Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, Операторы Штурма–
Лиувилля с сингулярными потенциалами, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 6, 897–912

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1234>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 12:35:33

УДК 517.9+517.43

ОПЕРАТОРЫ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С СИНГУЛЯРНЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ

А. М. Савчук, А. А. Шкаликов

В заметке изучаются операторы Штурма–Лиувилля, порожденные на конечном промежутке и на всей оси дифференциальным выражением $l(y) = -y'' + q(x)y$, где $q(x)$ – сингулярная функция первого порядка такая, что $\int q(\xi) d\xi \in L_{2,loc}$. Построены минимальный и максимальный операторы с такими потенциалами на конечном отрезке. Описаны самосопряженные расширения минимального оператора и найдена асимптотика собственных значений соответствующих расширений. Доказана равномерная резольвентная сходимость операторов, порожденных гладкими потенциалами q_n , при условии $\int |\int (q_n - q) d\xi|^2 dx \rightarrow 0$, а также доказана сходимость спектров таких операторов. Аналогичные результаты получены для случая всей оси.

Библиография: 26 названий.

0. Введение. В теории операторов Штурма–Лиувилля, порождаемых на интервале (a, b) дифференциальным выражением

$$l(y) = -y'' + q(x)y, \quad (1)$$

стандартным условием на функцию $q(x)$ в случае конечного интервала является условие $q(x) \in L_1(a, b)$ (часто, чтобы не вдаваться в технические детали, предполагается непрерывность $q(x)$, см. [1], [2]). В сингулярном случае, когда интервал (a, b) бесконечен или когда функция $q(x)$ имеет неинтегрируемые особенности на концах интервала, предполагается, что $q(x) \in L_{1,loc}(a, b)$.

В физических работах (см. [3, гл. 3]) была поставлена задача об изучении оператора (1) и его многомерного аналога $-\Delta + q(x)$ с потенциалом $q(x)$, являющимся распределением, а точнее δ -функцией. Математическое исследование таких операторов было проведено Березиным и Фаддеевым [4], Минлосом и Фаддеевым [5], Березиным [6]. Впоследствии операторы Шрёдингера с точечными потенциалами и потенциалами, сосредоточенными на слое, изучались во многих работах. Мы укажем здесь статьи и монографии [7]–[13]; в них можно найти более полную библиографию. Операторы с потенциалами, не являющимися δ -функциями, изучались менее активно. Нам известны работы [14], [15], где в одномерном случае изучался потенциал $q(x) = 1/x$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 98-01-01000 и № 96-15-96091.

Цель настоящей работы – дать корректное определение оператора Штурма–Лиувилля с потенциалом $q(x)$, являющимся сингулярным распределением первого порядка, более точно, при $q(x) = u'(x)$, где $u(x) \in L_2(a, b)$, а производная понимается в смысле распределений. Случаи конечного и бесконечного интервала будут рассмотрены отдельно. Мы покажем, что при указанном условии имеется однозначное “разумное” определение соответствующего оператора. Оператор с указанным потенциалом мы определим явно и покажем, что для любой последовательности гладких функций $u_\varepsilon(x)$, сходящейся в $L_2(a, b)$ к $u(x)$, последовательность операторов $-d^2/dx^2 + u'_\varepsilon(x)$ имеет равномерный резольвентный предел $-d^2/dx^2 + u'(x)$. Этот результат важен, например, для вычисления спектра предельного оператора. Мы покажем, что условие сходимости $u_\varepsilon(x) \xrightarrow{L_2} u(x)$ для существования однозначного не только равномерного, но и сильно-го резольвентного предела является точным в следующем смысле: нельзя L_2 заменить на L_p при $p < 2$. По этой причине определение операторов с потенциалами $q(x) = u'(x)$ при $u(x) \notin L_2$ оказывается некорректным с точки зрения предельного перехода. Конечно, это вовсе не означает, что нет других разумных определений рассматриваемых операторов в случае $\int q(\xi) d\xi \notin L_2$. Но случай более сильной сингулярности авторы планируют изучить в отдельной работе.

Отметим, что сумму оператора $-d^2/dx^2$ в $L_2(\mathbb{R}^1)$ и оператора умножения на функцию $q(x)$ из негативного соболевского пространства $H_2^{-1}(\mathbb{R}^1)$ можно определить, привлекая метод квадратичных форм (см. [16, гл. XI]) и теорию мультипликаторов. Этот подход был реализован в работе [17], которая выполнялась одновременно с настоящей. Однако, метод этой работы позволяет получить существенно более полную информацию. В частности, явно описывается область определения суммы, дается характеристика всех самосопряженных расширений минимального оператора на конечном отрезке и др. Кроме того, предлагаемый метод позволяет рассматривать не только сингулярные вещественные потенциалы, но и комплексные.

1. Определение оператора на конечном отрезке. Пусть

$$q(x) = u'(x), \quad u(x) \in L_2(0, 1),$$

причем равенство понимается в смысле распределений, т.е. $(q, \varphi) = -(u, \varphi')$ для любой бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(x)$ с компактным носителем на $(0, 1)$. Введем квазипроизводную

$$y^{[1]}(x) = y'(x) - u(x)y(x)$$

и перепишем выражение (1) в виде

$$l(y) = -(y^{[1]})' - u(x)y^{[1]} - u^2(x)y. \quad (2)$$

С дифференциальным выражением $l(y)$ свяжем максимальный оператор L_M , определенный равенствами

$$L_M y = l(y), \quad \mathcal{D}(L_M) = \{y \mid y, y^{[1]} \in W_1^1[0, 1], l(y) \in L_2(0, 1)\}.$$

Здесь W_1^1 – пространство функций, обобщенная производная которых суммируема на $[0, 1]$. Очевидно, W_1^1 совпадает с классом абсолютно непрерывных функций на $[0, 1]$. Минимальный оператор L_m определим как сужение L_M на область

$$\mathcal{D}(L_m) = \{y \mid y \in \mathcal{D}(L_M), y(\pm 1) = y^{[1]}(\pm 1) = 0\}.$$

Заметим, что в случае $u'(x) \in L_1$ определения максимального и минимального операторов совпадают с классическим их определением, так как в этом случае условие $y^{[1]} \in W_1^1$ влечет $y' \in W_1^1$, и наоборот.

Мы не предполагаем, что функция $u(x)$ вещественна. Обозначим через $\bar{l}(y)$ дифференциальное выражение $-y'' + \bar{u}'(x)y$. Через $\bar{L}_M$ и $\bar{L}_m$ обозначим максимальный и минимальный операторы, порожденные $\bar{l}(y)$.

Важную роль в дальнейшем играет следующий результат.

