Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Смирнов, A_∞ -симплициальные объекты и A_∞ -топологические группы, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 6, 913–919

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1235>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 09:36:07

УДК 512.546

A_∞ -СИМПЛИЦИАЛЬНЫЕ ОБЪЕКТЫ И A_∞ -ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

В. А. Смирнов

Определяется понятие A_∞ -топологической группы и доказывается, что если пространство $\tilde{G}$ получено деформационной ретракцией топологической группы G , то на нем имеется структура A_∞ -топологической группы и A_∞ -гомотопическая эквивалентность $\tilde{G} \simeq G$.

Библиография: 5 названий.

В работе [1] нами было введено алгебраическое понятие A_∞ -групповой структуры и показано, что на семействе $\pi_*(X) = \{\pi_n(X)\}$ гомотопических групп топологического пространства X имеется A_∞ -групповая структура, которая определяет гомотопический тип пространства X . Здесь мы определим понятие A_∞ -топологической группы и докажем, что если пространство $\tilde{G}$ получено деформационной ретракцией топологической группы G , то на нем имеется структура A_∞ -топологической группы и A_∞ -гомотопическая эквивалентность $\tilde{G} \simeq G$. Тем самым, результаты Сташефа [2] для топологических моноидов распространяются на топологические группы. В качестве основного метода мы используем теорию возмущений симплициальных объектов, которая является аналогом теории возмущений [3] для цепных комплексов.

Начнем с рассмотрения некоторых симплициальных конструкций. Семейство $X_* = \{X_n\}_{n \geq 0}$ будем называть *предсимплициальным объектом*, если заданы операторы граней $d_i: X_n \rightarrow X_{n-1}$, $1 \leq i \leq n$, и вырождения $s_i: X_n \rightarrow X_{n+1}$, $0 \leq i \leq n$, удовлетворяющие следующим соотношениям:

$$d_i d_j = d_{j-1} d_i, \quad i < j, \quad s_i s_j = s_{j+1} s_i, \quad i \leq j,$$

$$d_i s_j = \begin{cases} s_{j-1} d_i, & \text{если } i < j, \\ \text{Id}, & \text{если } i = j \text{ или } i = j + 1, \\ s_j d_{i-1}, & \text{если } i > j + 1. \end{cases}$$

Таким образом, предсимплициальный объект отличается от симплициального только оператором граней d_0 (см. [4]): симплициальный объект имеет такой оператор, а предсимплициальный объект – нет.

Работа выполнена при поддержке гранта Британского Королевского общества.

Отображением $f: X_* \rightarrow Y_*$ предсимплициальных объектов будем называть семейство $f_* = \{f_n\}_{n \geq 0}$ отображений $f_n: X_n \rightarrow Y_n$, которые коммутируют с операторами граней и вырождения, т.е.

$$d_i f_n = f_{n-1} d_i, \quad s_i f_n = f_{n+1} s_i.$$

В категории предсимплициальных объектов топологических пространств обычным образом могут быть определены понятия гомотопности двух предсимплициальных отображений, гомотопической эквивалентности двух предсимплициальных объектов и т.д.

Ясно, что симплициальные объекты являются примерами предсимплициальных объектов. Приведем еще один пример предсимплициального объекта. Пусть G – топологическое пространство с выделенной точкой $*$ $\in G$. Положим $B_n(G) = G^{\times n}$, $B_0(G) = *$. Определим $d_i: B_n(G) \rightarrow B_{n-1}(G)$, полагая

$$d_i(g_1, \dots, g_n) = (g_1, \dots, g_{i-1}, g_{i+1}, \dots, g_n), \\ s_i(g_1, \dots, g_n) = (g_1, \dots, g_i, g_i, \dots, g_n), \quad s_0(g_1, \dots, g_n) = (*, g_1, \dots, g_n).$$

Легко видеть, что выполняются все необходимые предсимплициальные соотношения.

