Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ф. Сухинин, Две теоремы о неподвижной точке, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 6, 920–923

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1236>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 15:15:24

УДК 517

ДВЕ ТЕОРЕМЫ О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ

М. Ф. Сухинин

Доказываются две теоремы о неподвижной точке, являющиеся реализациями более общего принципа автора для частично упорядоченных множеств.

Библиография: 3 названия.

Напомним результаты из [1] (см. также [2], где приведены более подробные доказательства приложений). Обозначим через $m(X)$ множество максимальных элементов в частично упорядоченном множестве X .

1. ТЕОРЕМА [1, с. 42]. Пусть заданы частично упорядоченное множество M , $X \subset M$ и $f: X \rightarrow M$. Положим $E = \{x \in X \mid x \leq f(x)\}$ и $P = \{x \in E \mid f(x) \leq x\}$. Пусть

- а) $m(E) \neq \emptyset$;
- б) $\forall x \in E \setminus P \quad \exists z \in E: (x \leq z) \wedge (z \not\leq x)$.

Тогда $\exists x \in X: x \leq f(x) \leq x$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу а) $\exists x \in m(E) \subset E$. Если $x \notin P$, то в силу б) $\exists z \in E: (x \leq z) \wedge (z \not\leq x)$. Тогда $x \notin m(E)$. Следовательно, $x \in P$. Таким образом, $x \leq f(x) \leq x$.

Несмотря на тривиальность, этот принцип позволил взглянуть с общей точки зрения на принципы Тихонова, Биркхофа–Тарского, автора и некоторые другие (подробнее см. в [1] и [2]), а также выработать новые, два из которых представлены в этой работе.

2. ТЕОРЕМА. Пусть Q – хаусдорфов компакт, $F: Q \rightarrow Q$ – непрерывное отображение, $\rho_\alpha: Q \times Q \rightarrow [0, +\infty]$, $\alpha \in A$, – некоторые функции. Для $K \subset Q$, $K \neq \emptyset$, положим $D_\alpha(K) = \sup\{\rho_\alpha(s, t) \mid s, t \in K\}$. Пусть

$$\forall \alpha \in A \quad \exists q_\alpha \in [0, 1] \quad \forall s, t \in Q: \quad \rho_\alpha(F(s), F(t)) \leq q_\alpha \cdot \rho_\alpha(s, t), \quad (1)$$

$$(K \subset Q, K \neq \emptyset, \forall \alpha \in A: D_\alpha(K) = 0) \implies \text{card}(K) = 1 \quad (2)$$

(т.е. K состоит из одной точки) и

$$\forall \alpha \in A: D_\alpha(Q) < \infty. \quad (3)$$

Тогда существует единственная неподвижная точка отображения F .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01130.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – система всех непустых подмножеств множества $Q \times Q$, упорядоченная по убыванию, Σ – система всех непустых компактов в Q , а $X = \{S \times S \mid S \in \Sigma\}$. Для $x = S \times S \in X$ положим $f(x) = \{(s, F(s)) \mid s \in S\}$. Покажем, что для соответствующих множеств E и P из п. 1 выполнены условия а) и б). Поскольку $f(Q \times Q) \supseteq Q \times Q$ (так как $F(Q) \subset Q$), то $E \neq \emptyset$. Пусть C – максимальная цепь в E и $v = \bigcap_{x \in C} x$. Тогда $v = T \times T \in X$ в силу компактности Q . Поскольку $f(v) \subset f(x) \subset x$ для каждого $x \in C$, то $f(v) \subset v$, т.е. $f(v) \supseteq v$, и, следовательно, $v \in E$. Далее, поскольку $\forall x \in C: x \leq v$ и C максимальна, то $v \in C$ и $v \in m(E)$, т.е. выполнено а) из п. 1. Пусть $x = S \times S \in E \setminus P$. Тогда $F(S) \subset S$ и S содержит по крайней мере две различные точки. Далее, $F(S) \neq S$, так как если $F(S) = S$, то в силу (2), (3) и (1) $\exists \alpha \in A: 0 < D_\alpha(S) < \infty$ и

$$\begin{aligned} \exists q_\alpha \in [0, 1]: \quad D_\alpha(S) &= \sup\{\rho_\alpha(F(s), F(t)) \mid s, t \in S\} \\ &\leq q_\alpha \sup\{\rho_\alpha(s, t) \mid s, t \in S\} = q_\alpha D_\alpha(S), \end{aligned}$$

