Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Орлов, Об одной абстрактной интегродифференциальной задаче, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 6, 887–896

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1233>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 02:21:32

УДК 517.984.5

ОБ ОДНОЙ АБСТРАКТНОЙ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ

В. П. Орлов

В произвольном банаховом пространстве рассматривается задача Коши для интегродифференциального уравнения с неограниченными операторными коэффициентами. Устанавливается разрешимость задачи в весовых пространствах суммируемых функций при необходимых условиях на данные. Для доказательства решение задачи выписывается в явном виде с помощью аналитических полугрупп, порожденных дробными степенями операторных коэффициентов. При этом важную роль играют условия на коэффициенты, обеспечивающие коэрцитивные оценки соответствующих интегральных операторов.

Библиография: 13 названий.

1. Введение. В произвольном банаховом пространстве E рассматривается задача Коши

$$v'(t) + \gamma_1 A v(t) + \gamma_2 A \int_0^t \exp(\alpha(s-t)) v(s) ds = f(t), \quad t \geq 0, \quad v(0) = v_0. \quad (1)$$

Здесь $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2, \alpha \in \mathbb{R}$, $\gamma_2 \neq 0$, A — сильно позитивный в E линейный оператор. Задача (1) возникает при исследовании устойчивости решений различных моделей вязкоупругости [1]–[3]. При этом важную роль играют условия на коэффициенты, обеспечивающие устойчивость, и коэрцитивные оценки решений [3]. При жестких ограничениях на расположение спектра Σ оператора A задача (1) исследовалась в [4]. Ниже мы устанавливаем точные условия на коэффициенты, обеспечивающие разрешимость задачи (1) на полуоси в коэрцитивных L_p -нормах при необходимых условиях на данные. Исследованию абстрактных интегродифференциальных уравнений на полуоси посвящено много работ. Например, в [5], [6] исследовалась устойчивость однородных уравнений в энергетических нормах, в [7] изучалась разрешимость при достаточно гладких данных. Отметим также многочисленные работы по интегральным уравнениям Вольтерра (см., например, монографию [8] и имеющуюся там библиографию и комментарии). Применение результатов этих работ к задаче (1) приводит к завышенным требованиям на коэффициенты и гладкость данных.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01639.

2. Формулировка результатов. Напомним (см. [9, с. 274]), что действующий в E линейный оператор A называется *сильно позитивным*, если его область определения $D(A)$ плотна в E и при всех λ с $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ операторы $\lambda I - A$ имеют ограниченные обратные, нормы которых удовлетворяют неравенству

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq M_1(1 + |\lambda|)^{-1}.$$

Предположим дополнительно, что $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, причем Σ_1 состоит из собственных значений $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_N$ с соответствующими конечномерными подпространствами, а Σ_2 лежит в пересечении полуплоскости $H_{\tilde{\sigma}_N} = \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > \tilde{\sigma}_N\}$ и сектора $S_{\psi_0} = \{\lambda : |\operatorname{Arg} \lambda| \leq \psi_0\}$, где $\tilde{\sigma}_N > \sigma_N$, а $\psi_0 \in (0, \pi/2)$.

Изучим разрешимость задачи (1) в банаховом пространстве $L_{q,\kappa}(0, +\infty; E)$ функций, для которых конечна норма

$$\|\varphi\|_{L_{q,\kappa}} = \|\varphi(t) \exp(\kappa t)\|_{L_q(0, +\infty; E)}.$$

Под *решением задачи* (1) понимается абсолютно непрерывная на $[0, +\infty)$ функция $v(t)$ со значениями в E такая, что $v(t) \in D(A)$ почти всюду, все слагаемые в левой части уравнения (1) принадлежат $L_{q,\kappa}(0, +\infty; E)$ и выполняются уравнение и начальное условие (1).

Нам понадобится

УСЛОВИЕ 1. Интегральный оператор

$$R_\mu(f) = A \int_0^t T_0(\mu(t-s))f(s) ds$$

ограничен в $L_q(0, +\infty; E)$ при $1 < q < +\infty$ и $\mu = 1$.

Здесь $T_0(t) = \exp(-tA)$ – аналитическая в секторе S_{ψ_1} , $0 < \psi_1 < \pi/2 - \psi_0$, полугруппа, порожденная оператором A (см. [9, с. 266]). Условие 1 эквивалентно коэрцитивной разрешимости задачи

$$v'(t) + \mu Av(t) + \delta v(t) = f(t), \quad v(0) = v_0 \quad (2)$$

при $\mu = 1$ и $\delta = 0$ в $L_{q_0}(0, +\infty; E)$ при некотором $1 < q_0 < +\infty$ (см. [6]). Напомним, что задача (2) называется *коэрцитивно разрешимой* в $L_{q,\kappa}(0, +\infty; E)$, если при всех $f \in L_{q,\kappa}(0, +\infty; E)$ и $v_0 \in E_{1-1/q}$ она имеет единственное решение и справедлива оценка

$$\|v'(t)\|_{L_{q,\kappa}} + \sup_{t \geq 0} \exp(\kappa t) v(t)_{[1-1/q]} + \|Av(t)\|_{L_{q,\kappa}} \leq M(\|f\|_{L_{q,\kappa}} + \|v_0\|_{[1-1/q]}).$$