Определим теперь понятие A_∞ -симплициального объекта в категории топологических пространств, или просто A_∞ -симплициального пространства.

Пусть I^n – единичный куб, $I^n = \{(t_1, \dots, t_n) \mid 0 \leq t_i \leq 1\}$. Обозначим

$$u_i^\varepsilon: I^n \rightarrow I^{n+1}, \quad \varepsilon = 0, 1, \quad 1 \leq i \leq n+1, \quad v_i: I^n \rightarrow I^{n-1}, \quad 0 \leq i \leq n,$$

отображения, определенные формулами

$$u_i^\varepsilon(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_{i-1}, \varepsilon, t_i, \dots, t_n), \\ v_i(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} (t_2, \dots, t_n), & \text{если } i = 0, \\ (t_1, \dots, t_i * t_{i+1}, \dots, t_n), & \text{если } 1 \leq i \leq n-1, \\ (t_1, \dots, t_{n-1}), & \text{если } i = n, \end{cases}$$

где $t_i * t_{i+1} = t_i + t_{i+1} - t_i \cdot t_{i+1}$ (см. [5]).

Предсимплициальный объект $X_* = \{X_n\}$ в категории топологических пространств будем называть A_∞ -симплициальным объектом, или просто A_∞ -симплициальным пространством, если заданы операторы граней $d_0^m: X_n \times I^m \rightarrow X_{n-m-1}$, $0 \leq m \leq n-1$, удовлетворяющие следующим соотношениям:

$$d_0^m(1 \times u_i^0) = d_0^{m-1}(d_i \times 1), \quad 1 \leq i \leq m, \quad d_0^m(1 \times u_i^1) = d_0^{m-i}(d_0^{i-1} \times 1), \quad 1 \leq i \leq m, \\ d_0^m(d_i \times 1) = d_{i-m-1} d_0^m, \quad i > m+1, \\ d_0^m(s_i \times 1) = \begin{cases} d_0^{m-1}(1 \times v_i), & \text{если } i \leq m, m \geq 1, \\ \text{Id}, & \text{если } i = m = 0, \\ s_{i-m-1} d_0^m, & \text{если } i > m. \end{cases}$$

Ясно, что симплициальный объект $X_* = \{X_n\}$ в категории топологических пространств можно рассматривать как A_∞ -симплициальный объект с тривиальными операторами

$d_0^m: X_n \times I^m \rightarrow X_{n-m-1}$ при $m \geq 1$. А именно, $d_0^m = d_0 \cdots d_0 p$, где $p: X_n \times I^m \rightarrow X_n$ — проекция.

A_∞ -объекты образуют категорию, морфизмами которой являются отображения $f_*: X_* \rightarrow Y_*$, сохраняющие A_∞ -структуру.

Определим также понятие A_∞ -отображения. Пусть $X_* = \{X_n\}$ — A_∞ -симплициальное пространство, $Y_* = \{Y_n\}$ — симплициальное пространство. A_∞ -отображением из X_* в Y_* будем называть отображение $f_* = \{f_n\}$, $f_n: X_n \rightarrow Y_n$, предсимплициальных объектов вместе с семейством отображений $f_n^m: X_n \times I^m \rightarrow Y_{n-m}$, $0 \leq m \leq n$, удовлетворяющих следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} f_n^0 &= f_n, & f_n^m(1 \times u_i^0) &= f_n^{m-1}(d_i \times 1), \quad 1 \leq i \leq m, \\ f_n^m(1 \times u_i^1) &= f_{n-i}^{m-i}(d_0^{i-1} \times 1), \quad 1 \leq i \leq m, & f_{n-1}^m(d_i \times 1) &= d_{i-m} f_n^m, \quad i > m, \\ f_{n+1}^m(s_i \times 1) &= \begin{cases} f_n^{m-1}(1 \times v_i), & \text{если } i < m, \\ s_{i-m} f_n^m, & \text{если } i \geq m. \end{cases} \end{aligned}$$

A_∞ -отображение будем называть A_∞ -гомотопической эквивалентностью, если соответствующие отображения f_n являются гомотопическими эквивалентностями.

