Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Мясников, Слабые компоненты аменабельности $L_1(G)$ -модулей, аменабельные группы и эргодическая теорема, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 6, 879–886

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1232>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 10:38:33

УДК 512.5

СЛАБЫЕ КОМПОНЕНТЫ АМЕНАБЕЛЬНОСТИ $L_1(G)$ -МОДУЛЕЙ, АМЕНАБЕЛЬНЫЕ ГРУППЫ И ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА

А. Г. Мясников

Рассматриваются слабые варианты компоненты аменабельности банаховых $L_1(G)$ -модулей. С их помощью формулируется статистическая эргодическая теорема для локально компактных групп. Изучается возможность использования слабых компонент аменабельности операторных $L_1(G)$ -модулей для характеристики аменабельных групп.

Библиография: 7 названий.

В понятие *аменабельный $L_1(G)$ -модуль* можно вкладывать различный смысл. Один из вариантов был предложен в [1]. В настоящей статье предпринята попытка показать полезность слабых разновидностей этого понятия.

1. Компонента аменабельности и топологически левоинвариантные средние. Пусть G – локально компактная группа с левой мерой Хаара λ_G , $L_1(G)$ – банахова алгебра λ_G -интегрируемых комплекснозначных функций на G со сверткой

$$\varphi_1 * \varphi_2(s) = \int_G \varphi_1(t) \varphi_2(t^{-1}s) d\lambda_G(t)$$

в качестве умножения. *Левым банаховым $L_1(G)$ -модулем* называется банахово пространство M с билинейным отображением $L_1(G) \times M \rightarrow M$, $(\varphi, x) \mapsto \varphi \cdot x$, таким, что $\|\varphi \cdot x\| \leq \|\varphi\|_1 \|x\|$ и $\varphi_1 \cdot (\varphi_2 \cdot x) = (\varphi_1 * \varphi_2) \cdot x$.

Далее в качестве примера мы будем использовать пространства $L_p(G)$, $1 \leq p \leq \infty$, которые являются левыми банаховыми $L_1(G)$ -модулями относительно свертки $\varphi * f$, $\varphi \in L_1(G)$, $f \in L_p(G)$ (см. [2, теорема 32.16]). Сопряженным к $L_p(G)$, $1 \leq p < \infty$, является пространство $L_{p'}(G)$, $p^{-1} + p'^{-1} = 1$, с двойственностью

$$\langle f, \xi \rangle = \int_G f \xi d\lambda, \quad f \in L_p(G), \quad \xi \in L_{p'}(G).$$

Для произвольной функции f на G введем обозначения: $\tilde{f}(s) = f(s^{-1})$, $f^*(s) = \Delta_G(s^{-1})f(s^{-1})$, $s \in G$, где Δ_G – модулярная функция. Сопряженное пространство M^* будем рассматривать как левый банахов $L_1(G)$ -модуль, полагая $\langle x, \varphi \cdot \xi \rangle = \langle \varphi^* \cdot x, \xi \rangle$, $x \in M$, $\xi \in M^*$, $\varphi \in L_1(G)$. Образ элемента $x \in M$ при каноническом вложении $M \rightarrow M^{**}$ будем обозначать через $\hat{x}$.

В соответствии с [3] определим следующие билинейные операции:

$$\begin{aligned} M \times M^* &\rightarrow L_\infty(G), \quad (x, \xi) \mapsto x \circ_1 \xi, \quad \text{где } \langle \varphi, x \circ_1 \xi \rangle = \langle \varphi^* \cdot x, \xi \rangle; \\ M^* \times L_\infty(G)^* &\rightarrow M^*, \quad (\xi, \Phi) \mapsto \xi \circ_2 \Phi, \quad \text{где } \langle x, \xi \circ_2 \Phi \rangle = \langle x \circ_1 \xi, \Phi \rangle, \end{aligned}$$

$x \in M, \xi \in M^*, \varphi \in L_1(G), \Phi \in L_\infty(G)^*$. Индексы под знаками этих билинейных операций часто будем опускать, если это не приводит к недоразумениям.