Пространство $E_{1-1/q}$ определяется как совокупность элементов из E , для которых конечна норма

$$\|v\|_{[1-1/q]} = \left(\int_0^{+\infty} \|T_0(t)v\|^q dt \right)^{1/q}.$$

Заметим, что если $\varkappa < \mu\sigma_1 + \delta$, то, как легко показать, из коэрцитивной разрешимости задачи (2) в $L_q(0, +\infty; E)$ следует ее коэрцитивная разрешимость в $L_{q,\varkappa}(0, +\infty; E)$.

По поводу выполнения условия 1 см. [8, с. 215]. Например, оно выполнено в случае гильбертова пространства E при $p = 2$, а следовательно, и при любом $1 < p < +\infty$ (см. [10, с. 39]).

Определим функции $\lambda_k(\sigma)$ и $\beta_k(\sigma)$, $k = 1, 2$, переменной σ формулами

$$\lambda_k(\sigma) = -\frac{1}{2}((\gamma_1\sigma - \alpha) - (-1)^k((\gamma_1\sigma - \alpha)^2 - 4\gamma_2\sigma)^{1/2}), \quad \beta_k(\sigma) = \lambda_k(\sigma) - \alpha.$$

Сформулируем основной результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполняются условие 1 и неравенства

$$\gamma_1\sigma_1 + \alpha > 0, \quad \gamma_1\alpha + \gamma_2 > 0, \quad \varkappa < \varkappa_0 = \min\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} + \alpha, -\operatorname{Re} \beta_2(\sigma_1)\right). \quad (3)$$

Пусть $\tilde{\sigma}_N$ достаточно велико. Тогда для любых $f \in L_{q,\varkappa}(0, +\infty; E)$ и $v_0 \in E_{1-1/q}$ задача (1) имеет единственное решение и справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|v\| &\equiv \|v'(t)\|_{L_{q,\varkappa}} + \left\| A \int_0^t \exp(\alpha(s-t))v(s) ds \right\|_{L_{q,\varkappa}} \\ &\quad + \|Av\|_{L_{q,\varkappa}} + \sup_{t \geq 0} [\exp(\varkappa t)v(t)]_{1-1/q} \\ &\leq M_2(\|f\|_{L_{q,\varkappa}} + \|v_0\|_{1-1/q}) \equiv M_2\mathcal{N}(f, v_0). \end{aligned}$$

3. Доказательство теоремы 1. Для доказательства задача (1) разбивается на задачи $\mathcal{L}_i$, $i = 1, 2$:

$$v_i'(t) + \gamma_1 A_i v_i(t) + \gamma_2 A_i \int_0^t \exp(\alpha(s-t))v_i(s) ds = f_i(t), \quad t \geq 0, \quad v_i(0) = v_{0i} \quad (4)$$

в пространствах $L_{q,\varkappa}(0, +\infty; E_i)$. Здесь $A_i = P_i A$, $v_i = P_i v$, $E_i = P_i E$, $v_{0i} = P_i v_0$, $f_i = P_i f$, а

$$P_1 = \int_{\Gamma} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda, \quad P_2 = I - P_1$$

являются проекторами Рисса на подпространства E_1 и E_2 в E , порожденные разбиением спектра Σ на Σ_1 и Σ_2 . Контур Γ в последнем интеграле охватывает часть Σ_1 спектра оператора A_1 . Отметим, что задача $\mathcal{L}_1$ является задачей Коши для распадающейся системы N обыкновенных интегродифференциальных уравнений, а задача $\mathcal{L}_2$ остается задачей с неограниченными операторными коэффициентами.

Сначала рассмотрим задачу $\mathcal{L}_2$. Полагая $\tilde{v}(t) = \exp(\alpha t)v_2(t)$, сводя с помощью дифференцирования $\mathcal{L}_2$ к уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами для $\tilde{v}(t)$, решая его и возвращаясь к $v(t)$, получаем, что формальное решение задачи $\mathcal{L}_2$ имеет вид

$$\begin{aligned} v_2(t) &= \mathcal{A}_1(\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2)^{-1} \int_0^t T_1(t-s)f_2(s) ds + \mathcal{A}_2(\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1)^{-1} \int_0^t T_2(t-s)f_2(s) ds \\ &\quad + (\mathcal{A}_1 T_1(t) - \mathcal{A}_2 T_2(t))(\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2)^{-1} v_{02}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $T_i(t) = \exp(t(\mathcal{A}_i - \alpha I))$, $i = 1, 2$, а корни