Пусть $X_* = \{X_n\}$ — A_∞ -симплициальный объект в категории топологических пространств. Определим его реализацию $\|X_*\|$, полагая $\|X_*\| = \bigcup_n X_n \times I^n / \sim$, где эквивалентность “ $\sim$ ” порождается следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} x_n \times (t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \dots, t_n) &\sim d_i(x_n) \times (t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n), \\ x_n \times (t_1, \dots, t_{i-1}, 1, t_{i+1}, \dots, t_n) &\sim d_0^{i-1}(x_n \times (t_1, \dots, t_{i-1})) \times (t_{i+1}, \dots, t_n), \\ s_i(x_n) \times (t_1, \dots, t_{n+1}) &\sim x_n \times v_i(t_1, \dots, t_{n+1}). \end{aligned}$$

Напомним, что обычная реализация $|X_*|$ симплициального объекта X_* в категории топологических пространств определяется формулой $|X_*| = \bigcup_n X_n \times \Delta^n / \sim$, где Δ^n — n -мерный симплекс, $\Delta^n = \{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq 1\}$. Операторы кограней и ковырождения $\delta^i: \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$, $\sigma^i: \Delta^{n+1} \rightarrow \Delta^n$, $0 \leq i \leq n$, определяются формулами

$$\begin{aligned} \delta^i(t_1, \dots, t_{n-1}) &= \begin{cases} (0, t_1, \dots, t_{n-1}), & \text{если } i = 0, \\ (t_1, \dots, t_i, t_i, \dots, t_{n-1}), & \text{если } 0 < i < n, \\ (t_1, \dots, t_{n-1}, 1), & \text{если } i = n, \end{cases} \\ \sigma^i(t_1, \dots, t_{n+1}) &= (t_1, \dots, t_i, t_{i+2}, \dots, t_{n+1}). \end{aligned}$$

Эквивалентность “ $\sim$ ” в определении реализации порождается соотношениями

$$\begin{aligned} x_n \times \delta^i(t_1, \dots, t_{n-1}) &\sim d_i(x_n) \times (t_1, \dots, t_{n-1}), \\ x_n \times \sigma^i(t_1, \dots, t_{n+1}) &\sim s_i(x_n) \times (t_1, \dots, t_{n+1}). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 1. Для симплициального объекта X_* в категории топологических пространств, рассматриваемого как A_∞ -симплициальный объект с тривиальными высшими операторами d_0^m , $m \geq 1$, имеет место естественный гомеоморфизм $\|X_*\| \cong |X_*|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим отображение $f: \|X_*\| \rightarrow |X_*|$, полагая

$$f(x_n \times (t_1, \dots, t_n)) = x_n \times (t'_1, \dots, t'_n),$$

где $t'_i = t_1 * \dots * t_i$.

Обратное отображение $g: |X_*| \rightarrow \|X_*\|$ определяется формулой

$$g(x_n \times (t'_1, \dots, t'_n)) = x_n \times (t_1, \dots, t_n), \quad t_i = \begin{cases} t'_i, & \text{если } i = 1, \\ \frac{t'_i - t'_{i-1}}{1 - t'_{i-1}}, & \text{если } i > 1, \end{cases}$$

где считается, что $0/0 = 1$ (см. [4]).

