q] - \frac{1}{x}[y'(x) + y'(x)^3]$$

(см. [3, § 1.6, § 1.10]). Для этих уравнений “завороты” графика решения, т.е. его дву- и более значность, имеют совершенно реальный смысл.

В отличие от этого в примере

$$y''(x) = y'(x)^3 \quad (5)$$

с общим решением $(y - C_1)^2 = 2(x - C_2)$ смены уравнения при переходе через точки с вертикальной касательной не требуется: “верхние” и “нижние” половины парабол удовлетворяют одному и тому же уравнению (5).

3. Основное определение. Соображения, изложенные в п. 1 и 2, дают основание для рассмотрения ОДУ следующей общей формы:

$$y''(x) = f_1(x, y(x))y'(x)^3 + f_2(x, y(x))|y'(x)|^3 + f_3(x, y(x), y'(x)). \quad (6)$$

Ему сопутствует уравнение

$$y''(x) = f_1(x, y(x))y'(x)^3 - f_2(x, y(x))|y'(x)|^3 + f_3(x, y(x), y'(x)), \quad (7)$$

а также вспомогательные уравнения

$$x''(y) = -f_1(x(y), y) - f_2(x(y), y) + g_3(x(y), y, x'(y)), \quad (8)$$

$$x''(y) = -f_1(x(y), y) + f_2(x(y), y) + g_3(x(y), y, x'(y)), \quad (9)$$

где

$$g_3(x, y, w) := -f_3\left(x, y, \frac{1}{w}\right)w^3, \quad w \neq 0, \quad g_3(x, y, 0) := 0.$$

Предполагаем для простоты, что все функции f_i и g_3 определены при всех значениях своих аргументов и удовлетворяют по ним локальному условию Липшица; $f_3(x, y, z) = O(z^2)$ при $|z| \rightarrow \infty$ локально равномерно по x, y . Под M -решением уравнения (6) понимаем многозначную функцию $y(x)$, график Γ которой представляет собой ориентированную линию класса C^2 (быть может, с самопересечениями) и является объединением конечной или бесконечной (в одну или обе стороны) последовательности графиков Γ_k , $k \in K \subseteq \mathbb{Z}$, (обычных) решений уравнений (6)–(9), причем

- а) K – интервал в $\mathbb{Z}$, т.е. $(k_1 < k_2 < k_3, k_1, k_3 \in K, k_2 \in \mathbb{Z}) \implies k_2 \in K$;
- б) если $k, k+1 \in K$, то конечная точка для Γ_k является начальной для Γ_{k+1} ;
- в) при четном $k \in K$ Γ_k является графиком решения уравнения (6) (соответственно (7)), если x вдоль Γ_k возрастает (соответственно убывает);
- г) при нечетном $k \in K$ Γ_k является графиком решения уравнения (8) (соответственно (9)), если y вдоль Γ_k возрастает (соответственно убывает).

Нетрудно проверить, что в точках стыка дуг Γ_k ОДУ, отвечающие этим дугам, эквивалентны друг другу. Рассмотрим, например, конечную точку дуги, которой отвечает уравнение (6). Если в ней $y'(x) > 0$, то в ее окрестности ОДУ (6) удовлетворяется без знака модуля, и по общей формуле (2) переход осуществляется к уравнению (8). Если же в упомянутой точке $y'(x) < 0$, то в ее окрестности имеем $|y'(x)|^3 = -y'(x)^3$, и по формуле (2) после перехода получаем уравнение (9). Аналогично проверяются конечные точки дуг, отвечающих уравнениям (7)–(9).

Из сказанного следует, в частности, что для каждого k соответствующее уравнение (6)–(9) выполняется на всем интервале, на котором существуют производные, входящие в это уравнение. Другим следствием является принадлежность интегральной линии не только классу C^2 , но и любому из классов C^r ($r = 3, \dots, \infty, a$), если каждое из “задействованных” при построении этой линии уравнений (6)–(9), взятое независимо от остальных уравнений, обеспечивает эту принадлежность.