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_2 &= -\frac{1}{2}(I + (I - 4\gamma_2 A_2^{-1}(\gamma_1 I - \alpha A_2^{-1})^{-2})^{1/2})(\gamma_1 A_2 - \alpha I) \equiv -G(\gamma_1 A_2 - \alpha I), \\ \mathcal{A}_1 &= -2\gamma_2(\gamma_1 I - \alpha A_2^{-1} + ((\gamma_1 I - \alpha A_2^{-1})^2 - 4\gamma_2 A_2^{-1})^{1/2})^{-1}\end{aligned}$$

соответствующего характеристического уравнения $\chi(\lambda) = \lambda^2 + (\gamma_1 A - \alpha I)\lambda + \gamma_2 A = 0$ записаны в удобном для нас виде.

ЛЕММА 1. *Оператор $\mathcal{A}_2 - \alpha I$ является производящим оператором аналитической полугруппы $T_2(t)$ в E_2 , удовлетворяющей неравенству*

$$\|T_2(t)\| \leq M_3 \exp(-t\rho_2(\tilde{\sigma}_N)), \quad t \geq 0, \quad (6)$$

где $\rho_2(\tilde{\sigma}_N) \rightarrow +\infty$ при $\tilde{\sigma}_N \rightarrow +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как спектр $\Sigma(A_2)$ оператора A_2 совпадает с Σ_2 , то $\Sigma(A_2)$ лежит в $S_{\psi_0} \cap H_{\tilde{\sigma}_N}$. Из оценки (1) вытекает, что при $\tilde{\sigma}_N > \alpha/\gamma_1$ оператор $\gamma_1 A_2 - \alpha I$ имеет ограниченный обратный и, следовательно, определен оператор $G_1 = I - 4\gamma_2 A_2^{-1}(\gamma_1 I - \alpha A_2^{-1})^{-2}$. Заметим, что из (1) следует, что $\|A_2^{-1}\| \rightarrow 0$ при $\tilde{\sigma}_N \rightarrow +\infty$. Поэтому из теоремы об отображении спектра (см. [11, с. 314]) вытекает, что так как G_1 является функцией оператора A_2 , то спектр оператора G_1 лежит в достаточно малом круге с центром в единице, если $\tilde{\sigma}_N$ достаточно велико. Таким образом, оператор G_1 является сильно позитивным ограниченным оператором и можно рассмотреть оператор $G = \frac{1}{2}(I + G_1^{1/2})$. Можно считать (в силу той же теоремы об отображении спектра), что при достаточно большом $\tilde{\sigma}_N$ спектр $\Sigma(G)$ оператора G ограничен окружностью $C(r)$ достаточно малого радиуса r с центром в единице. Отсюда следует, что имеет смысл оператор $\mathcal{A}_2 = -G(\gamma_1 A_2 - \alpha I)$.

Рассмотрим оператор-функцию

$$T_2(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(r)} P_2 T_0(\gamma_1 \mu t) \exp((\mu - 1)\alpha t)(\mu I - G)^{-1} d\mu. \quad (7)$$

При этом $\tilde{\sigma}_N$ выбирается настолько большим, чтобы $C(r) \in H_{\tilde{\sigma}_N} \cap S_{\psi_1}$. Нетрудно показать, что полугруппа $T_{02}(t) = P_2 T_0(t)$ является аналитической в том же секторе, что и $T_0(t)$, причем (см. [5])

$$\|T_{02}(t)\| \leq M_4 \exp(-|t|\rho(\tilde{\sigma}_N)), \quad t \in S_{\psi_1}, \quad (8)$$

где $\rho(\tilde{\sigma}_N) = \cos(\psi_0 + \psi_1)(\cos \psi_0)^{-1}\tilde{\sigma}_N$. Теперь из (7) и (8) вытекает, что оператор-функция $T_2(t)$ является аналитической полугруппой с производящим оператором $\mathcal{A}_2 - \alpha I$ и справедлива оценка (6).

Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. *Оператор $\mathcal{A}_1 - \alpha I$ является производящим оператором группы $T_1(t) = \exp(t(\mathcal{A}_1 - \alpha I))$ в E_2 , удовлетворяющей неравенству*

$$\|T_1(t)\| \leq M_5 \exp(-t\rho_1(\tilde{\sigma}_N)), \quad t \geq 0,$$

где $\rho_1(\tilde{\sigma}_N) \rightarrow \gamma_2/\gamma_1 + \alpha$ при $\tilde{\sigma}_N \rightarrow +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определяющей $\mathcal{A}_1$ формулы и соотношения $\|A_2^{-1}\| \rightarrow 0$ при $\tilde{\sigma}_N \rightarrow +\infty$ следует, что для $G_2 = \mathcal{A}_1 - \gamma_2/\gamma_1 I$ имеем $\|G_2\| \rightarrow 0$ при $\tilde{\sigma}_N \rightarrow +\infty$. Из очевидного соотношения $T_1(t) = \exp(-t(\gamma_2/\gamma_1 - \alpha)) \exp(-tG_2)$ вытекает теперь утверждение леммы 2.