ТЕОРЕМА 0. Пусть $A(x)$ – матрица размера $n \times n$, элементы которой являются функциями пространства $L_1(0, 1)$, а $f \in [L_1(0, 1)]^n$ – вектор-функция. Тогда при любом $c \in [0, 1]$ уравнение

$$y' = A(x)y + f, \quad y(c) = \xi \in \mathbb{C}^n,$$

имеет единственное решение $y(x)$, причем $y(x)$ – абсолютно непрерывная на $[0, 1]$ функция. Если последовательность матриц $A_\varepsilon(x)$ с элементами из $L_1(0, 1)$ такова, что $\|A_\varepsilon(x) - A(x)\|_{L_1} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то решения уравнений

$$y'_\varepsilon = A_\varepsilon(x)y_\varepsilon + f, \quad y_\varepsilon(c) = \xi,$$

сходятся к $y(x)$ равномерно на $[0, 1]$ (и даже в метрике пространства $W_1^1[0, 1]$). Кроме того, справедлива оценка

$$|y(x) - y_\varepsilon(x)| \leq C \|f\|_{L_1} \|A(x) - A_\varepsilon(x)\|_{L_1} \quad (3)$$

с постоянной C , не зависящей от f и ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение известно [2, § 16]. Оценку (3) можно получить следующим образом. Рассмотрим оператор

$$A_\varepsilon z(x) = \int_c^x A_\varepsilon(\xi) z(\xi) d\xi.$$

Он является вольтерровым в пространстве $C[0, 1]$ (это доказывается методом сжимающих отображений). Поэтому операторы $I - A$ и $I - A_\varepsilon$ обратимы. Имеем

$$|y(x) - y_\varepsilon(x)| = |(I - A)^{-1} f_1 - (I - A_\varepsilon)^{-1} f_1| \leq \|(I - A)^{-1}\| \cdot \|A - A_\varepsilon\| \cdot \|(I - A_\varepsilon)^{-1}\| \cdot \|f_1\|,$$

где $f_1 = \int f(\xi) d\xi$, а норма берется в пространстве $C[0, 1]$. Эта оценка влечет (3).

Наша ближайшая цель – показать, что операторы L_M и L_m являются взаимно сопряженными фредгольмовыми операторами. В частности, в случае вещественной функции $u(x)$ оператор L_m симметричен и замкнут, его индексы дефекта равны $\{2, 2\}$, а его самосопряженные расширения описываются явно.

В резольвентном равенстве

$$-y'' - u'(x)y = \lambda y + f, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad f \in L_2, \quad (4)$$

положим $y_1 = y$, $y_2 = y^{[1]}$ и перейдем к системе

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} u & 1 \\ -\lambda - u^2 & -u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Элементы матрицы

$$A(x) = \begin{pmatrix} u & 1 \\ -\lambda - u^2 & -u \end{pmatrix}$$

являются функциями из $L_1[0, 1]$. Поэтому при любых $c \in [0, 1]$,

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

существует единственное решение системы (5) с начальными условиями $y_1(c) = \alpha_1$, $y_2(c) = \alpha_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Решением уравнения (4) с начальными условиями

$$y(c) = \alpha_1, \quad y^{[1]}(c) = \alpha_2$$

назовем первую компоненту решения системы (5) с соответствующими начальными условиями.

ЛЕММА 1 (формула Лагранжа). Пусть $f \in \mathcal{D}(L_M)$, $g \in \mathcal{D}(\overline{L}_M)$. Тогда

$$(L_M f, g) = \int_0^1 l(f) \overline{g} dx = (f, \overline{L}_M g) + [f, g]_0^1,$$

где $[f, g]_0^1 = -f^{[1]}(x) \overline{g}(x)|_0^1 + \overline{g}^{[1]}(x) f(x)|_0^1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} (L_M f, g) &= - \int_0^1 (f' - uf)' \overline{g} dx - \int_0^1 u(f' - uf) \overline{g} dx - \int_0^1 u^2 f \overline{g} dx \\ &= \int_0^1 (f' - uf)(\overline{g}' - u\overline{g}) dx - \int_0^1 u^2 f \overline{g} dx - f^{[1]} \overline{g}|_0^1 \\ &= \int_0^1 f l(\overline{g}) dx + [f, g]_0^1 = (f, \overline{L}_M g) + [f, g]_0^1. \end{aligned}$$

Это доказывает лемму.

ЛЕММА 2. Уравнение $L_m u = f$ имеет решение $u \in \mathcal{D}(L_m)$ тогда и только тогда, когда f ортогональна всем решениям $z(x)$ однородного уравнения $\overline{L}_M z = 0$, т.е. образ оператора L_m и ядро оператора $\overline{L}_M$ связаны соотношением

$$\mathcal{R}(L_m) \oplus \text{Ker } \overline{L}_M = L_2[0, 1].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in L_2$ и $y(x)$ – решение уравнения

$$l(y) = f, \quad y(0) = y^{[1]}(0) = 0,$$

существование и единственность которого гарантируется теоремой 0. Из этой же теоремы следует, что размерность ядра оператора $\bar{L}_M$ равна 2. Пусть z_1 и z_2 – базис в $\text{Ker } \bar{L}_M$, причем

$$z_1(1) = 0, \quad z_1^{[1]}(1) = 1; \quad z_2(1) = 1, \quad z_2^{[1]}(1) = 0.$$

В силу леммы 1 имеем

$$\begin{aligned} (f, z_1) &= (L_M y, z_1) = y(1) \bar{z}_1^{[1]}(1) = y(1), \\ (f, z_2) &= (L_M y, z_2) = -y^{[1]}(1) \bar{z}_2(1) = -y^{[1]}(1). \end{aligned}$$

Эти равенства влекут утверждение леммы.

ЛЕММА 3. $\mathcal{D}(L_m)$ плотно в $L_2(0, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $h(x)$ ортогональна линейалу $\mathcal{D}(L_m)$. Найдем функцию $z(x)$ – произвольное решение уравнения $\bar{L}_M z = h$. Тогда для любого $y \in \mathcal{D}(L_m)$ имеем

$$0 = (y, h) = (y, \bar{L}_M z) = (L_m y, z).$$

В силу леммы 2 выполнено $z \in \text{Ker } \bar{L}_M$. Поэтому $h = \bar{L}_M z = 0$.