Если дополнительно задано начальное условие

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad (10)$$

то будем считать, что $(x_0, y_0) \in \Gamma_0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если последнее требование убрать, то в начальном условии необходимо задавать дополнительно ориентацию линии Γ в начальной точке, т.е. мы получаем, вообще говоря, два решения задачи (6), (10). В этом случае можно задавать и “бесконечное значение” для y'_0 также с дополнительным заданием ориентации.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если в уравнении (6) первые два члена отсутствуют, то в силу известной теоремы С.Н. Бернштейна обострение ограниченных решений невозможно и потому M -решение задачи (6), (10) является ее классическим решением. M -решениями уравнения (6) в данном случае, кроме классических решений, служат также функции $x \mapsto \mathbb{R}$ с односточечной областью определения.

4. Разрешимость начальной задачи.

ЛЕММА 1. Для заданного уравнения (6) и любого $R > 0$ существует $h > 0$ такое, что кривизна графика любого M -решения в каждой точке (x, y) , для которой $x^2 + y^2 \leq R^2$, не превосходит h .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть при заданном $R > 0$

$$h := \max \left\{ \max_{\substack{x^2+y^2 \leq R^2 \\ |z| \leq 1}} \{ |f_1(x, y)| + |f_2(x, y)| + |f_3(x, y, z)| \}, \right. \\ \left. \max_{\substack{x^2+y^2 \leq R^2 \\ |w| \leq 1}} \{ |f_1(x, y)| + |f_2(x, y)| + |g_3(x, y, w)| \} \right\}.$$

Тогда если для какой-либо точки (x, y) , $x^2 + y^2 \leq R^2$, графика M -решения $|y'(x)| \leq 1$, то $|y''(x)| \leq h$ в силу уравнений (6) и (7); если же для этой точки $|y'(x)| \geq 1$, то для нее $|x'(y)| \leq 1$ и потому $|x''(y)| \leq h$ в силу уравнений (8) и (9). В обоих случаях кривизна графика в рассматриваемой точке не превосходит h , что и требовалось доказать.

При рассмотрении решения начальной задачи будем пользоваться параметрическим представлением графика M -решения через длину s дуги, отсчитываемую от начальной точки графика в соответствии с его ориентацией.

ТЕОРЕМА 1. Пусть заданы уравнение (6) и начальное условие (10), причем выполнены предположения п. 3. Тогда

- а) существует M -решение задачи (6), (10), определенное при $-\infty < s < \infty$;
- б) график любого другого решения этой задачи представляет собой часть графика решения, указанного в а);
- в) на любом конечном интервале изменения s для M -решения задачи (6), (10) функции $s \mapsto x(s)$, $y(s)$, $x'(s)$, $y'(s)$ непрерывно зависят от (s, x_0, y_0, y'_0) по метрике равномерного отклонения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим сначала M -решение в положительном направлении ориентации его графика. Для этого обозначим через $[x_0, a_1]$ максимальный интервал существования обычного решения $y = Y_0$ задачи (6), (10). Если график этого решения имеет бесконечную длину, то оно и является искомым M -решением в данном направлении, а утверждения теоремы 1 вытекают из известных теорем теории ОДУ.

Пусть длина упомянутого графика конечная. Тогда $Y_0(x)$ имеет при $x \rightarrow a_1^-$ некоторый предел b_1 , а из леммы 1 и непродолжимости решения Y_0 следует, что $|Y'_0(x)| \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow a_1^-$. Значит, существует $x_1 \in (x_0, a_1)$ такое, что $Y'_0(x) \neq 0$ при $x \in [x_1, a_1)$. Примем график функции $Y_0|_{[x_0, x_1]}$ за Γ_0 , положим $y_1 := Y_0(x_1)$ и введем максимальный интервал $[y_1, b_2)$ (соответственно $(b_2, y_1]$), если $Y'_0(x_1) > 0$ (соответственно $Y'_0(x_1) < 0$), на котором существует решение $x = X_1$ уравнения (8) (соответственно (9)) при начальных условиях $x(y_1) = y_1$, $x'(y_1) = [Y'_0(x_1)]^{-1}$. Ясно, что график решения X_1 является C^2 -продолжением графика решения Y_0 . Если график решения X_1 имеет бесконечную длину, то обозначаем его через Γ_1 и полагаем $\Gamma := \Gamma_0 \cup \Gamma_1$; тогда искомое M -решение определяется его графиком Γ . Если же эта длина конечная, то, как и выше, получаем, что $|X'_1(y)| \rightarrow \infty$ при $y \rightarrow b_2$, и потому между y_1 и b_2 существует значение y_2 такое, что $\inf |X'_1(y)| > 0$ на интервале с концами y_2 и b_2 . Обозначаем через Γ_1 график решения X_1 на интервале с концами y_1 и y_2 , затем при переходе через точку (x_2, y_2) ($x_2 := X_1(y_2)$) возвращаемся к уравнению (6) (если $X'_1(y_2) > 0$) или переходим к уравнению (7) (если $X'_1(y_2) < 0$), и т.д.