Лемма 2 доказана.

Поскольку $\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1 = ((\gamma_1 I - \alpha A_2^{-1})^2 - 4\gamma_2 A_2^{-1})^{-1/2} A_2$, то из обратимости при больших $\tilde{\sigma}_N$ обоих сомножителей вытекает обратимость $\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1$. Таким образом, определены все операторы, входящие в (5).

ЛЕММА 3. При выполнении условий $\gamma_2/\gamma_1 + \alpha > \kappa$ и достаточно большом $\tilde{\sigma}_N$ формула (5) определяет решение задачи $\mathcal{L}_2$ и справедлива оценка

$$\|v_2\| \leq M \mathcal{N}(f_2, v_{02}). \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Стандартным образом (см., например, [7]) показывается, что при гладких данных формула (5) определяет решение задачи $\mathcal{L}_2$. Считая гладкими данные задачи, установим оценку (9). Рассмотрим сначала случай $v_{02} = 0$. Дифференцируя (5) по t , получаем

$$\begin{aligned} v_2'(t) &= \mathcal{A}_1(\mathcal{A}_1 - \alpha I)(\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2)^{-1} \int_0^t T_1(t-s)f_2(s) ds \\ &\quad + \mathcal{A}_2(\mathcal{A}_2 - \alpha I)(\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1)^{-1} \int_0^t T_2(t-s)f_2(s) ds \\ &= Q_1 \int_0^t T_1(t-s)f_2(s) ds + Q_2 A_2 \int_0^t T_2(t-s)f_2(s) ds \\ &= Q_1 R_1(f_2) + Q_2 R_2(f_2). \end{aligned}$$

Здесь Q_i — ограниченные операторы. Покажем, что

$$\|R_i(f_2)\|_{L_{q,\kappa}} \leq M_6 \|f_2\|_{L_{q,\kappa}}, \quad i = 1, 2. \quad (10)$$

Для доказательства оценки (10) при $i = 2$ нам понадобятся оценки операторов

$$R_{\mu,\delta}^i(f) = A_2^i \int_0^t \exp(-\delta(t-s)) T_{02}(\mu(t-s)) f(s) ds, \quad i = 0, 1.$$

ЛЕММА 4. Если операторы $R_{\mu,\delta}^i$ ограничены в $L_{q,\kappa}(0, +\infty; E_2)$ при вещественных $\mu_1 > 0$, $\delta = \delta_0$, то они ограничены и при комплексных $|\mu - \mu_0| \leq r$, $|\delta - \delta_0| \leq r$ для достаточно малого $r > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как при $A = A_2$ функции

$$v(t) = \exp(-\delta t) T_{02}(t) v_{02} + R_{\mu, \delta}^0(f(t)) \quad (11)$$

является решением задачи (2), то ограниченность $R_{\mu, \delta}^1$ в $L_{q, \kappa}(0, +\infty; E_2)$ эквивалентна коэрцитивной разрешимости задачи (2) в $L_{q, \kappa}(0, +\infty; E_2)$. Из коэрцитивной разрешимости задачи (2) вытекает оценка

$$\|v'(t)\|_{L_{q, \kappa}} + \sup_{t \geq 0} [\exp(\kappa t) v(t)]_{1-1/q} + \|A_2 v(t)\|_{L_{q, \kappa}} \leq M (\|f\|_{L_{q, \kappa}} + \|v_0\|_{1-1/q}) \quad (12)$$

при любых $f \in L_{q, \kappa}(0, +\infty; E_2)$ и $v_0 \in E_{1-1/q} \cap E_2$.

Доказательство леммы 4 теперь легко проводится методом замороженных коэффициентов с использованием оценки (12) при $\mu = \mu_0$ и $\delta = \delta_0$.

Отметим, что из условия 1 вытекает ограниченность в $L_{q, \kappa}(0, +\infty; E_2)$ операторов $R_{\mu, \delta}^i$ при любых вещественных $\mu > 0$ и δ , удовлетворяющих неравенству $\kappa < \mu_1 \sigma_1 + \delta$, а формула (11) справедлива при всех комплексных δ и $\mu \in S_{\psi_1}$.