ТЕОРЕМА 2. *Функтор реализации $\| \cdot \|: A_\infty \text{Тор}_s \rightarrow \text{Тор}$ из категории A_∞ -симплициальных топологических пространств в категорию топологических пространств сопряжен с функтором сингулярного симплициального пространства $S_*: \text{Тор} \rightarrow \text{Тор}_s$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Естественное преобразование $\Phi: \|S_*(X)\| \rightarrow X$ задается формулой

$$\Phi(x_n \times (t_1, \dots, t_n)) = x_n(t'_1, \dots, t'_n).$$

Естественное преобразование $\Psi: X_* \rightarrow S_*\|X_*\|$, $\Psi = \{\Psi_n^m\}$, $\Psi_n^m: X_n \times I^m \rightarrow S_{n-m}\|X_*\|$, задается формулой

$$\Psi(x_n \times (t_1, \dots, t_m))(t'_{m+1}, \dots, t'_n) = x_n \times (t_1, \dots, t_n).$$

Будем называть топологическое пространство $\tilde{X}$ *S-гомотопически эквивалентным* топологическому пространству X , если заданы отображения $\xi: \tilde{X} \rightarrow X$, $\eta: X \rightarrow \tilde{X}$ и гомотопия $h: X \times I \rightarrow X$, удовлетворяющие следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \eta\xi = \text{Id}, \quad h(x, 0) = x, \quad h(x, 1) = \xi\eta(x), \quad \eta h(x, t) = \eta(x), \\ h(\xi(x), t) = \xi(x), \quad h(h(x, t_1), t_2) = h(x, t_1 * t_2). \end{aligned}$$

Заметим, что обычная стягивающая гомотопия числовой прямой $\mathbb{R}$, определенная формулой $h(x, t) = x(1 - t)$, удовлетворяет этим соотношениям. Поэтому теорему о деформационных ретрактах можно усилить и переформулировать в следующем виде.

ТЕОРЕМА 3. *Если клеточный комплекс A является деформационным ретрактом клеточного комплекса X , то A S-гомотопически эквивалентен X .*

Следующая теорема является симплициальным аналогом основной леммы теории возмущений цепных комплексов [3].

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $X_* = \{X_n\}$ – симплициальный объект в категории топологических пространств и $\tilde{X}_* = \{\tilde{X}_n\}$ – предсимплициальный объект, S-гомотопически эквивалентный X_* в категории предсимплициальных объектов. Тогда на $\tilde{X}_*$ имеется структура A_∞ -симплициального объекта и A_∞ -симплициальная гомотопическая эквивалентность между X_* и $\tilde{X}_*$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\xi_*: \tilde{X}_* \rightarrow X_*$, $\eta_*: X_* \rightarrow \tilde{X}_*$ и $h_*: X_* \times I \rightarrow X_*$ — соответствующие отображения. Определим операторы $d_0^m: \tilde{X}_n \times I^m \rightarrow \tilde{X}_{n-m-1}$, $0 \leq m \leq n-1$, полагая

$$d_0^m = \eta d_0 h_{n-m} \cdots d_0 h_{n-1} d_0 \xi.$$

Прямые вычисления показывают, что требуемые соотношения выполняются.

Определим также отображения $\xi_n^m: \tilde{X}_n \times I^m \rightarrow X_{n-m}$, полагая

$$\xi_n^m = h_{n-m} d_0 \cdots h_{n-1} d_0 \xi.$$

Они дают A_∞ -симплициальную гомотопическую эквивалентность между $\tilde{X}_*$ и X_* .

Конечно, понятие A_∞ -симплициального объекта может быть определено не только для категории топологических пространств, но и для некоторых других категорий. Например, для категорий симплициальных множеств, цепных комплексов и т.д. Для этого нужно использовать аналог n -мерного куба I^n в этих категориях.

Перейдем теперь к определению понятия A_∞ -топологической группы, но прежде переформулируем само понятие топологической группы.

Пусть G — пространство с выделенной точкой $* \in G$. Рассмотрим предсимплициальный объект $B_*(G) = \{B_n(G)\}$. Если G — топологическая группа, то его можно превратить в симплициальный объект, определив оператор граней d_0 по формуле

$$d_0(g_1, \dots, g_n) = (g_2 - g_1, \dots, g_n - g_1).$$

Обратно, покажем, что всякий оператор граней d_0 в $B_*(G)$, удовлетворяющий симплициальным соотношениям, порождает групповую структуру на G . Действительно, определим операцию $y - x$ в G , полагая $y - x = d_0(x, y)$.