ЛЕММА 4. Справедливы равенства $\bar{L}_M = L_m^*$, $L_m^* = \bar{L}_m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, например, первое равенство. Из леммы 1 следует, что $\bar{L}_M \subset L_m^*$. Докажем обратное включение. Пусть $g \in \mathcal{D}(L_m^*)$, $L_m^* g = h$. Пусть $z \in \mathcal{D}(\bar{L}_M)$ – решение уравнения $\bar{L}(z) = h$, т.е. $h = \bar{L}_M z$. Тогда для любого $y \in \mathcal{D}(L_m)$

$$(h, y) = (L_m^* g, y) = (g, L_m y) = (\bar{L}_M z, y) = (z, L_m y)$$

в силу леммы 1. Таким образом, функция $z - g$ ортогональна образу $\mathcal{R}(L_m)$, а значит $z - g \in \text{Ker } \bar{L}_M$ согласно лемме 2. Следовательно, $g \in \mathcal{D}(\bar{L}_M)$ и $\bar{L}_M g = \bar{L}_M z = h = L_m^* g$.

Оператор F с плотной областью определения в гильбертовом пространстве называется *фредгольмовым*, если его образ замкнут, а числа $\{\alpha, \beta\}$, соответствующие размерностям ядра и коядра, конечны. Пару $\{\alpha, \beta\}$ называют *дефектными числами оператора F* , а число $\alpha - \beta$ – *индексом F* .

ТЕОРЕМА 1. При любом $\lambda \in \mathbb{C}$ операторы $L_m - \lambda$ и $L_M - \lambda$ фредгольмовы, а их дефектные числа равны $\{0, 2\}$ и $\{2, 0\}$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Область определения оператора $L_m - \lambda$ плотна в L_2 , а из леммы 2 следует, что $L_m - \lambda$ фредгольмов с индексами $\{0, 2\}$. Аналогичное утверждение для оператора $L_M - \lambda$ следует из определения или из равенства $L_M - \lambda = (\bar{L}_m - \bar{\lambda})^*$ (известно, что дефектные числа оператора и его сопряженного меняются местами [18, гл. 4]).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $u(x)$ – вещественная функция. Тогда L_m – замкнутый симметрический оператор с индексами дефекта $\{2, 2\}$, а всякое его самосопряженное расширение L является сужением оператора L_M на область вида

$$\mathcal{D}(L) = \{y \mid y \in \mathcal{D}(L_M), U_1(y) = U_2(y) = 0\},$$

где линейные формы U_1, U_2 имеют представление

$$U_j(y) = a_{j1}y(0) + a_{j2}y^{[1]}(0) + b_{j1}y(1) + b_{j2}y^{[1]}(1) = 0, \quad j = 1, 2, \quad (6)$$

для коэффициентов которых выполнены равенства

$$a_{j1}\bar{a}_{k2} - a_{j2}\bar{a}_{k1} = b_{j1}\bar{b}_{k2} - b_{j2}\bar{b}_{k1}, \quad j, k = 1, 2. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае вещественной функции $u(x)$ оператор L_m замкнут и симметричен, а его индексы дефекта совпадают с размерностями $\text{Ker}(L_M \pm i)$, а потому равны $\{2, 2\}$. Доказательство утверждения об общем виде краевых условий для самосопряженного расширения L_m получается почти дословным повторением рассуждений из работы Крейна [19]. Отметим лишь, что в классическом случае $u'(x) \in L_1$ квази-производные $y^{[1]}(0)$ и $y^{[1]}(1)$ в (6) можно заменить на обычные производные. При этом коэффициенты форм U_j изменятся, но равенства (7) для них будут по-прежнему выполняться.

2. Приближения гладкими потенциалами. Резольвентная сходимость.

Теперь нас будут интересовать следующие вопросы. Пусть некоторая последовательность гладких функций $u_\varepsilon(x)$ сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ по норме пространства L_2 к функции $u_0(x) \in L_2$. Будут ли сходиться, и в каком смысле, операторы $L_\varepsilon = -d^2/dx^2 + u'_\varepsilon(x)$ к построенному выше оператору $L_0 = -d^2/dx^2 + u'_0(x)$? Здесь мы подразумеваем, что области определений операторов L_ε и L_0 подчинены некоторым краевым условиям вида (6). Будут ли спектры $\sigma(L_\varepsilon)$ сходиться к спектру $\sigma(L_0)$? Мы дадим положительные ответы на эти вопросы. Это позволяет, во-первых, в вычислениях заменить оператор L_0 с сингулярным потенциалом на оператор L_ε с подходящим гладким потенциалом; во-вторых, дать новое определение оператора L_0 с помощью предельного перехода (результат не зависит от выбора сходящейся к $u_0(x)$ последовательности гладких функций $u_\varepsilon(x)$).

Сначала приведем необходимые определения и вспомогательные результаты. Пусть $T_\varepsilon, 0 \leq \varepsilon \leq 1$, – семейство замкнутых операторов в банаховом пространстве $\mathcal{X}$. Будем говорить, что семейство T_ε сходится к T_0 в смысле сильной (равномерной) резольвентной сходимости, и писать $T_\varepsilon \xrightarrow{R} T_0$ ($T_\varepsilon \xrightarrow{R} T_0$), если найдется число $\mu \in \mathbb{C}$, принадлежащее резольвентным множествам $\rho(T_0)$ и $\rho(T_\varepsilon)$ при всех достаточно малых ε , и последовательность ограниченных операторов $(T_\varepsilon - \mu)^{-1}$ сильно (равномерно) сходится к $(T_0 - \mu)^{-1}$. Говорят, что семейство спектров $\sigma(T_\varepsilon)$ полунепрерывно сверху (снизу) при $\varepsilon = 0$, если для любого $\tau > 0$ и любого компакта $K \subset \mathbb{C}$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех $0 < \varepsilon < \delta$ выполнено: τ – окрестность множества $\sigma(T_0)$ (τ – окрестности множеств $\sigma(T_\varepsilon)$) – содержит (содержат) множества $\sigma(T_\varepsilon) \cap K$ (множество $\sigma(T_0) \cap K$). Будем говорить, что спектры $\sigma(T_\varepsilon)$ сходятся к спектру $\sigma(T_0)$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, и писать $\sigma(T_\varepsilon) \rightarrow \sigma(T_0)$, если множества $\sigma(T_\varepsilon)$ полунепрерывны при $\varepsilon = 0$ как снизу, так и сверху.

Известно [18, гл. VIII], что сильная резольвентная сходимость не влечет полунепрерывности спектров ни снизу, ни сверху. В отличие от сильной равномерная резольвентная сходимость влечет полунепрерывность спектров сверху [18, гл. IV, теорема 2.25], но не влечет полунепрерывность снизу (см. [20, задача 85]). Однако в самосопряженном случае полунепрерывность спектров снизу имеется даже при сильной резольвентной сходимости [18, гл. VIII, теорема 1.14]. Поэтому если T_ε – семейство самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и $T_\varepsilon \xrightarrow{R} T_0$, то $\sigma(T_\varepsilon) \rightarrow \sigma(T_0)$.