ЛЕММА 5. Пусть $\mu \in S_{\psi_1}$, $|\mu - \gamma_1| \leq r$, $|\delta - \alpha| \leq r$. Тогда при достаточно малом r и достаточно большом $\tilde{\sigma}_N$ для операторов $R_{\mu, \delta}^i$, $i = 0, 1$, справедливы оценки

$$\|R_{\mu, \delta}^i(f)\|_{L_{q, \kappa}} \leq M \|f\|_{L_{q, \kappa}}, \quad i = 0, 1, \quad (13)$$

$$\sup_{t \geq 0} [R_{\mu, \delta}^0(f)]_{1-1/q} \leq M \|f\|_{L_{q, \kappa}}. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства оценки (13) при $i = 1$ рассмотрим интегральный оператор $R_{\gamma_1, \alpha}^1$. При $t > 0$ для его ядра $Z(t) = \exp(-\alpha t) A_2 T_{02}(\gamma_1 t)$ в силу леммы 1 справедлива оценка

$$\|Z(t)\| \leq M t^{-1} \exp(-(\rho(\tilde{\sigma}_N) + \alpha)t).$$

Так как $\kappa < \rho(\tilde{\sigma}_N) + \alpha$ при большом $\tilde{\sigma}_N$, из [7] следует ограниченность $R_{\gamma_1, \alpha}^1$ в $L_{q, \kappa}(0, +\infty; E_2)$. Для завершения доказательства оценки (13) при $i = 1$ теперь достаточно воспользоваться леммой 4. Оценка (13) при $i = 0$ вытекает из оценки (13) при $i = 1$, а оценка (14) является следствием оценки (13) для $i = 1$ (см. [12], [13]).

Лемма 5 доказана.

Перейдем к доказательству оценок (10). Пользуясь формулой (7), представим $z(t) = R_2(f_2)$ в виде

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(r)} (\tilde{\mu} I - G)^{-1} A_2 \int_0^t \exp(\alpha(\tilde{\mu} - 1)(s - t)) T_{02}(\gamma_1(t - s)\tilde{\mu}) f_2(s) ds d\tilde{\mu} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(r)} (\tilde{\mu} I - G)^{-1} R_{\mu, \delta}^1(f_2) d\tilde{\mu}. \end{aligned}$$

Здесь $\delta = (1 - \tilde{\mu})\alpha$, $\mu = \gamma_1 \tilde{\mu}$. Так как $|\mu - 1| \rightarrow 0$ и $|\delta - \alpha| \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$, то, применяя лемму 5 при достаточно малом r и достаточно большом $\tilde{\sigma}_N$ и обобщенное неравенство Минковского, получаем, что

$$\|z\|_{L_{q,\kappa}} \leq \frac{1}{2\pi i} \int_{C(r)} \|(\tilde{\mu}I - G)^{-1}\| \cdot \|R_{\mu,\delta}^1(f_2)\|_{L_{q,\kappa}} |d\tilde{\mu}| \leq M \|f_2\|_{L_{q,\kappa}}.$$

Оценка (10) при $i = 2$ доказана. Аналогично доказывается случай $i = 1$.

Из оценок (10) вытекает оценка

$$\|v_2'(t)\|_{L_{q,\kappa}} \leq M \|f_2\|_{L_{q,\kappa}};$$

таким же способом устанавливается оценка

$$\|A_2 v_2(t)\|_{L_{q,\kappa}} \leq M \|f_2\|_{L_{q,\kappa}}.$$

Оценки

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} \|\exp(\kappa t) v_2(t)\|_{1-1/q} &\leq M \|f_2\|_{L_{q,\kappa}}, \\ \left\| A_2 \int_0^t \exp(\alpha(s-t)) v_2(s) ds \right\|_{L_{q,\kappa}} &\leq M \|f_2\|_{L_{q,\kappa}} \end{aligned}$$

являются следствием предыдущих двух оценок и уравнения (4) для $i = 2$.

Оценка (9) для $v_{02} = 0$ и гладкой f_2 установлена. Доказательство такого же результата для $f_2 = 0$ и “гладкого” v_{02} мы опускаем. Переход к негладким данным и доказательство единственности проводится стандартным образом (см., например, [12], [13]).

Лемма 3 доказана.

Перейдем к изучению задачи $\mathcal{L}_1$. Пусть e_i – собственные векторы оператора A , отвечающие σ_i , а

$$f_1(t) = \sum_1^N f^i(t) e_i, \quad v_1(t) = \sum_1^N v^i(t) e_i, \quad v_{01} = \sum_1^N v_{0i}^1 e_i.$$

Тогда задача $\mathcal{L}_1$ эквивалентна задаче Коши для системы

$$\begin{aligned} (v^i(t))' + \gamma_1 \sigma_i v^i(t) + \gamma_2 \sigma_i \int_0^t \exp(\alpha(s-t)) v_i(s) ds &= f^i(t), \quad t \geq 0, \\ v^i(0) &= v_{0i}^1, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (15)$$