Пусть $P(G) = \{\varphi \in L_1(G) : \varphi \geq 0, \|\varphi\|_1 = 1\}$. Левый банахов $L_1(G)$ -модуль M называется *аменабельным*, если множество всех $x \in M$, удовлетворяющих условию $\inf\{\|\varphi \cdot x\| : \varphi \in P(G)\} = 0$, замкнуто относительно сложения (условие Эмерсона [4]). Известно, что в произвольном левом банаховом $L_1(G)$ -модуле M имеется наибольший аменабельный подмодуль $A(M)$, называемый *компонентой аменабельности в M* [1, теорема 2.5].

ТЕОРЕМА 1.1 [1, теорема 2.4]. Пусть $x \in M$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $x \in A(M)$;
- 2) $x \circ \xi \in A(L_\infty(G))$ для всех $\xi \in M^*$.

Среднее t называется *топологически левоинвариантным* (правоинвариантным) на $X \subset L_\infty(G)$, если $\langle \varphi * f, t \rangle = \langle f, t \rangle$ (соответственно $\langle f * \tilde{\varphi}, t \rangle = \langle f, t \rangle$) для всех $f \in X, \varphi \in P(G)$. Среднее t называется *топологически инвариантным* на X , если оно одновременно топологически левоинвариантно и правоинвариантно на X . Среднее t топологически левоинвариантно на X в том и только том случае, когда среднее t^* , определенное равенством $\langle f, t^* \rangle = \langle \tilde{f}, t \rangle$, топологически правоинвариантно на $\tilde{X}$.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть t – топологически левоинвариантное на $A(L_\infty(G))$ среднее, n – среднее и $\varphi \in P(G)$. Тогда

- 1) $t \circ_2 \hat{\varphi}$ и $n \circ_2 t$ – топологически левоинвариантные на $A(L_\infty(G))$ средние;
- 2) $\hat{\varphi} \circ_2 t^*$ и $t^* \circ_2 n$ – топологически правоинвариантные на $A(L_\infty(G)) \sim$ средние.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in A(L_\infty(G))$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle \psi * f, t \circ_2 \hat{\varphi} \rangle &= \langle (\psi * f) \circ_1 t, \hat{\varphi} \rangle = \langle \varphi, (\psi * f) \circ_1 t \rangle = \langle \varphi^* * \psi * f, t \rangle \\ &= \langle f, t \rangle = \langle \varphi^* * f, t \rangle = \langle \varphi, f \circ_1 t \rangle = \langle f \circ_1 t, \hat{\varphi} \rangle = \langle f, t \circ_2 \hat{\varphi} \rangle \end{aligned}$$

для всех $\psi \in P(G)$. Следовательно, $t \circ_2 \hat{\varphi}$ – топологически левоинвариантное на $A(L_\infty(G))$ среднее. Аналогично доказываются остальные утверждения.

Обозначим через M_{inv}^* множество всех $\xi \in M^*$ таких, что $\varphi \cdot \xi = \xi, \varphi \in P(G)$.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть $\xi \in M^*$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $\xi \in M_{\text{inv}}^*$;
- 2) $\xi \circ_2 t = \xi$ для всех средних t ;
- 3) $\xi \circ_2 t = \xi$ для всех топологически левоинвариантных на $A(L_\infty(G))$ средних t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть m – среднее и $m = w^*\text{-}\lim_{\alpha} \widehat{\varphi}_{\alpha}$, где $\varphi_{\alpha} \in P(G)$. Тогда

$$\langle x, \xi \circ_2 m \rangle = \lim_{\alpha} \langle x, \varphi_{\alpha} \cdot \xi \rangle = \langle x, \xi \rangle.$$

2) $\Rightarrow$ 3). Очевидно.

3) $\Rightarrow$ 1). Пусть m – топологически левоинвариантное на $A(L_{\infty}(G))$ среднее. Так как по теореме 1.2 для любого $\varphi \in P(G)$ среднее $m \circ_2 \widehat{\varphi}$ также топологически левоинвариантно на $A(L_{\infty}(G))$, то $\varphi \cdot \xi = \varphi \cdot (\xi \circ_2 m) = (\xi \circ_2 m) \circ_2 \widehat{\varphi} = \xi \circ_2 (m \circ_2 \widehat{\varphi}) = \xi$.