Нетрудно видеть, что дискретная компонента спектра T_0 непрерывна при возмущениях в смысле равномерной резольвентной сходимости даже в несамосопряженном случае. Далее будет полезен более сильный результат, содержащий оценку скорости сходимости изолированных собственных значений (СЗ).

ЛЕММА 5. Пусть $T_\varepsilon \xrightarrow{R} T_0$. Если λ_0 – точка дискретного спектра оператора T_0 , т.е. изолированное СЗ конечной кратности κ , то в любой достаточно малой δ -окрестности точки λ_0 при малых $\varepsilon < \varepsilon_0(\delta)$ имеется конечное число СЗ операторов T_ε суммарной алгебраической кратности κ . Если алгебраическая кратность СЗ λ_0 совпадает с геометрической (нет присоединенных векторов), то скорость приближения СЗ $\lambda_0(\varepsilon)$ операторов T_ε к СЗ λ_0 допускает оценку

$$|\lambda_0(\varepsilon) - \lambda_0| \leq C \|(T_\varepsilon - \mu)^{-1} - (T_0 - \mu)^{-1}\|, \quad \mu \in \rho(T_0), \quad (8)$$

где C зависит от λ_0 и μ , но не зависит от ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, считаем $\mu = 0$, т.е. $T_\varepsilon^{-1} \Rightarrow T_0^{-1}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Пусть Γ – окружность радиуса δ с центром в точке λ_0 , причем число δ столь мало, что $\Gamma \subset \rho(T_0)$ и внутри Γ нет точек спектра кроме λ_0 . В силу полунепрерывности спектра сверху имеем $\Gamma \subset \rho(T_\varepsilon)$ при достаточно малых $\varepsilon < \varepsilon_0(\delta)$. Обозначим

$$R(\lambda) := (I - \lambda T_0^{-1})^{-1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} (T_0 - \lambda)^{-1} - (T_\varepsilon - \lambda)^{-1} &= R(\lambda)T_0^{-1} - (I - \lambda T_\varepsilon^{-1})^{-1}T_\varepsilon^{-1} \\ &= R(\lambda)(T_0^{-1} - T_\varepsilon^{-1})[I + \lambda R(\lambda)(I + \lambda(T_0^{-1} - T_\varepsilon^{-1})R(\lambda))^{-1}T_\varepsilon^{-1}]. \end{aligned} \quad (9)$$

Следовательно, равномерно сходятся соответствующие проекторы Рисса

$$P_\varepsilon := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (T_\varepsilon - \lambda)^{-1} d\lambda \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (T_0 - \lambda)^{-1} d\lambda := P_0.$$

Тогда $\kappa := \dim P_0 = \dim P_\varepsilon$ при достаточно малых ε [21, гл. 1]. Известно (см. [22]), что в случае совпадения геометрической кратности с алгебраической справедлива оценка

$$\|\lambda R(\lambda)\| < C\delta^{-1} \quad \text{при } \lambda \in \Gamma,$$

где C не зависит от δ . Из (9) следует, что если число ε_0 выбрано так, что

$$\|T_0^{-1} - T_\varepsilon^{-1}\| \leq C^{-1}\delta \quad \text{при } 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, \quad (10)$$

то соответствующие СЗ $\lambda_0(\varepsilon)$ операторов T_ε при всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ лежат внутри Γ , т.е. $|\lambda_0(\varepsilon) - \lambda_0| < \delta$. Теперь заметим, что число δ можно разморозить и выбрать любым, удовлетворяющим неравенству (10). Полагая $\delta = C\|T_0^{-1} - T_\varepsilon^{-1}\|$, получаем оценку (8).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если p – число элементов наиболее длинной жордановой цепочки, отвечающей СЗ λ_0 , то согласно [22] $\|\lambda R(\lambda)\| \leq C\delta^{-p}$, а тогда скорость приближения СЗ допускает оценку

$$|\lambda_0(\varepsilon) - \lambda_0| \leq C_1 \|T_0^{-1} - T_\varepsilon^{-1}\|^{1/p}, \quad C_1 = C^{-1/p}.$$

Далее ограничимся рассмотрением вещественных потенциалов и самосопряженных расширений, хотя доказательство по существу сохраняется для несамосопряженных расширений L минимального оператора L_m при условии, что резольвента L не есть пустое множество.

Пусть $u_0(x) \in L_2(0, 1)$ и $u_\varepsilon(x)$ – семейство гладких вещественных функций на $[0, 1]$ таких, что

$$\|u_\varepsilon(x) - u_0(x)\|_{L_2} \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (11)$$

Считаем, что $0 \leq \varepsilon \leq 1$, и обозначим через L_ε семейство операторов, порожденных дифференциальным выражением $-d^2/dx^2 + u'_\varepsilon(x)$ и краевыми условиями $U_1(y) = U_2(y) = 0$, где линейные формы U_1 и U_2 имеют вид (6), (7). При этом квазипроизводная в (6) полагается равной

$$y^{[1]}(x) = y'(x) - u_\varepsilon(x)y. \quad (12)$$

Согласно теореме 2 операторы L_ε самосопряженные. При $\varepsilon > 0$ в силу гладкости потенциалов операторы L_ε можно эквивалентно определить обычным способом.

ТЕОРЕМА 3. *Условие (11) влечет равномерную резольвентную сходимость операторов L_ε при $\varepsilon \rightarrow 0$. Оператор L_0 имеет дискретный спектр, а скорость приближения СЗ $\lambda_k(\varepsilon)$ операторов L_ε к соответствующим СЗ $\lambda_k(0)$ оператора L_0 допускает оценку*

$$|\lambda_k(\varepsilon) - \lambda_k(0)| \leq C_k \|u_\varepsilon(x) - u_0(x)\|_{L_2},$$

где C_k зависит от k , но не зависит от ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, а $\varphi_\varepsilon(x)$ и $\psi_\varepsilon(x)$ – пара решений однородного уравнения

$$-y'' + u'_\varepsilon(x)y = \mu y$$

таких, что

$$\varphi_\varepsilon(0) = 1, \quad \varphi_\varepsilon^{[1]}(0) = 0; \quad \psi_\varepsilon(0) = 0, \quad \psi_\varepsilon^{[1]}(0) = 1.$$

Здесь квазипроизводные понимаются в смысле равенства (12). При $\varepsilon = 0$ решения понимаются в смысле определения 1.