С помощью описанной процедуры получаем конечную или бесконечную последовательность графиков $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots$, после чего полагаем $\Gamma := \bigcup_k \Gamma_k$. Если эта последовательность конечная, то ее последний член, а следовательно, и Γ имеют бесконечную длину. Пусть теперь последовательность бесконечная; проверим, что сумма длин ее членов бесконечная. В самом деле, если это не так, то Γ асимптотически входит в некоторую точку плоскости x, y , причем в силу леммы 1 с определенного направления. Но это противоречит тому, что на $\Gamma_1, \Gamma_3, \dots$ имеются точки, в которых $x'(y) = 0$, а на $\Gamma_2, \Gamma_4, \dots$ — точки, в которых $y'(x) = 0$. Итак, во всех случаях длина Γ бесконечная.

При построении M -решения от начальной точки (x_0, y_0) в сторону $s < 0$ процедура аналогичная, т.е. строится конечная или бесконечная последовательность графиков $\Gamma_0, \Gamma_{-1}, \dots$ (при этом графики Γ_0 для $s \geq 0$ и для $s \leq 0$ объединяются в один). Тем самым, утверждение а) теоремы 1 доказано.

Утверждение б) вытекает из единственности решения задачи Коши для уравнений (6)–(9). Утверждение в) следует из теоремы о непрерывной зависимости от начальных данных решения и его производных для этих уравнений, так как на любом фиксированном интервале изменения s имеется лишь конечное число значений x_i и y_j , при которых происходит смена уравнений (6)–(9) одно на другое, и при достаточно малом изменении x_0, y_0, y'_0 эти значения x_i, y_j можно также считать фиксированными.

Теорема 1 доказана.

5. Предельные множества. Будем для краткости под *графиком* понимать график любого непродолжимого M -решения заданного уравнения (6). Это ориентированная линия класса C^2 (быть может, с самопересечениями), имеющая бесконечную длину в каждом направлении своей ориентации. Через каждую точку (x_0, y_0) в каждом направлении проходит ровно один такой график. (Если это направление образует с осью x острый угол, то эти утверждения вытекают из теоремы 1; если тупой, то построение графика надо начинать с решения уравнения (7), а если прямой, то с уравнений (8) или (9), рассуждая далее как при доказательстве теоремы 1.) Если заданные направления противоположны, то соответствующие графики касаются друг друга в точке (x_0, y_0) .

Ориентация графика дает возможность ввести обычным образом понятия α -предельного и ω -предельного множеств для него. Приведем здесь несколько простых их свойств, говоря для определенности о ω -предельном множестве Q (свойства α -предельного мно-

жества аналогичны):

- а) множество Q замкнутое;
- б) если множество Q несвязное, то оно не имеет ограниченных компонент связности;
- в) множество Q состоит из целых графиков.

Свойства а) и б) доказываются стандартными рассуждениями. Докажем свойство в). Действительно, пусть Q является ω -предельным множеством для графика Γ и $A \in Q$, т.е. $A = \lim A_k$ при $k \rightarrow \infty$, где $A_k \in \Gamma$ и $s(A_k) \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда, переходя к подпоследовательности, можем считать, что направления Γ в точках A_k имеют предел при $k \rightarrow \infty$ и в некоторых окрестностях этих точек удовлетворяется одно и то же из уравнений (6)–(9), сохраняющее смысл и в предельной точке при предельном направлении. Дальнейшее рассуждение не отличается от стандартного.