что невозможно. Положим $U = F(S)$ и $z = U \times U$. Тогда U – непустой компакт, $F(U) \subset U$ и, следовательно, $f(z) \supseteq z$, т.е. $z \in E$, $x \leq z$, но $z \not\leq x$. Таким образом, выполнено условие б) из п. 1. В силу п. 1 $\exists x \in X: f(x) = x$, поскольку введенное нами отношение частичного порядка разделяет различные точки, т.е. $\exists S \in \Sigma: S \times S = \{(s, F(s)) \mid s \in S\}$. Пусть $s \in S$. Тогда $\exists t \in S: (s, s) = (t, F(t))$. Это означает, что $t = s$ и $F(t) = s$, т.е. $F(s) = s$. Допустим, что $\exists s_1 \in Q, s_1 \neq s: F(s_1) = s_1$. Положим $K = \{s\} \cup \{s_1\}$. Тогда в силу (2) $\exists \alpha \in A: \rho_\alpha(s, s_1) > 0$ и из (1) следует, что

$$\exists q_\alpha \in [0, 1]: \quad \rho_\alpha(s, s_1) = \rho_\alpha(F(s), F(s_1)) \leq q_\alpha \rho_\alpha(s, s_1),$$

что невозможно. Следовательно, s – единственная неподвижная точка отображения F .

3. ЗАМЕЧАНИЕ. На функции ρ_α из п. 2 не накладываются требования симметричности, удовлетворения неравенству треугольника, связанности с топологией в Q . Тем не менее, связь с принципом сжимающих отображений очевидна.

4. ЗАМЕЧАНИЕ. Пространство Q в п. 2 может быть псевдотопологическим компактом (это означает, что каждый ультрафильтр в Q сходится в псевдотопологии к некоторой точке из Q ; тогда непрерывность $F: Q \rightarrow Q$ означает, что F переводит сходящиеся базисы фильтров в сходящиеся; подробнее см. в [3]).

5. ТЕОРЕМА. Пусть (Ω, Σ, μ) – пространство с мерой, функция $\nu: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Каратеодори (т.е. $\nu(s, u)$ непрерывна по u на $\mathbb{R}$ почти при каждом $s \in \Omega$ и $\nu(s, u)$ измерима по s при каждом $u \in \mathbb{R}$), $p \in]0, +\infty[$ и оператор $[N(x)](s) = \nu(s, x(s))$ отображает замкнутый шар B пространства $L_p(\Omega) = L_p$ в себя. Тогда N имеет неподвижную точку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не уменьшая общности, можно считать, что $B = \{x \in L_p \mid \|x\|_p \leq 1\}$. В дальнейшем через $\tilde{x}$ мы будем обозначать представитель класса $x \in L_p$, а если задана функция $\tilde{x}$, то через x будем обозначать класс, порожденный функцией $\tilde{x}$. Можно считать, что $N(0) \geq 0$. Иначе положим $\Omega' = \{s \in \Omega \mid \nu(s, 0) \geq 0\}$, $\Omega'' = \{s \in \Omega \mid \nu(s, 0) < 0\}$,

$$\hat{\nu}(s, u) = \begin{cases} \nu(s, u), & s \in \Omega', \\ -\nu(s, -u), & s \in \Omega'', \end{cases} \quad [\hat{N}(x)](s) = \hat{\nu}(s, x(s))$$

и заметим, что $\widehat{N}(B) \subset B$ и $\widehat{N}(0) \geq 0$. Если мы докажем, что $\exists \widehat{x} \in B: \widehat{N}(\widehat{x}) = \widehat{x}$, то для $\widetilde{\widehat{x}} \in \widehat{x}$ положим

$$\widetilde{x}(s) = \begin{cases} \widetilde{\widehat{x}}(s), & s \in \Omega', \\ -\widetilde{\widehat{x}}(s), & s \in \Omega'', \end{cases}$$