2. Слабые компоненты аменабельности. Пусть M – левый банахов $L_1(G)$ -модуль. Слабая компонента аменабельности $W(M^*)$ и $\sim$ -слабая компонента аменабельности $\widetilde{W}(M^*)$ модуля M^* определяются следующим образом:

$$W(M^*) = \{ \xi \in M^* : \xi \circ_1 \widehat{x} \in A(L_{\infty}(G)) \text{ для всех } x \in M \},$$

$$\widetilde{W}(M^*) = \{ \xi \in M^* : x \circ_1 \xi \in A(L_{\infty}(G)) \text{ для всех } x \in M \}.$$

Так как $\xi \circ_1 \widehat{x} = (x \circ_1 \xi) \sim$, то $W(M^*)$ состоит в точности из $\xi \in M^*$ таких, что $x \circ_1 \xi \in A(L_{\infty}(G)) \sim$. Из равенств $(\varphi \cdot \xi) \circ_1 \widehat{x} = \varphi * (\xi \circ_1 \widehat{x})$, $x \circ_1 (\varphi \cdot \xi) = (x \circ_1 \xi) * \widehat{\varphi}$ следует, что слабые компоненты аменабельности $W(M^*)$, $\widetilde{W}(M^*)$ являются замкнутыми подмодулями в M^* .

Модуль M^* называется *слабо аменабельным* ($\sim$ -слабо аменабельным), если $M^* = W(M^*)$ (соответственно $M^* = \widetilde{W}(M^*)$).

ТЕОРЕМА 2.1. 1) $A(M^*) \subset W(M^*)$.

2) $M_{\text{inv}}^* \subset W(M^*) \cap \widetilde{W}(M^*)$.

3) Пусть $\xi \in M^*$. Тогда $\xi \in W(M^*)$ в том и только том случае, когда $P(G) \cdot \xi \subset W(M^*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) следует из определения $W(M^*)$ и [1, теорема 2.4].

2) следует из равенств $x \circ_1 \xi = \xi \circ_1 \widehat{x} = \langle x, \xi \rangle 1_G$, справедливых для всех $x \in M$, $\xi \in M_{\text{inv}}^*$.

3) Очевидно, $P(G) \cdot \xi \subset W(M^*)$ в том и только том случае, когда $P(G) \cdot (\xi \circ_1 \widehat{x}) \subset A(L_{\infty}(G))$ для всех $x \in M$. Теперь применим теорему 2.3 из [1].

Рассмотрим случай, когда $M = L_1(G)$.

ТЕОРЕМА 2.2. 1) $W(L_{\infty}(G)) * L_1(G) \sim \subset A(L_{\infty}(G))$. В частности, если группа G дискретна, то $W(\ell_{\infty}(G)) = A(\ell_{\infty}(G))$.

2) $\widetilde{W}(L_{\infty}(G)) = A(L_{\infty}(G)) \sim$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $W(L_{\infty}(G)) * L_1(G) \sim = W(L_{\infty}(G)) \circ_1 \widehat{L_1(G)} \subset A(L_{\infty}(G))$.

2) Пусть $f \in L_{\infty}(G)$. Тогда $f \in \widetilde{W}(L_{\infty}(G))$ в том и только том случае, когда $\varphi * \widetilde{f} = \varphi \circ_1 f \in A(L_{\infty}(G))$ для всех $\varphi \in L_1(G)$. Осталось заметить, что условия $P(G) * \widetilde{f} \subset A(L_{\infty}(G))$ и $\widetilde{f} \in A(L_{\infty}(G))$ эквивалентны (см. [1, теорема 2.3]).

Автору неизвестно, справедливо ли равенство $W(L_{\infty}(G)) = A(L_{\infty}(G))$ в общем случае.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть G – локально компактная группа. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) группа G аменабельна;
- 2) $W(L_\infty(G)) = L_\infty(G)$;
- 3) для любого левого банахова $L_1(G)$ -модуля M модуль M^* является слабо аменабельным;
- 4) $\widetilde{W}(L_\infty(G)) = L_\infty(G)$;
- 5) для любого левого банахова $L_1(G)$ -модуля M модуль M^* является $\sim$ -слабо аменабельным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аменабельность группы G эквивалентна равенству $A(L_\infty(G)) = L_\infty(G)$. Теперь применим теорему 2.2.