Из свойства в) следует, что *контингент множества Q в каждой его точке включает, по крайней мере, два противоположных направления*.

Интересно получить более далекие утверждения о графиках и их предельных множествах для различных классов уравнений (6). Упомянем об одном из таких классов.

6. Уравнение (6) без среднего члена. Если $f_2(x, y) \equiv 0$, то ситуация существенно упрощается, так как в этом случае уравнение (6) совпадает с (7), а уравнение (8) – с (9), т.е. сменяют друг друга только два уравнения. Приведем несколько простых свойств графиков в этом предположении:

- а) графики не могут иметь самокасааний;
- б) два различных графика не могут касаться друг друга;
- в) дуга конечной длины графика может иметь не более чем конечное число самопересечений;
- г) дуги конечной длины двух различных графиков могут иметь не более чем конечное число общих точек.

а) Если некоторый график представлен в виде $x = x(s)$, $y = y(s)$ и для некоторых s_1, s_2 ($s_1 < s_2$) имеем $x(s_1) = x(s_2)$, $y(s_1) = y(s_2)$, $x'(s_1) = x'(s_2)$, $y'(s_1) = y'(s_2)$, то $x(s_2 - s_1 + \sigma) \equiv x(\sigma)$, $y(s_2 - s_1 + \sigma) \equiv y(\sigma)$ ($\sigma \in \mathbb{R}$), т.е. рассматриваемое M -решение периодически по s с периодом $s_2 - s_1$, а Γ представляет собой замкнутую линию. Равенства же $x(s_1) = x(s_2)$, $y(s_1) = y(s_2)$, $x'(s_1) = -x'(s_2)$, $y'(s_1) = -y'(s_2)$ в совокупности несовместны.

Все эти утверждения сразу следуют из теоремы о единственности решения задачи Коши для уравнений (6) и (8).

Свойство б) доказывается аналогично.

в) В самом деле, пусть точкам самопересечения графика Γ соответствуют значения $s = s_n^1$, $s = s_n^2$ ($n = 1, 2, \dots$), принадлежащие фиксированному конечному интервалу. Перейдя к подпоследовательности, мы можем считать, что $s_n^1 \rightarrow s^1$, $s_n^2 \rightarrow s^2$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $s^1 \neq s^2$ и, так как самокасание Γ невозможно, дуги $|s - s^1| < \varepsilon$, $|s - s^2| < \varepsilon$ графика Γ при достаточно малом $\varepsilon > 0$ не имеют общих точек, что противоречит определению значений s_n^1, s_n^2 . Итак, свойство в) доказано.

Аналогично доказывается свойство г).

Для общего уравнения (6) все приведенные свойства могут нарушаться. Впрочем, можно указать условия, при выполнении которых свойство в) имеет место: например, если правые части уравнений (6) и (7), а также (8) и (9) имеют постоянные, причем противоположные, знаки; это условие выполняется, в частности, для уравнения (3).

7. Один специальный класс уравнений. Совокупность всех M -решений дифференциального уравнения

$$y''(x) = y'(x)^3 + f_3(y'(x)), \quad f_3(z) = O(z^2) \quad \text{при } |z| \rightarrow \infty \quad (11)$$

допускает простое описание. Она зависит от расположения корней конечного уравнения $k^3 + f_3(k) = 0$. Множество K этих корней непусто, замкнуто и ограничено. Каждому корню $k \in K$ отвечает семейство решений вида $y = kx + \text{const}$. Каждому смежному интервалу (α, β) для K отвечает семейство решений, графики которых конгруэнтны друг другу, выпуклы вверх (вниз), если $k^3 + f_3(k) < 0$ (соответственно $k^3 + f_3(k) > 0$) на (α, β) , и имеют при $|x| \rightarrow \infty$ асимптотическое направление α в одну сторону, β в другую. Пары интервалов $\mathbb{R} \setminus \text{conv } K = (-\infty, \beta_0) \cup (\alpha_0, \infty)$ отвечают M -решениям, графики которых конгруэнтны друг другу и имеют вид несамопересекающейся линии с уравнением $y = y_{1,2}(x)$ ($-\infty < x < \text{const}$), причем $y'_1(x) \rightarrow \alpha_0$, $y'_2(x) \rightarrow \beta_0$ при $x \rightarrow -\infty$.