Учитывая, что вронскиан пары $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$ тождественно равен 1, непосредственной проверкой убеждаемся, что функция

$$z_\varepsilon(x) = \int_0^x (\varphi_\varepsilon(x)\psi_\varepsilon(\xi) - \psi_\varepsilon(x)\varphi_\varepsilon(\xi)) f(\xi) d\xi$$

удовлетворяет резольвентному равенству

$$-y'' + u'_\varepsilon(x)y - \mu y = f(x) \in L_2(0, 1). \quad (13)$$

Как и ранее, решение понимается в смысле определения 1. Общее решение уравнения (13) имеет вид

$$y_\varepsilon(x) = z_\varepsilon(x) + a_1\varphi_\varepsilon(x) + a_2\varphi_\varepsilon(x).$$

Подставив его в краевые условия, получим

$$a_1 = \Delta^{-1} \begin{vmatrix} U_1(z_\varepsilon) & U_1(\psi_\varepsilon) \\ U_2(z_\varepsilon) & U_2(\psi_\varepsilon) \end{vmatrix}, \quad a_2 = \Delta^{-1} \begin{vmatrix} U_1(\varphi_\varepsilon) & U_1(z_\varepsilon) \\ U_2(\varphi_\varepsilon) & U_2(z_\varepsilon) \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} U_1(\varphi_\varepsilon) & U_1(\psi_\varepsilon) \\ U_2(\varphi_\varepsilon) & U_2(\psi_\varepsilon) \end{vmatrix}.$$

При этом $\Delta = \Delta_\varepsilon(\mu) \neq 0$, иначе μ есть СЗ оператора L_ε . В силу теоремы 0 имеем

$$|\varphi_\varepsilon^{[j]}(x) - \varphi_0^{[j]}(x)| + |\psi_\varepsilon^{[j]}(x) - \psi_0^{[j]}(x)| \leq C \|u_\varepsilon^2 - u_0^2\|_{L_1} \leq C \|u_\varepsilon - u_0\|_{L_2}, \quad j = 0, 1, \quad (14)$$

где через C обозначаем различные постоянные, не зависящие от ε . Следовательно,

$$|U_s(\varphi_\varepsilon) - U_s(\varphi_0)| + |U_s(\psi_\varepsilon) - U_s(\psi_0)| \leq C \|u_\varepsilon - u_0\|_{L_2}, \quad s = 0, 1,$$

а тогда $|\Delta_\varepsilon - \Delta_0| \leq C \|u_\varepsilon - u_0\|_{L_2}$. Из оценки (14) получаем

$$|z_\varepsilon^{[j]}(x) - z_0^{[j]}(x)| \leq C \|u_\varepsilon^2 - u_0^2\|_{L_1} \|f\|_{L_1} \leq C \|u_\varepsilon - u_0\|_{L_2} \|f\|_{L_2}.$$

Поэтому

$$|a_1(\varepsilon) - a_1(0)| + |a_2(\varepsilon) - a_2(0)| \leq C \|u_\varepsilon - u_0\|_{L_2} \|f\|_{L_2}.$$

Тем самым, мы показали, что для решений

$$y_\varepsilon = (L_\varepsilon - \mu)^{-1} f$$

справедливы оценки

$$\|y_\varepsilon - y_0\|_{L_2} \leq \max_{0 \leq x \leq 1} |y_\varepsilon(x) - y_0(x)| \leq C \|u_\varepsilon - u_0\|_{L_2} \|f\|_{L_2}.$$

Эта оценка влечет равномерную резольвентную сходимость операторов L_ε . Оператор $(L_0 - \mu)^{-1}$ есть равномерный предел компактных операторов $(L_\varepsilon - \mu)^{-1}$, а потому он также компактен. Оценка для скорости приближения СЗ следует из леммы 5.

3. Асимптотика собственных значений. Здесь мы покажем, что сингулярности рассматриваемого типа не влияют на главный член асимптотики СЗ и собственных функций оператора L_0 . Для определенности рассмотрим краевые условия

$$y(0) = y(1) = 0. \quad (15)$$

Незначительно модифицируя метод доказательства (этот метод для гладких потенциалов известен, см., например, [23]), можно получить аналогичный результат для краевых условий вида

$$\cos \alpha y^{[1]}(0) + \sin \alpha y(0) = 0, \quad \cos \beta y^{[1]}(1) + \sin \beta y(1) = 0.$$

Доказательство для общих краевых условий (6) усложняется существенно и здесь не приводится. Здесь мы имеем в виду задачу о нахождении асимптотики собственных функций. Главный член асимптотики собственных значений, конечно, сохраняется для произвольных краевых условий, так как минимальный оператор L_0 имеет конечные дефектные числа.

ТЕОРЕМА 4. Собственные значения оператора L_0 с вещественным потенциалом $u'(x)$, $u(x) \in L_2(0, 1)$, и краевыми условиями (15) имеют асимптотику

$$\lambda_n = (\pi n)^2 (1 + o(n^{-1})), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (16)$$

а соответствующие им собственные функции

$$y_n(x) = \sin(\pi n x) + o(1). \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение на СЗ $L_0 y - \lambda y = 0$ запишем в виде системы

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} u & 1 \\ -\lambda - u^2 & -u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad y_1 = y, \quad y_2 = y^{[1]}.$$

Сделаем замену

$$y_1(x) = r(x) \sin \theta(x), \quad y_2(x) = \lambda^{1/2} r(x) \cos \theta(x),$$

которая является модификацией замены Прюфера (см. [24], [23]). Тогда

$$\theta'(x, \lambda) = \lambda^{1/2} + \lambda^{-1/2} u(x) \sin^2 \theta(x, \lambda) - u(x) \sin 2\theta(x, \lambda), \quad (18)$$

$$r'(x, \lambda) = r(x, \lambda) \left[u(x) \cos 2\theta(x, \lambda) - \frac{1}{2} \lambda^{-1/2} u^2(x) \sin 2\theta(x, \lambda) \right]. \quad (19)$$

Решение уравнения (18) будем искать в виде $\theta(x, \lambda) = \lambda^{1/2} x + \eta(x, \lambda)$. Тогда

$$\eta(x, \lambda) = \lambda^{-1/2} \int_0^x u(t) \sin^2 \theta(t, \lambda) dt - \int_0^x u^2(t) \sin(2\lambda^{1/2} t + 2\eta(t, \lambda)) dt.$$

Методом последовательных приближений легко показать, что это уравнение имеет решение, которое равномерно ограничено при $0 \leq x \leq 1$ и $\lambda \geq 1$. Так как $u^2(t) \in L_1(0, 1)$, в силу леммы Римана–Лебега $\eta(x, \lambda) = o(1)$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\theta(x, \lambda) = \lambda^{1/2} x + o(1),$$