ПРИМЕР 2.1. Пусть G – дискретная группа и $M = c_0(G)$. Тогда $M^* = \ell_1(G)$. Так как $\xi \circ_1 \widehat{f} = \xi * \widetilde{f} \in c_0(G)$, $f \circ_1 \xi = f * \widetilde{\xi} \in c_0(G)$, $f \in c_0(G)$, $\xi \in \ell_1(G)$, и $c_0(G) \subset A(\ell_\infty(G))$ (см. [1, пример 3.1]), то $W(\ell_1(G)) = \widetilde{W}(\ell_1(G)) = \ell_1(G)$. В то же время, если группа G неаменабельна, то $A(\ell_1(G)) \neq \ell_1(G)$ (см. [1, пример 2.1]).

ПРИМЕР 2.2. Рассмотрим дискретную свободную группу G с алфавитом $\mathcal{A}$, $|\mathcal{A}| \geq 2$, и модуль $M = \ell_1(G)$. Пусть $a \in \mathcal{A}$, X – множество элементов группы G , несократимая запись которых начинается с $a^{\pm 1}$. Предположим, что характеристическая функция χ_X подмножества X принадлежит $A(\ell_\infty(G))$. Тогда $\langle \chi_X, m \rangle = \langle \chi_{G \setminus X}, m \rangle = 0$ для любого левоинвариантного на $A(\ell_\infty(G))$ среднего m , что противоречит предположению.

С другой стороны, для любой функции $\varphi \in \ell_1(G)$ с конечным носителем разность $\varphi * \widetilde{\chi}_X - \widetilde{\chi}_X$ также имеет конечный носитель. Отсюда следует, что $\widetilde{\chi}_X \in A(\ell_\infty(G))$ (см. [1, теорема 2.1]).

В соответствии с теоремой 2.2 $W(\ell_\infty(G)) \neq \widetilde{W}(\ell_\infty(G))$. Далее, так как группа G неаменабельна, то ни одна из этих компонент не совпадает с $\ell_\infty(G)$.

3. Слабые компоненты аменабельности и эргодическая теорема.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\xi \in M^*$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $\xi \in W(M^*)$;
- 2) $(\varphi \cdot \xi) \circ m = \xi \circ m$, $\varphi \in P(G)$, для любого топологически левоинвариантного на $A(L_\infty(G)) \sim$ среднего m ;
- 3) $w^*\text{-}\lim_\alpha (\varphi_\alpha \cdot (\varphi \cdot \xi) - \varphi_\alpha \cdot \xi) = 0$, $\varphi \in P(G)$, для любой сети $\{\varphi_\alpha\}$, $\varphi_\alpha \in P(G)$, сходящейся в w^* -топологии к топологически правоинвариантному на $A(L_\infty(G)) \sim$ среднему.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\implies$ 2). Имеем

$$\begin{aligned} \langle x, (\varphi \cdot \xi) \circ m \rangle &= \langle x \circ (\varphi \cdot \xi), m \rangle = \langle (x \circ \xi) * \widetilde{\varphi}, m \rangle \\ &= \langle (\xi \circ \widehat{x}) * \widetilde{\varphi}, m \rangle = \langle (\xi \circ \widehat{x}) \sim, m \rangle = \langle x \circ \xi, m \rangle = \langle x, \xi \circ m \rangle \end{aligned}$$

для всех $x \in M$, $\varphi \in P(G)$ и топологически правоинвариантных на $A(L_\infty(G)) \sim$ средних m .