В случае, когда корни $\lambda_k(\sigma_i)$, $k = 1, 2$, $i = 1, \dots, N$, соответствующего (15) характеристического уравнения $\Xi: \lambda^2 + (\gamma_1 \sigma_i - \alpha)\lambda + \gamma_2 \sigma_i = 0$ различны, решение задачи (15) (при фиксированном i) задается формулой

$$\begin{aligned} v^i(t) &= \lambda_1(\sigma_i) (\lambda_1(\sigma_i) - \lambda_2(\sigma_i))^{-1} \int_0^t \exp(\beta_1(\sigma_i)(t-s)) f^i(s) ds \\ &\quad + \lambda_2(\sigma_i) (\lambda_2(\sigma_i) - \lambda_1(\sigma_i))^{-1} \int_0^t \exp(\beta_2(\sigma_i)(t-s)) f^i(s) ds \\ &\quad + (\lambda_1(\sigma_i) \exp(\beta_1(\sigma_i)t) - \lambda_2(\sigma_i) \exp(\beta_2(\sigma_i)t)) (\lambda_1(\sigma_i) - \lambda_2(\sigma_i))^{-1} v_{0i}^1. \end{aligned} \quad (16)$$

Если же $\lambda_1(\sigma_i) = \lambda_2(\sigma_i)$, то

$$v^i(t) = \int_0^t \exp(\beta_1(\sigma_i)(t-s))(\lambda_1(\sigma_i)(t-s) + 1)f^i(s)ds + \exp(\beta_1(\sigma_i)t)(1 + t\lambda_1(\sigma_i))v_{0i}^1. \quad (17)$$

Здесь $\lambda_1(\sigma_i) = -\frac{1}{2}(\gamma_1\sigma_i - \alpha)$.

Изучим сначала свойства корней уравнения Ξ в зависимости от γ_1, γ_2 и α . Так как $\lambda_k(\sigma_i)$ суть корни уравнения Ξ , то $\lambda_2(\sigma_i) = \lambda_1(\sigma_i)$, когда $D(\sigma_i) = 0$, где

$$D(\sigma) = (\gamma_1\sigma - \alpha)^2 - 4\gamma_2\sigma = \gamma_1^2\sigma^2 - 2(\gamma_1\alpha + 2\gamma_2)\sigma + \alpha^2.$$

Корни $\sigma_{\pm}$ многочлена $D(\sigma)$ имеют вид

$$\sigma_{\pm} = \gamma_1^{-2}((\gamma_1\alpha + 2\gamma_2) \pm 2((\gamma_1\alpha + \gamma_2)\gamma_2)^{1/2}).$$

Так как $\gamma_1\alpha + \gamma_2 > 0$, то $\sigma_{\pm}$ будут комплексными лишь при $\gamma_2 < 0$. В этом случае $D(\sigma_i) > 0$ при $\sigma_i > 0$. Если же $\gamma_2 > 0$, то $D(0) = \alpha^2$ и $D'(0) = -2((\gamma_1\alpha + \sigma_2) + \gamma_2) < 0$. Поэтому при $\gamma_2 > 0$ квадратичный многочлен $D(\sigma)$ всегда имеет вещественные корни σ_+ и σ_- , причем всегда $0 < \sigma_- < \sigma_+ < +\infty$. Таким образом, при $\gamma_2 < 0$ корни $\lambda_k(\sigma_i)$, $k = 1, 2$, всегда вещественны и различны. При $\gamma_2 > 0$ если $\sigma_i \in (\sigma_-, \sigma_+)$, то $\lambda_k(\sigma_i)$ комплексны, а если $\sigma_i \notin [\sigma_-, \sigma_+]$, то $\lambda_k(\sigma_i)$ вещественны и различны. Если же $\sigma_i = \sigma_{\pm}$, то $\lambda_1(\sigma_i) = \lambda_2(\sigma_i)$. Изучим поведение непрерывных функций $\tilde{\beta}_k(\sigma) = \operatorname{Re} \beta_k(\sigma)$ при $\sigma > 0$, заметив, что $\tilde{\beta}_1(\sigma) \leq \tilde{\beta}_2(\sigma)$.