причем $\theta(0, \lambda) = 0$. Вновь используя лемму Римана–Лебега, из уравнения (19) находим

$$r(x, \lambda) = \exp \left(\int_0^x u(\xi) \cos 2\theta(\xi, \lambda) d\xi + o(1) \right) = 1 + o(1) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty.$$

Следовательно, СЗ определяются равенствами $\theta(1, \lambda_n) = \pi n$. Из этих равенств получаем асимптотики (16) и (17).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $u'(x) \in L_1$, то интегрированием по частям получаем $\eta(x, \lambda) = O(\lambda^{-1/2})$, а тогда имеем классические формулы

$$\lambda_n = (\pi n)^2 + O(1), \quad y_n(x) = \sin(\pi n x) + O(n^{-1}).$$

4. Случай всей оси. Пусть $x \in \mathbb{R}$, $u(x) \in L_{2,\text{loc}}$ и потенциал q в (1) определен равенством $q(x) = u'(x)$ в смысле теории распределений. Тогда на любом конечном промежутке (a, b) мы можем определить дифференциальный оператор с таким потенциалом, порожденный краевыми условиями

$$\sin \alpha y^{[1]}(a) + \cos \alpha y(a) = 0, \quad \sin \beta y^{[1]}(b) + \cos \beta y(b) = 0.$$

Далее можно устремить $b \rightarrow \infty$ (или одновременно $b \rightarrow \infty$, $a \rightarrow -\infty$) и получить результаты вполне аналогичные классическим (см., например, [1, гл. 2]). Доказательства соответствующих результатов остаются в существенном прежними; нужно лишь иметь в виду, что во всех конструкциях производная должна заменяться квазипроизводной

$$y^{[1]}(x) = y'(x) + \int q(\xi) d\xi y(x). \quad (20)$$

Конечно, здесь мы не будем повторять соответствующие доказательства, а рассмотрим важный частный случай, когда сингулярные особенности потенциала не уходят на $\pm\infty$. А именно, предположим, что функция q в (20) имеет вид

$$q(x) = v(x) + u'(x), \quad v \in L_{1,\text{loc}}, \quad u(x) \in L_{2,\text{loc}}, \quad \text{supp } u'(x) \subset (-N, N). \quad (21)$$

Определим минимальный оператор L_m , порожденный дифференциальным выражением (1), на области

$$\mathcal{D}(L_m) = \{y \in L_2(\mathbb{R}) \mid \text{supp } y \Subset \mathbb{R}, y, y^{[1]} \in W_{1,\text{loc}}^1, l(y) \in L_2(\mathbb{R})\},$$

где квазипроизводная понимается в смысле равенства (20). Также определим оператор T_m , в котором вместо $q(x)$ участвует регулярная функция $v(x)$ из (21). Очевидно, операторы L_m и T_m симметрические и имеют равные дефектные числа, так как коммутируют с оператором сопряжения.

ЛЕММА 6. $\mathcal{D}(L_m)$ плотно в $L_2(\mathbb{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Линеал $\mathcal{D}(L_m)$ содержит функции, равные 0 вне (a, b) и совпадающие на (a, b) с функциями из области определения минимального оператора на этом интервале. Согласно лемме 4 такие функции плотны в $L_2(a, b)$. Выбор (a, b) произволен, откуда следует утверждение леммы.

Чтобы упростить дальнейшее изложение, ограничимся случаем, когда на обоих концах прямой имеет место случай предельной точки Вейля. Достаточным условием для этого является, например, условие Титчмарша

$$v(x) \geq -C - C_1 x^2. \quad (22)$$

Известно [1, гл. 2], что при выполнении этого условия оператор T , являющийся замыканием оператора T_m , самосопряжен. Так как носитель $u(x)$ финитный, описание области определения замыкания проводится так же, как в классическом случае.

ТЕОРЕМА 5. Пусть L – замыкание минимального оператора L_m . При выполнении условий (21) и (22) оператор L самосопряжен. Непрерывные спектры операторов T и L совпадают. Если точка $\rho \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$ является точкой накопления слева или справа дискретного спектра оператора T , то она является такой же для оператора L , причем соответствующие асимптотики СЗ совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим метод расщепления. Рассмотрим сужение оператора L_m на область с дополнительными условиями

$$y(\pm N) = y'(\pm N) = 0.$$

Получим оператор $\hat{L}_m$, причем $\dim \mathcal{D}(L_m)/\mathcal{D}(\hat{L}_m) = 4$. Следовательно,

$$\text{def } L_m = \text{def } \hat{L}_m + 4.$$

Очевидно, оператор $\hat{L}_m$ есть прямая сумма минимальных операторов L_m^-, L_m^0, L_m^+ , действующих в пространствах $L_2(-\infty, -N)$, $L_2(-N, N)$, $L_2(N, \infty)$ соответственно. Поэтому

$$\text{def } \hat{L}_m = \text{def } L_m^- + \text{def } L_m^0 + \text{def } L_m^+.$$

При выполнении условий (21) и (22) согласно теореме Вейля–Титчмарша имеем

$$\text{def } L_m^- = \text{def } L_m^+ = \{1, 1\}.$$

Из теоремы 2 следует, что $\text{def } L_m^0 = \{2, 2\}$. Поэтому $\text{def } L_m = \{0, 0\}$, т.е. замыкание L_m есть самосопряженный оператор.

Пусть L^-, L^0, L^+ – самосопряженные расширения операторов L_m^-, L_m^0, L_m^+ , порожденные краевыми условиями $y(\pm N) = 0$, а $\tilde{L}$ – самосопряженный оператор, являющийся их прямой суммой. Оба оператора $\tilde{L}$ и L являются самосопряженными расширениями $\hat{L}_m$, $\text{def } \hat{L}_m = 4$, поэтому их непрерывные спектры совпадают. При этом

$$\sigma_c(\tilde{L}) = \sigma_c(L) = \sigma_c(L^+) \cup \sigma_c(L^-),$$

так как $\sigma_c(L^0) = \emptyset$. Те же рассуждения можно повторить для оператора T , сохранив аналогичные обозначения. Так как $v(x) = q(x)$ при $|x| \geq N$, то $T^\pm = L^\pm$, а тогда

$$\sigma_c(T) = \sigma_c(L^+) \cup \sigma_c(L^-) = \sigma_c(L).$$

Далее, асимптотики СЗ пар операторов $\tilde{L}$ и L , $\tilde{T}$ и T совпадают в любых точках накопления СЗ (как конечномерных расширений одинаковых операторов). Но операторы $\tilde{L}$ и $\tilde{T}$ не совпадают только на подпространстве $L_2(-N, N)$, где они равны L^0 и T^0 . Эта пара имеет дискретные спектры с точкой накопления на $+\infty$, и согласно теореме 4 асимптотики их СЗ совпадают. Это доказывает последнее утверждение теоремы.