2) $\implies$ 1). Имеет место

$$\begin{aligned} \langle \varphi * (\xi \cdot \widehat{x}), m^* \rangle &= \langle (x \circ \xi) * \widetilde{\varphi}, m \rangle = \langle x \circ (\varphi \cdot \xi), m \rangle \\ &= \langle x, (\varphi \cdot \xi) \circ m \rangle = \langle x, \xi \circ m \rangle = \langle x \circ \xi, m \rangle = \langle \xi \circ \widehat{x}, m^* \rangle \end{aligned}$$

для всех $\varphi \in P(G)$, $x \in M$ и топологически правоинвариантных на $A(L_\infty(G))^\sim$ средних m . Из [1, теорема 2.4] вытекает, что $\xi \circ \widehat{x} \in A(L_\infty(G))$.

2) $\iff$ 3) следует из равенства $\xi \circ m = w^*\text{-}\lim_\alpha \varphi_\alpha \cdot \xi$.

В качестве следствия получим слабый вариант статистической эргодической теоремы [5]. Введем обозначения

$$W_0(M^*) = \text{Cl}(\text{Span}\{\varphi \cdot \xi - \xi : \xi \in W(M^*), \varphi \in P(G)\}), \quad W_\Sigma(M^*) = M_{\text{inv}}^* + W_0(M^*).$$

Очевидно, $W_0(M^*)$ является левым $L_1(G)$ -модулем.

СЛЕДСТВИЕ. 1) $W_\Sigma(M^*)$ замкнуто в M^* .

2) $W_\Sigma(M^*)$ является векторной прямой суммой $M_{\text{inv}}^* \oplus W_0(M^*)$.

3) Пусть m – топологически правоинвариантное на $A(L_\infty(G))^\sim$ среднее и $m = w^*\text{-}\lim_\alpha \widehat{\varphi}_\alpha$, $\varphi_\alpha \in P(G)$. Тогда отображение $\xi \mapsto \xi \circ m = w^*\text{-}\lim_\alpha \varphi_\alpha \cdot \xi$ проектирует $W_\Sigma(M^*)$ на первое слагаемое M_{inv}^* .

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $\xi \in M^*$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $\xi \in \widetilde{W}(M^*)$;
- 2) $\xi \circ m \in M_{\text{inv}}^*$ для любого топологически левоинвариантного на $A(L_\infty(G))$ среднего m ;
- 3) $w^*\text{-}\lim_\alpha (\varphi \cdot (\varphi_\alpha \cdot \xi) - \varphi_\alpha \cdot \xi) = 0$, $\varphi \in P(G)$, для любой сети $\{\varphi_\alpha\}$, $\varphi_\alpha \in P(G)$, сходящейся в w^* -топологии к топологически левоинвариантному на $A(L_\infty(G))$ среднему.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\implies$ 2). Имеем

$$\begin{aligned} \langle x, \varphi \cdot (\xi \circ m) \rangle &= \langle \varphi^* \cdot x, \xi \circ m \rangle = \langle (\varphi^* \cdot x) \circ \xi, m \rangle \\ &= \langle \varphi^* \cdot (x \circ \xi), m \rangle = \langle x \circ \xi, m \rangle = \langle x, \xi \circ m \rangle \end{aligned}$$

для всех $x \in M$, $\varphi \in P(G)$ и топологически левоинвариантных на $A(L_\infty(G))$ средних m .

2) $\implies$ 1). Пусть m – топологически левоинвариантное на $A(L_\infty(G))$ среднее. Тогда

$$\begin{aligned} \langle \varphi^* (x \circ \xi), m \rangle &= \langle (\varphi \cdot x) \circ \xi, m \rangle = \langle \varphi \cdot x, \xi \circ m \rangle \\ &= \langle x, \varphi^* \cdot (\xi \circ m) \rangle = \langle x, \xi \circ m \rangle = \langle x \circ \xi, m \rangle \end{aligned}$$

для всех $x \in M$, $\varphi \in P(G)$. Следовательно, $x \circ \xi \in A(L_\infty(G))$.

Условие 3) является переформулировкой условия 2).

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть m – топологически инвариантное на $A(L_\infty(G))^\sim \cap A(L_\infty(G))$ среднее. Рассуждения, примененные при доказательстве импликации 1) $\implies$ 2) теорем 3.1 и 3.2, показывают, что оператор P_m в $W(M^*) \cap \widetilde{W}(M^*)$, определенный равенством $P_m(\xi) = \xi \circ m$, является $L_1(G)$ -модульным морфизмом и проектирует $W(M^*) \cap \widetilde{W}(M^*)$ на M_{inv}^* .