Из симплициального соотношения $d_0 s_0(x) = (x)$ следует, что $x - * = x$. Из соотношения $d_0 s_1(x) = (*)$ следует $x - x = *$. Наконец, из соотношения $d_0 d_1(x, y, z) = d_0 d_0(x, y, z)$ следует $(z - x) - (y - x) = z - y$.

Таким образом, операция $y - x$ удовлетворяет соотношениям:

- 1) $x - * = x$;
- 2) $x - x = *$;
- 3) $(z - x) - (y - x) = z - y$.

Легко видеть, что задание такой операции равносильно заданию групповой структуры. Следовательно, определение топологической группы может быть переформулировано на языке симплициальных объектов. Задать групповую структуру на G — то же самое, что задать оператор граней d_0 , превращающий $B_*(G)$ в симплициальный объект. Его реализация $|B_*(G)|$ обозначается через $B(G)$ и называется *классифицирующим пространством топологической группы G* .

Нашей целью является задание на пространстве G с отмеченной точкой структуры A_∞ -топологической группы таким образом, чтобы оно было эквивалентно заданию на $B_*(G)$ структуры A_∞ -симплициального объекта.

Из симплициальных соотношений следует, что для задания операторов

$$d_0^m: B_n(G) \times I^m \rightarrow B_{n-m-1}(G)$$

достаточно задать только операторы $d_0^m: B_{m+2}(G) \times I^m \rightarrow B_1(G) = G$. Обозначим их через $\varphi^m: G^{\times m+2} \times I^m \rightarrow G$. Тогда операторы $d_0^m: B_n(G) \times I^m \rightarrow B_{n-m-1}(G)$ будут задаваться формулами

$$d_0^m((g_1, \dots, g_n) \times t) = (\varphi^m((g_1, \dots, g_{m+1}, g_{m+2}), t), \dots, \varphi^m((g_1, \dots, g_{m+1}, g_n), t)).$$

Найдем соотношения, которым должны удовлетворять операторы φ^m , чтобы соответствующие операторы d_0^m задавали A_∞ -симплициальную структуру на $B_*(G)$.

Заметим, что соотношения $d_0^m(d_i \times 1) = d_{i-m-1}d_0^m$, если $i > m+1$, мы уже использовали в редукции d_0^m к φ^m . Определим $\cup$ -произведение $\varphi^j \cup \varphi^i: G^{i+j+3} \times I^{i+j} \rightarrow G$ операций φ^i и φ^j , полагая

$$\begin{aligned} & (\varphi^j \cup \varphi^i)((g_1, \dots, g_{i+j+3}) \times (t_1, \dots, t_{i+j})) \\ &= \varphi^j((\varphi^i((g_1, \dots, g_{i+1}, g_{i+2}) \times (t_1, \dots, t_i)), \dots, \\ & \quad \varphi^i((g_1, \dots, g_{i+1}, g_{i+j+3}) \times (t_1, \dots, t_i))) \times (t_{i+1}, \dots, t_{i+j})). \end{aligned}$$

Легко видеть, что соотношения A_∞ -симплициальной структуры на $B_*(G)$ могут быть переписаны в виде

$$\begin{aligned} \varphi^m(1 \times u_i^0) &= \varphi^{m-1}(d_i \times 1), \quad 1 \leq i \leq m, & \varphi^m(1 \times u_i^1) &= \varphi^{m-i} \cup \varphi^{i-1}, \quad 1 \leq i \leq m, \\ \varphi^m(s_i \times 1) &= \varphi^{m-1}(1 \times v_i), \quad i \leq m, \quad m \geq 1, & \varphi^0(s_0 \times 1) &= \text{Id}, \quad \varphi^m(s_{m+1} \times 1) = *. \end{aligned}$$

Семейство операций $\varphi^m: G^{m+2} \times I^m \rightarrow G$, удовлетворяющих этим соотношениям, будем называть A_∞ -групповой структурой на G .