Теперь получим аналог теоремы 3 о возможности приближения оператора L операторами с гладкими потенциалами. Пусть $u_\varepsilon(x)$, $0 \leq \varepsilon \leq 1$, – семейство гладких функций с носителями в интервале $(-N, N)$ таких, что

$$\|u_\varepsilon(x) - u_0(x)\|_{L_2} \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (23)$$

Обозначим через L_ε замыкание минимальных операторов, порожденных потенциалами $q_\varepsilon = v + u_\varepsilon$. В силу теоремы 5 операторы L_ε самосопряженные при всех $0 \leq \varepsilon \leq 1$.

ТЕОРЕМА 6. Условие (23) влечет $L_\varepsilon \xrightarrow{R} L_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. В частности,

$$\sigma(L_\varepsilon) \rightarrow \sigma(L_0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что $L_\varepsilon \xrightarrow{R} L_0$. Пусть $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Так как $\|(L_\varepsilon - \mu)^{-1}\| \leq (\operatorname{Im} \mu)^{-1}$, достаточно доказать, что $(L_\varepsilon - \mu)^{-1}f \rightarrow (L_0 - \mu)^{-1}f$ для финитных функций f .

Пусть $\varphi_\varepsilon^+(x)$, $\varphi_\varepsilon^-(x)$ – решения уравнения

$$-y'' + v(x)y + u'_\varepsilon(x)y - \mu y = 0$$

такие, что $\varphi_\varepsilon^\pm(x) \in L_2(\mathbb{R}^\pm)$. Условие (22) влечет [1, гл. II] то, что такие функции существуют и определены однозначно с точностью до постоянного множителя. Множители подберем так, чтобы их обобщенный вронскиан (с квазипроизводной вместо производной при $\varepsilon = 0$) был равен 1. Тогда функция

$$G(x, \xi, \mu) = \begin{cases} \varphi_\varepsilon^+(x)\varphi_\varepsilon^-(\xi), & \xi \leq x, \\ \varphi_\varepsilon^+(\xi)\varphi_\varepsilon^-(x), & \xi > x, \end{cases}$$

является ядром интегрального оператора $(L_\varepsilon - \mu)^{-1}$ (см. [1, гл. II, § 7]). Очевидно, $\varphi_\varepsilon^+(x) = \varphi_0^+(x)$ при $x \geq N$; $\varphi_\varepsilon^-(x) = \varphi_0^-(x)$ при $x \leq -N$.

Пусть $\operatorname{supp} f \subset (-a, a)$, $a \geq N$. Из теоремы 0 имеем

$$\max_{|x| \leq a} |\varphi_\varepsilon^\pm(x) - \varphi_0^\pm(x)| \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|(L_\varepsilon - \mu)^{-1}f - (L_0 - \mu)^{-1}f\| &= \left\| \int_{-a}^a (G_\varepsilon(x, \xi) - G_0(x, \xi))f(\xi) d\xi \right\| \\ &\leq \int_{-a}^a |(\varphi_\varepsilon^+(\xi) - \varphi_0^+(\xi))f(\xi)| d\xi \|\varphi_\varepsilon^-(x)\|_- + \int_{-a}^a |(\varphi_\varepsilon^-(\xi) - \varphi_0^-(\xi))f(\xi)| d\xi \|\varphi_\varepsilon^+(x)\|_+ \\ &\quad + \int_{-a}^a (|\varphi_\varepsilon^+(x)\varphi_\varepsilon^-(\xi) - \varphi_0^+(x)\varphi_0^-(\xi)| + |\varphi_\varepsilon^-(x)\varphi_\varepsilon^+(\xi) - \varphi_0^-(x)\varphi_0^+(\xi)|)f(\xi) d\xi \\ &\leq C(\varepsilon)\|f\|, \end{aligned}$$

где постоянная $C(\varepsilon)$ не зависит от f и $C(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Запись $\|\cdot\|_\pm$ означает, что норма берется в $L_2(a, \infty)$ или $L_2(-\infty, -a)$ соответственно. Эта оценка доказывает сильную резольвентную сходимость, причем оценка равномерна для функций f с носителем на $(-a, a)$.

Пусть теперь $\operatorname{supp} f \subset (-\infty, -a]$. Из теоремы 3 следует, что $\tilde{L}_\varepsilon \xrightarrow{R} \tilde{L}_0$, если операторы $\tilde{L}_\varepsilon$ определены так же, как в теореме 5. Минимальный оператор L_m^- , определенный на $(-\infty, -a)$, не зависит от ε , $\operatorname{def} L_m^- = \{1, 1\}$, поэтому коразмерность его образа в $L_2(-\infty, -a)$ равна 1. Для функций f из этого образа имеем $(L_\varepsilon - \mu)^{-1}f = (L_0 - \mu)^{-1}f$. Если f ортогональна этому образу, то ввиду сильной сходимости

$$\|(L_\varepsilon - \mu)^{-1}f_1 - (L_0 - \mu)^{-1}f_1\| \rightarrow 0,$$

где $f_1 = \int f(\xi) d\xi$. Поэтому есть равномерная сходимость для $f \in L_2(-\infty, a)$. То же верно для $f \in L_2(a, \infty)$. Теорема доказана.

5. Примеры и контрпримеры. Условие $q(x) = u'(x)$, $u \in L_2$, существенно в предложенном методе. Мы не видим возможности получить похожие результаты, например, для функций $u(x) \in L_p$, $p < 2$. Поставим следующий вопрос: можно ли определить оператор L для $u(x) \in L_p$, $p < 2$, с помощью предельного перехода? Точнее, если последовательность гладких функций $u_\varepsilon(x)$ такова, что $\|u_\varepsilon - u\|_{L_p} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то будет ли последовательность операторов L_ε иметь сильный или равномерный резольвентный предел, не зависящий от выбора последовательности u_ε ? Покажем, что ответ на этот вопрос отрицателен. Рассмотрим последовательность потенциалов

$$u'_\varepsilon(x) = -\varepsilon^{-3/2}\theta(x-\varepsilon)\theta(\varepsilon-x)\operatorname{sign} x.$$

Подобные функции впервые появились в связи с задачей определения оператора Штурма–Лиувилля с потенциалом δ' (см. [25]). Можно проверить, что сильным резольвентным пределом этой последовательности операторов как в $L_2(-1, 1)$, так и в $L_2(\mathbb{R}^1)$ будет оператор $-d^2/dx^2 - \delta(x)$. С другой стороны, очевидно, что $u_\varepsilon(x) \rightarrow 0$ в L_p при $p < 2$. Таким образом, резольвентный предел операторов L_ε (если он существует) зависит от выбора последовательности $u_\varepsilon(x)$, если сходимость понимается в L_p при $p < 2$. В заключение рассмотрения этого метода приведем три примера.