4. Слабые компоненты аменабельности в операторных $L_1(G)$ -модулях. Банахово пространство M называется *левым банаховым G -модулем*, если определено левое действие $s \cdot x$, $x \in M$, $s \in G$, группы G на M такое, что $\|s \cdot x\| = \|x\|$, и отображение $s \mapsto s \cdot x$ непрерывно при любом фиксированном x . Левый банахов G -модуль M является также левым банаховым $L_1(G)$ -модулем, если положить

$$\varphi \cdot x = \int_G \varphi(s)(s \cdot x) ds, \quad x \in M, \quad \varphi \in L_1(G).$$

Действие группы G на $L_p(G)$, $1 \leq p < \infty$, будем задавать равенством $(s \cdot f)(t) = f(s^{-1}t)$, $t \in G$. Заметим, что $\varphi \cdot f = \varphi * f$, $\varphi \in L_1(G)$, $f \in L_p(G)$.

Пусть M, N – левые банаховы G -модули. Проективное тензорное произведение $M \hat{\otimes} N$ будем рассматривать как левый банахов G -модуль и, следовательно, как левый банахов $L_1(G)$ -модуль, полагая $s \cdot (x \otimes y) = (s \cdot x) \otimes (s \cdot y)$, $x \in M$, $y \in N$, $s \in G$.

Отождествим банахово пространство $\mathcal{B}(M, N^*)$ ограниченных операторов из M в N^* с сопряженным пространством к $M \hat{\otimes} N$. При этом оператор $T \in \mathcal{B}(M, N^*)$ отождествляется с функционалом $\varphi_T \in (M \hat{\otimes} N)^*$ таким, что $\langle x \otimes y, \varphi_T \rangle = \langle y, Tx \rangle$. Возникающая $L_1(G)$ -модульная структура в $\mathcal{B}(M, N^*)$ в случае аменабельной группы G может быть использована в различных целях (см. [2, § 27], [6], [7]).

В этом пункте, как и раньше, не будем предполагать аменабельность группы G . Приведем сначала несколько примеров. Укажем, прежде всего, на следующее полезное равенство:

$$(x \otimes y) \circ_1 T(s) = \langle y, s \cdot T(s^{-1} \cdot x) \rangle, \quad s \in G,$$

справедливое для всех $x \in M$, $y \in N$, $T \in \mathcal{B}(M, N^*)$.

ПРИМЕР 4.1. Для произвольных $g \in L_q(G)$, $\xi \in L_{p'}(G)$, $1 < p, q < \infty$, определим оператор $T_g^\xi \in \mathcal{B}(L_p(G), L_q(G)) \cong (L_p(G) \hat{\otimes} L_{q'}(G))^*$ равенством $T_g^\xi(f) = \langle f, \xi \rangle g$, $f \in L_p(G)$. Тогда $(f \otimes \eta) \circ T_g^\xi = (f * \tilde{\xi})(\eta * \tilde{g}) \in C_0(G)$, $f \in L_p(G)$, $\eta \in L_{q'}(G)$. Так как $C_0(G) \subset A(L_\infty(G))^\sim \cap A(L_\infty(G))$, то оператор T_g^ξ , а также все компактные операторы принадлежат $W\mathcal{B}(L_p(G), L_q(G)) \cap \widetilde{W}\mathcal{B}(L_p(G), L_q(G))$.

Предположим, что группа G бесконечна. Тогда $K \circ t = 0$ для любого топологически правоинвариантного (левоинвариантного) на $A(L_\infty(G))^\sim$ (соответственно $A(L_\infty(G))$) среднего t и компактного оператора K .

В дальнейшем банахово пространство ограниченных операторов в M будем обозначать через $\mathcal{B}(M)$.