ЛЕММА 6. Пусть $\gamma_1\alpha + \gamma_2 > 0$, $\gamma_1 > 0$. Тогда функция $\tilde{\beta}_2(\sigma)$ монотонно убывает на $[0, +\infty)$ и отрицательна на $(\sigma_*, +\infty)$, $\sigma_* = -\alpha/\gamma_1$ при $\alpha < 0$, $\gamma_2 > 0$. В остальных случаях $\tilde{\beta}_2(\sigma)$ отрицательна и монотонно убывает на $[0, +\infty)$. Во всех случаях

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \tilde{\beta}_2(\sigma) = -\frac{\gamma_1\alpha + \gamma_2}{\gamma_1} < 0. \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение (18) проверяется непосредственно. Далее, легко проверяется, что $\tilde{\beta}_2(\sigma) = \beta_2(\sigma)$ при $\sigma \notin (\sigma_-, \sigma_+)$ для $\gamma_2 > 0$ и при $\sigma > 0$ для $\gamma_2 < 0$ и что

$$\tilde{\beta}_2(0) = -\frac{1}{2}(\alpha - |\alpha|),$$

$$\tilde{\beta}_2'(\sigma) = \beta_2'(\sigma) = -\frac{1}{4}(\gamma_1 - ((\gamma_1\sigma - \alpha)\gamma_1 - 2\gamma_2)D^{-1/2}(\sigma)), \quad \sigma \notin (\sigma_-, \sigma_+), \quad (19)$$

$$\tilde{\beta}_2''(\sigma) = \beta_2''(\sigma) = \frac{1}{2}\gamma_1^2 D^{-1/2}(\sigma) + \frac{1}{2}D^{-3/2}(\sigma)(\gamma_1(\gamma_1\sigma - \alpha) - 2\gamma_2)^2 > 0, \quad \sigma \notin (\sigma_-, \sigma_+), \quad (20)$$

$$\tilde{\beta}_2'(0) = -\frac{1}{2}((|\alpha| + \alpha)\gamma_1 + 2\gamma_2)|\alpha|^{-1},$$

$$\tilde{\beta}_2(\sigma) = -\frac{1}{2}(\gamma_1\sigma + \alpha), \quad \sigma \in [\sigma_-, \sigma_+]. \quad (21)$$

Далее, для $\sigma \notin (\sigma_-, \sigma_+)$ при $\gamma_2 > 0$ и $\sigma > 0$ при $\gamma_2 < 0$ имеем $\beta_2(\sigma) \neq 0$. Действительно, в противном случае

$$\gamma_1^2((\gamma_1\sigma_i - \alpha)^2 - 4\gamma_2\sigma) = ((\gamma_1\sigma - \alpha)\gamma_1 - 2\gamma_2)^2$$

или, что то же, $\gamma_2(\gamma_2 + \gamma_1\alpha) = 0$, чего быть не может. Рассмотрим поведение $\tilde{\beta}_2(\sigma)$ в разных случаях.

1) Пусть $\alpha > 0$, $\gamma_2 > 0$. Тогда $\tilde{\beta}_2'(0) = -(\gamma_1\alpha + \gamma_2)|\alpha|^{-1} < 0$, $\tilde{\beta}_2(0) = 0$. Поэтому на $(0, \sigma_-)$ функция $\tilde{\beta}_2(\sigma)$ отрицательна и монотонно убывает. В силу (21) и непрерывности на $[0, +\infty)$ таково же ее поведение на $[\sigma_-, \sigma_+]$. Из (19) следует, что $\tilde{\beta}_2'(\sigma) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow +\infty$. Отсюда и из (20) следует, что $\tilde{\beta}_2'(\sigma) < 0$ на $(\sigma_+, +\infty)$. Поэтому $\tilde{\beta}_2(\sigma)$ на $(\sigma_+, +\infty)$ отрицательна и монотонно убывает. Итак, $\tilde{\beta}_2(\sigma)$ отрицательна и монотонно убывает на $(0, +\infty)$.

2) Пусть $\alpha > 0$, $\gamma_2 < 0$. Тогда $\tilde{\beta}_2(0) = 0$, $\tilde{\beta}_2'(0) = -(\gamma_1\alpha + \gamma_2)|\alpha|^{-1} < 0$ и $\tilde{\beta}_2'(\sigma) \neq 0$ при $\sigma > 0$. Поэтому $\tilde{\beta}_2(\sigma)$ отрицательна и монотонно убывает на $[0, +\infty)$.

3) Пусть $\alpha < 0$, $\gamma_2 > 0$. Так как $D(\sigma_*) = 4\alpha(\gamma_1\alpha + \gamma_2)/\gamma_1 < 0$ при $\sigma_* = -\alpha/\gamma_1$, то $\sigma_* \in (\sigma_-, \sigma_+)$ и $\tilde{\beta}_2(\sigma_*) = 0$. Тогда в силу (21) имеем $\tilde{\beta}_2(\sigma_-) > 0$, $\tilde{\beta}_2(\sigma_+) < 0$. Так как $\tilde{\beta}_2'(\sigma) < 0$ при $\sigma \notin (\sigma_-, \sigma_+)$, отсюда следует, что $\tilde{\beta}_2(\sigma)$ монотонно убывает на $(0, +\infty)$ и отрицательна на $(\sigma_*, +\infty)$.

4) Случай $\alpha < 0$, $\gamma_2 < 0$ невозможен в силу $\gamma_1\alpha + \gamma_2 > 0$.