Краевая задача

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2$$

для уравнения (11) имеет при $|y_2 - y_1| + |x_2 - x_1| > 0$ ровно одно M -решение.

8. Аналитические M -решения. Приведенное определение M -решения, основанное на привлечении уравнений (7) и (9), обладает единообразием и простотой, но в конкретных примерах оно не всегда является наиболее естественным. Так, примененное к уравнению (3) оно приводит после перехода через точку с вертикальной касательной не к (4), а к уравнению

$$y''(x) = -2|y'(x)|^3 + [1 + y'(x)^2]^{3/2}$$

с трансцендентными интегральными линиями, имеющими с соответствующими “вершинами” полуокружностями касание четвертого порядка.

Чтобы охватить подобные случаи, можно последние члены в уравнениях (7) и (9) заменить соответственно на функции f_4 и g_4 , удовлетворяющие тем же общим требованиям, что f_3 и g_3 . При этом необходимо положить

$$g_3(x, y, w) := \begin{cases} -f_3\left(x, y, \frac{1}{w}\right)w^3, & w > 0, \\ 0, & w = 0, \\ -f_4\left(x, y, \frac{1}{w}\right)w^3, & w < 0, \end{cases}$$

$$g_4(x, y, w) := \begin{cases} -f_4\left(x, y, \frac{1}{w}\right)w^3, & w > 0, \\ 0, & w = 0, \\ -f_3\left(x, y, \frac{1}{w}\right)w^3, & w < 0. \end{cases}$$

Функция f_4 должна быть задана дополнительно, что приводит к возможности различного продолжения решений после их обострения.

Все рассуждения п. 3–5 непосредственно распространяются на такое обобщение понятия M -решения.

Необходимость такого видоизменения возникает, в частности, при построении аналитического M -решения уравнения (1), т.е. такого, для которого упоминавшиеся выше

функции $y(\cdot)$ и $x(\cdot)$ аналитические. Допустим, что уравнение (1) представлено в виде (6), причем каждая из функций $f_1, f_2, (x, y, z) \mapsto f_1(x, y)z^3 + f_2(x, y)|z|^3 + f_3(x, y, z)$ аналитическая при всех вещественных значениях аргументов. Пусть $f_4: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ выбрана так, что функции $g_3, g_4: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ также являются аналитическими; ясно, что этим условием функция f_4 , если существует, определяется однозначно. Тогда построенное M -решение является аналитическим.

Например, для уравнения (3) имеем

$$f_1(z) = 0, \quad f_2(z) = 1, \quad f_3(z) = (1 + z^2)^{3/2} - |z|^3, \quad f_4(z) = -(1 + z^2)^{3/2} + |z|^3, \\ g_3(w) = -(w^2 + 1)^{3/2} + 1, \quad g_4(w) = (w^2 + 1)^{3/2} - 1,$$

и видоизмененное уравнение (7) совпадает с (4).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Мышкис А. Д. Уравнение капиллярного равновесия и небернштейновы краевые задачи // DIFFORD 74. Summer School on Ordinary Differential Equations (Stara Lesna, Czechosl., September 1974). V. II. Brno, 1975. P. 69–75.
- [2] Мышкис А. Д., Шербина Г. В. Об одной предельной краевой задаче, не удовлетворяющей условию С. Н. Бернштейна и имеющей приложение в теории капиллярных явлений // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. № 6. С. 991–998.
- [3] Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д. Гидромеханика невесомости. М.: Наука, 1976.

Московский государственный университет путей сообщения

Поступило

12.11.98

Исправленный вариант

31.05.99