ПРИМЕР 4.2. Пусть G – дискретная группа. Определим оператор J в $\ell_p(G)$, $1 \leq p < \infty$, равенством $(Jf)(s) = f(s^{-1})$, $s \in G$. Будем отождествлять $\mathcal{B}(\ell_p(G))$ с $(\ell_p(G) \otimes \ell_{p'}(G))^*$, если $1 < p < \infty$, и $\mathcal{B}(\ell_1(G))$ с $(\ell_1(G) \hat{\otimes} c_0(G))^*$. Для произвольных $a, b \in G$ функция $(\chi_{\{a\}} \otimes \chi_{\{b\}}) \circ J$ является характеристической функцией множества $a\sqrt{a^{-1}b} = \sqrt{ab^{-1}}b$, где $\sqrt{s}$ – множество квадратных корней из s . Поэтому условия

- а) $J \in W\mathcal{B}(\ell_p(G))$;
- б) $J \in \widetilde{W}\mathcal{B}(\ell_p(G))$;
- в) $\chi_{\sqrt{s}} \in A(\ell_\infty(G))$, $s \in G$;

эквивалентны.

Предположим, что эти условия выполнены. Тогда $[(J \circ m)(\chi_{\{a\}})](s) = m(\sqrt{as^{-1}})$ для любого правоинвариантного на $A(\ell_\infty(G))^\sim$ среднего m . В случае, когда m – левоинвариантное на $A(\ell_\infty(G))$ среднее, справедливо равенство $[(J \circ m)(\chi_{\{a\}})](s) = m(\sqrt{a^{-1}s})$.

ПРИМЕР 4.3. Пусть G – дискретная группа. Рассмотрим операторы сдвига $\tau_s, s \in G$, действующие в $\ell_p(G), 1 \leq p < \infty$, по правилу $(\tau_s f)(t) = f(s^{-1}t)$. Для элементов $a, b \in G$ функция $(\chi_{\{a\}} \otimes \chi_{\{b\}}) \circ \tau_s$ является характеристической функцией множества $Z_{s, ba^{-1}} = \{t : tst^{-1} = ba^{-1}\}$. Однако, $Z_{s, ba^{-1}}$ является левым смежным классом по централизатору элемента s . Так как характеристическая функция любой подгруппы в G положительно определена, то $\tau_s \in \widetilde{WB}(\ell_p(G))$.

Наконец, для любого левоинвариантного на $A(\ell_\infty(G))$ среднего m справедливо равенство

$$(\tau_s \circ m)(\chi_{\{a\}}) = |\text{Orb } s|^{-1} \chi_{(\text{Orb } s)a}.$$

В случае произвольной группы G операторы сдвига τ_s , действующие в $\ell_\infty(G)$, могут не принадлежать $\sim$ -слабой компоненте аменабельности.

ПРИМЕР 4.4. Пусть G – свободная группа с бесконечным алфавитом $\mathcal{A}$ и $s \neq e$ (e – единица группы G). Множество функций вида $(f \otimes \varphi) \circ \tau_s, f \in \ell_\infty(G), \varphi \in \ell_1(G)$, совпадает с множеством функций, постоянных на левых смежных классах по централизатору элемента s . Выберем букву алфавита $\mathcal{A}$, например a , не входящую в несократимую запись s . Теперь рассуждения, приведенные в примере 2.2, показывают, что $\tau_s \notin \widetilde{WB}(\ell_\infty(G))$.

Автору неизвестно удовлетворительное описание класса групп со свойством $\tau_s \in \widetilde{WB}(\ell_\infty(G)), s \in G$.

Пусть X – банахово пространство λ_G -измеримых комплекснозначных функций (функции, равные λ_G -почти всюду, отождествляются) с левым действием группы G , заданным равенством $s \cdot f(t) = f(s^{-1}t), t \in G$. Рассмотрим следующие условия:

- а) из $|f| \leq |g|$ и $g \in X$ следует, что $f \in X$ и $\|f\| \leq \|g\|$;
- б) линейное пространство, состоящее из всех λ_G -измеримых функций ξ таких, что

$$\|\xi\|' = \sup \left\{ \int_G |f\xi| d\lambda_G : \|f\| \leq 1 \right\} < \infty,$$

снабженное нормой $\|\cdot\|'$, является сопряженным к X ;

- в) отображения $G \times X \rightarrow X, (s, f) \mapsto s \cdot f$, и $G \times X^* \rightarrow X^*, (s, \xi) \mapsto s \cdot \xi$, непрерывны.