5) Пусть $\alpha = 0$. Тогда из $\gamma_1\alpha + \gamma_2 > 0$ следует $\gamma_2 > 0$, а $\sigma_- = 0$, $\sigma_+ = 4\gamma_2/\gamma_1^2$. При $\sigma \leq \sigma_+$ имеем $\tilde{\beta}_k(\sigma) = -\frac{1}{2}\gamma_1\sigma$. Так как $\tilde{\beta}_2(\sigma) \neq 0$ при $\sigma > \sigma_+$, а $\tilde{\beta}_2'(\sigma_+) = -\frac{1}{2}\gamma_1 < 0$, то $\tilde{\beta}_2(\sigma)$ отрицательна и монотонно убывает на $[\sigma_+, +\infty)$, а следовательно, и на $[0, +\infty)$.

Лемма 6 доказана.

Перейдем к оценкам решения задачи $\mathcal{L}_1$. Так как $\varkappa < -\tilde{\beta}_2(\sigma_1)$, то в случае некратных корней с помощью обобщенного неравенства Минковского и формулы (16) получаем, что

$$\|\exp(\varkappa t)v^i(t)\|_{L_q(0,+\infty)} \leq M(\|\exp(\varkappa t)f^i(t)\|_{L_q(0,+\infty)} + |v_{0i}^1|). \quad (22)$$

Аналогичная оценка справедлива и для случая кратных корней. В этом случае нужно воспользоваться формулой (17) и обобщенным неравенством Минковского для интегральных операторов

$$\int_0^t C_i(t-s)f^i(s)ds$$

с ядром $C_i(t) = \exp(\beta_1(\sigma_i)t)(1 + \lambda_1(\sigma_i)t)$.

ЛЕММА 7. При выполнении условий (3) задача $\mathcal{L}_1$ однозначно разрешима, и для ее решения справедлива оценка

$$|||v_1(t)||| \leq M\mathcal{N}(f_1, v_{01}). \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При гладкой $f_1(t)$ с учетом того, что $e_i \in D(A) \subset E_{1-1/q}$, существование, единственность и оценка решения (23) вытекает из приведенных выше рассуждений и оценки (22). Случай произвольной $f_1(t)$ доказывается стандартным образом с использованием оценки (23).

Лемма 7 доказана.

Для завершения доказательства теоремы 1 достаточно учесть условие (3) и воспользоваться леммами 3 и 7.

Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. В приложениях в качестве операторов A с такой структурой спектра выступают, например, операторы $-\Delta$, гидродинамический оператор Крейна–Хопфа (см. [10, с. 66]), имеющие точечный спектр, лежащий на положительной полуоси, и др. Аналогичный теореме 1 результат имеет место и для секториального расположения первых N собственных значений оператора A .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Агранович Ю. Я., Соболевский П. Е. Исследование математической модели вязкоупругой жидкости // Докл. АН УССР. Сер. А. 1989. № 10. С. 3–6.
- [2] Осколков А. П. Начально-краевые задачи для уравнений движений жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройда // Тр. МИАН. 1988. Т. 179. С. 126–164.
- [3] Sobolevskii P. E. Stabilisation of viscoelastic fluid motion (Oldroid's mathematical model) // Differential Integral Equations. 1994. V. 7. № 6. P. 1597–1612.
- [4] Orlov V. P. Stability of zero solution of mathematical model of multidimensional barotropic viscoelastic medium // Nonlinear Anal. 1996. V. 26. № 12. P. 1937–1950.
- [5] Милославский А. И. Об устойчивости некоторых классов эволюционных уравнений // Сиб. матем. ж. 1985. Т. 26. № 5. С. 118–132.
- [6] Милославский А. И. Об устойчивости вязкоупругой изотропной среды // Докл. АН СССР. 1988. Т. 229, № 6. С. 1341–1343.
- [7] Sinestrari E. On the abstract Cauchy problem of parabolic type in spaces of continuous functions // J. Math. Anal. Appl. 1985. V. 107. P. 16–66.
- [8] Prüss J. Evolutionary Integral Equations and Applications. Basel: Birkhäuser, 1993.
- [9] Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.
- [10] Юдович В. И. Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости. Ростов: Изд. Ростовского ун-та, 1984.
- [11] Йосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
- [12] Соболевский П. Е. Неравенства коэрцитивности для абстрактных параболических уравнений // Докл. АН СССР. 1964. Т. 157. № 1. С. 51–55.
- [13] Орлов В. П. Сингулярно вырождающиеся дифференциальные операторы высокого порядка с неограниченным операторным коэффициентом // Дифференц. уравнения. 1976. № 2. С. 272–280.

Воронежский государственный университет
E-mail: orlov@kfa.vsu.ru

Поступило
31.07.97
Исправленный вариант
16.09.98