Из сказанного выше следует

ТЕОРЕМА 5. *Задание на топологическом пространстве G с отмеченной точкой $*$ G структуры A_∞ -топологической группы эквивалентно заданию на предсимплициальном объекте $B_*(G)$ A_∞ -симплициальной структуры.*

Реализацию $\|B_*(G)\|$ A_∞ -симплициального объекта $B_*(G)$ обозначим через $B(G)$ и назовем классифицирующим пространством A_∞ -топологической группы G .

Пусть G — A_∞ -топологическая группа, H — топологическая группа. Из симплициальных соотношений следует, что для задания A_∞ -отображения из $B_*(G)$ в $B_*(H)$ достаточно задать отображения $f^m: G^{\times m+1} \times I^m \rightarrow H$, удовлетворяющие следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} f^m(1 \times u_i^0) &= f^{m-1}(d_i \times 1), \quad 1 \leq i \leq m, & f^m(1 \times u_i^1) &= f^{m-i} \cup f^{i-1}, \quad 1 \leq i \leq m, \\ f^m(s_i \times 1) &= f^{m-1}(1 \times v_i), \quad i < m, & f^m(s_m \times 1) &= *. \end{aligned}$$

Семейство отображений $f^m: G^{\times m+1} \times I^m \rightarrow H$, удовлетворяющих этим соотношениям, будем называть A_∞ -отображением.

Из сказанного выше следует

ТЕОРЕМА 6. *Задание A_∞ -отображения из A_∞ -топологической группы G в топологическую группу H эквивалентно заданию A_∞ -отображения из A_∞ -симплициального объекта $B_*(G)$ в симплициальный объект $B_*(H)$.*

ТЕОРЕМА 7. Пусть G – топологическая группа и $\tilde{G}$ – топологическое пространство с выделенной точкой, S -гомотопически эквивалентное G . Тогда на $\tilde{G}$ имеется структура A_∞ -топологической группы и A_∞ -гомотопическая эквивалентность $\tilde{G} \simeq G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что в этой ситуации предсимплициальный объект $B_*(\tilde{G})$ будет S -гомотопически эквивалентен симплициальному объекту $B_*(G)$, и мы можем применить теорему 3.

ТЕОРЕМА 8. Для любой A_∞ -топологической группы G существует топологическая группа H и A_∞ -гомотопическая эквивалентность $G \simeq H$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим классифицирующее пространство $B(G) = \|B_*(G)\|$. Пусть $S_*B(G)$ – сингулярный симплициальный объект, $F_*S_*B(G)$ – симплициальная группа, являющаяся аналогом пространства петель. Тогда реализация $|F_*S_*B(G)|$ будет искомой топологической группой H .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Смирнов В. А. Гомотопический тип и A_∞ -групповая структура // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 10. С. 133–142.
- [2] Stasheff J. D. Homotopy associativity of H -spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 108. № 2. P. 275–312.
- [3] Gugenheim V. K. A. M., Lambe L. A., Stasheff J. D. Perturbation theory in differential homological algebra. II // Illinois J. Math. 1991. V. 35. № 3. P. 357–373.
- [4] May J. P. Simplicial Objects in Algebraic Topology. Princeton: Princeton Univ. Press, 1967.
- [5] Bordman J. M., Vogt R. M. Homotopy Invariant Algebraic Structures on Topological Spaces. Lecture Notes in Math. V. 347. Berlin–New York: Springer, 1973.

Московский педагогический государственный университет им. В. И. Ленина
E-mail: smirnov@mspunet.msk.ru

Поступило
29.12.98