При фиксированном s отображение $X \rightarrow X, f \mapsto s \cdot f$, является изометрией.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть банахово пространство X удовлетворяет условиям а)–в). Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) группа G аменабельна;
- 2) $W(\mathcal{B}(X^*)) = \mathcal{B}(X^*)$;
- 3) $\widetilde{W}(\mathcal{B}(X^*)) = \mathcal{B}(X^*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $1) \Rightarrow 2), 3)$. Вытекает из равенства $A(L_\infty(G)) = L_\infty(G)$.

$2) \Rightarrow 1)$. Имеем $(\xi \otimes f) \circ (gI) \in A(L_\infty(G))^\sim$ для всех $\xi \in X^*$, $f \in X$, $g \in L_\infty(G)$. Однако,

$$(\xi \otimes f) \circ (gI)(s) = \langle f, s \cdot (gI)(s^{-1} \cdot \xi) \rangle = \int_G g(s^{-1}t) \xi(t) f(t) dt = (\xi f) * \tilde{g}(s), \quad s \in G.$$

Следовательно, $L_\infty(G) * L_1(G)^\sim \subset A(L_\infty(G))$, откуда вытекает 1) (см. [1, пример 2.1]).

$3) \Rightarrow 1)$. Рассуждения, приведенные выше, показывают, что $L_1(G) * L_\infty(G) \subset A(L_\infty(G))$, откуда следует 1).

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства теоремы следует, что аменабельность группы G эквивалентна любому из условий:

а) $gI \in W(\mathcal{B}(X^*))$, $g \in L_\infty(G)$;

б) $gI \in \bar{W}(\mathcal{B}(X^*))$, $g \in L_\infty(G)$.

Фиксируем p , $1 < p < \infty$, и отождествим $L_p(G) \hat{\otimes} L_{p'}(G)$ с банаховым пространством $\mathcal{N}(L_p(G))$ ядерных операторов в $L_p(G)$ посредством следового изоморфизма $\text{Tr}: L_p(G) \hat{\otimes} L_{p'}(G) \rightarrow \mathcal{N}(L_p(G))$, $\text{Tr}(\varphi \otimes f) = T_\varphi^f$. Заметим, что $L_1(G)$ -модульные структуры в $\mathcal{N}(L_p(G))$, заимствованные из $\mathcal{B}(L_p(G))$ и $L_p(G) \hat{\otimes} L_{p'}(G)$, совпадают.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $1 < p < \infty$. Тогда аменабельность группы G эквивалентна аменабельности $L_1(G)$ -модуля $\mathcal{N}(L_p(G))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аменабельность $\mathcal{N}(L_p(G))$ эквивалентна $\sim$ -слабой аменабельности $\mathcal{B}(L_p(G))$. Теперь применим теорему 4.1 с $X = L_{p'}(G)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Мясников А. Г. Аменабельные банаховы $L_1(G)$ -модули, инвариантные средние и регулярность в смысле Аренса // Изв. вузов. Матем. 1993. № 2. С. 72–80.
- [2] Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. Т. 2. Структура и анализ компактных групп. Анализ на локально компактных абелевых группах. М.: Мир, 1975.
- [3] Arens R. The adjoint of a bilinear operation // Proc. Amer. Math. Soc. 1951. V. 2. P. 839–848.
- [4] Emerson W. R. Characterizations of amenable groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1978. V. 241. P. 183–194.
- [5] Greenleaf F. P. Ergodic theorems and the construction of summing sequences in amenable locally compact groups // Comm. Pure Appl. Math. 1973. V. 26. P. 29–46.
- [6] Dresler B., Schempp W. On the Charshiladze–Lozinski theorem for compact topological groups and homogeneous spaces // Manuscripta Math. 1974. V. 13. P. 321–337.
- [7] Paterson A. L. T. Amenability and translation experiments // Canad. J. Math. 1983. V. 35. P. 49–58.

Московский государственный строительный университет

Поступило
23.07.98