ПРИМЕР 1. Пусть $x \in [-1, 1]$ и $u(x)$ – функция Хевисайда, т.е.

$$l(y) = -y'' + C\delta(x)y.$$

Оператор L , порожденный этим выражением в $L_2[-1, 1]$, хорошо известен (см. [10], [16]):

$$Ly = -y'',$$

$$\mathcal{D}(L) = \{y \in AC \mid y' \in W_2^1[-1, 0), y' \in W_2^1(0, 1], y'(+0) - y'(-0) = Cy(0)\}.$$

Очевидно, оператор, получаемый в результате описанного метода, совпадает с L .

ПРИМЕР 2. Пусть

$$l(y) = -y'' + \frac{\operatorname{sign} x}{|x|^\alpha}y.$$

С помощью канонической регуляризации (см. [26]) функциям

$$\frac{\operatorname{sign} x}{|x|^\alpha}$$

можно сопоставить обобщенные функции при $\alpha \neq 2, 4, 6, \dots$. При $\alpha < 3/2$ полученные обобщенные функции являются обобщенными производными функций из L_2 и, значит, можно определить оператор, задаваемый выражением $l(y)$. Этот оператор на отрезке $[-1, 1]$ при $\alpha \neq 1$ определяется следующим образом:

$$Ly = -y'' + |x|^{-\alpha}\operatorname{sign} x \cdot y,$$

$$\mathcal{D}(L) = \left\{ y \in AC \mid y' \in W_2^1[-1, 0), y' \in W_2^1(0, 1], l(y) \in L_2, y(\pm 1) = 0, \right.$$

$$\left. y'(\varepsilon) - y'(-\varepsilon) + y(0) \frac{2}{1-\alpha} |\varepsilon|^{1-\alpha} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \right\}$$

(здесь предполагается, что $l(y) \in L_2$ на каждом из интервалов $(-1, 0)$ и $(0, 1)$), а при $\alpha = 1$ предельное соотношение при $\varepsilon \rightarrow 0$ нужно заменить следующим:

$$y'(\varepsilon) - y'(-\varepsilon) + 2y(0) \ln \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Такое же определение оператора L при $\alpha = 1$ дано в [14], [15].

ПРИМЕР 3. Предложенный метод позволяет определить оператор Штурма–Лиувилля для потенциалов $q(x)$, имеющих сколь угодно высокую сингулярность во внутренней точке, при условии, что сильный рост потенциала компенсируется сильной осциллирующей. В качестве примера положим $q(x) = x^{-3}(\exp x^{-4}) \sin(\exp x^{-4})$. Имеем

$$\int q(\xi) d\xi = 4^{-1} \cos(\exp x^{-4}) \in L_2,$$

поэтому оператор Штурма–Лиувилля для такой функции $q(x)$ вполне определен.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Левитан Б. М., Саргсян И. С. Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970.
- [2] Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
- [3] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 3. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1989.
- [4] Березин Ф. А., Фаддеев Л. Д. Замечания об уравнении Шрёдингера с сингулярным потенциалом // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137. № 7. С. 1011–1014.
- [5] Минлос Р. А., Фаддеев Л. Д. О точечном взаимодействии для систем из трех частиц в квантовой механике // Докл. АН СССР. 1961. Т. 141. № 6. С. 1335–1338.
- [6] Березин Ф. А. О модели Ли // Матем. сб. 1963. Т. 60. № 4. С. 425–446.
- [7] Gesztesy F., Simon B. Rank-one perturbations at infinite coupling // J. Funct. Anal. 1995. V. 128. P. 245–252.
- [8] Kiselev A., Simon B. Rank one perturbations with infinitesimal coupling // J. Funct. Anal. 1995. V. 130. P. 345–356.
- [9] Koshmanenko V., Karwowski W., Ota S. Schrödinger operator perturbed by operators related to null-sets // Positivity. 1998. V. 2. № 1. P. 77–99.
- [10] Albavero S., Gestezy F., Hoegh-Krohn R., Holden H. Some Exactly Solvable Models in Quantum Mechanics. Berlin–New York: Springer, 1988.
- [11] Кошманенко В. Д. Возмущения самосопряженных операторов сингулярными билинейными формами // Укр. матем. ж. 1989. Т. 41. № 1. С. 3–19.
- [12] Фрагела А. К. О возмущении полигармонического оператора потенциалами с малыми носителями // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. № 1. С. 34–36.
- [13] Шондин Ю. Г. Возмущения на тонких множествах высокой коразмерности эллиптических операторов и теория расширений в пространстве с индефинитной метрикой // Записки науч. семинаров ПОМИ. Исследования по линейным операторам и теории функций (вып. 23). Т. 222. С.-Пб.: Наука, 1995. С. 246–292, 310–311.
- [14] Gunson J. Perturbation theory for a Sturm–Liouville problem with an interior singularity // Proc. Roy. Soc. London Ser. A. 1987. V. 414. P. 255–269.
- [15] Kurasov P. On the Coulomb potentials in one dimension // J. Phys. A. 1996. V. 29. № 8. P. 1767–1771.
- [16] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 2. М.: Мир, 1978.
- [17] Нейман-заде М. И., Шкаликов А. А. Операторы Шрёдингера с сингулярными потенциалами из пространств мультипликаторов // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 5. С. 723–733.
- [18] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
- [19] Крейн М. Г. Теория самосопряженных расширений полуограниченных операторов и ее приложения. I // Матем. сб. 1947. Т. 20. № 3. С. 431–490; II // Матем. сб. 1947. Т. 21. № 3. С. 365–404.
- [20] Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. М.: Мир, 1970.
- [21] Гохберг И., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.
- [22] Келдыш М. В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // УМН. 1971. Т. 26. № 4. С. 295–305.
- [23] Ince E. L. Ordinary Differential Equations. 2nd ed. New York: Dover Publ., 1956.

- [24] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
- [25] Seba P. Some remarks on the δ' -interaction in one dimension // Rep. Math. Phys. 1986. V. 24. № 1. P. 111–120.
- [26] Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило

11.03.99

Исправленный вариант

20.09.99