и заметим, что $x \in B$ и $N(x) = x$. Поэтому будем считать, что $N(0) \geq 0$. Положим $M = B$, $X = \{x \in B \mid 0 \leq x \leq N(x)\}$, $f = N$ и заметим, что $0 \in X \neq \emptyset$. Покажем, что выполняется условие п. 1. Пусть C — максимальная цепь в X . Тогда $C \neq \emptyset$ и $y: x(\cdot) \mapsto \int_{\Omega} x^p(s) d\mu(s)$ отображает биективно с сохранением порядка в обе стороны цепь C на цепь $y(C) \subset [0, 1]$, которая, очевидно, конфинальна по возрастанию последовательности $a_n \in [0, 1]$, $a_n \leq a_{n+1}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup y(C)$. Тем самым, $x_n = y^{-1}(a_n)$ конфинальна C по возрастанию, $\widetilde{x}_n \nearrow \widetilde{x}_*$ почти всюду и согласно теореме Бешпо Леви

$$\int_{\Omega} \widetilde{x}_*^p(s) d\mu(s) = \sup y(C),$$

т.е. $x_* \in B$. Переходя к пределу в неравенстве $0 \leq \widetilde{x}_n(s) \leq \nu(s, \widetilde{x}_n(s))$ (почти всюду), получим, что $0 \leq x_* \leq N(x_*)$, т.е. $x_* \in X$. В силу условия $(x \in C) \implies x \leq x_*$ и максимальности C получим, что $x_* \in C$ и $x_* \in m(X)$, т.е. выполнено условие а) в п. 1. Пусть $x \in X$, $N(x) \neq x$ и $\widetilde{x} \in x$. Тогда в силу счетной аддитивности μ

$$\exists \Omega_1 \subset \Omega, \mu(\Omega_1) > 0, \exists \varepsilon > 0: (s \in \Omega_1) \implies \nu(s, \widetilde{x}(s)) > \widetilde{x}(s) + 2\varepsilon. \quad (4)$$

Положим

$$\widetilde{x}_n(s) = \begin{cases} \widetilde{x}(s) + \frac{\varepsilon}{n}, & s \in \Omega_1, \\ \widetilde{x}(s), & s \in \Omega \setminus \Omega_1 \end{cases}$$

(можно считать, что $\widetilde{x}(s)$ определена всюду на Ω). Тогда $\widetilde{x}_n(s) \rightarrow \widetilde{x}(s)$ и $\nu(s, \widetilde{x}_n(s)) \rightarrow \nu(s, \widetilde{x}(s))$ почти всюду. По теореме Егорова

$$\exists \Omega_2 \subset \Omega_1, \mu(\Omega_2) > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}: (n \geq n_0, s \in \Omega_2) \implies \nu(s, \widetilde{x}_n(s)) > \nu(s, \widetilde{x}(s)) - \varepsilon. \quad (5)$$

Положим

$$\widetilde{z}(s) = \begin{cases} \widetilde{x}(s) + \frac{\varepsilon}{n_0}, & s \in \Omega_2, \\ \widetilde{x}(s), & s \in \Omega \setminus \Omega_2. \end{cases} \quad (6)$$

Если $s \in \Omega_2$, то в силу (4) и (6) $\widetilde{x}(s) < \widetilde{z}(s) \leq \widetilde{x}(s) + \varepsilon < \nu(s, \widetilde{x}(s)) - \varepsilon < \nu(s, \widetilde{x}(s))$, а почти при всех $s \in \Omega \setminus \Omega_2$ будет $\widetilde{x}(s) = \widetilde{z}(s) \leq \nu(s, \widetilde{x}(s))$, т.е. $0 \leq x \leq z \leq N(x)$. Поскольку $x \in B$ и $N(x) \in B$, то $z \in B$. Далее, если $s \in \Omega_2$, то в силу (4), (5) и (6) $\widetilde{z}(s) \leq \widetilde{x}(s) + \varepsilon < \nu(s, \widetilde{x}(s)) - \varepsilon < \nu(s, \widetilde{z}(s))$, а почти при всех $s \in \Omega \setminus \Omega_2$ будет $\widetilde{z}(s) = \widetilde{x}(s) \leq \nu(s, \widetilde{x}(s)) = \nu(s, \widetilde{z}(s))$, т.е. $z \leq N(z)$, и, следовательно, $z \in X$, причем в силу (6) $x \leq z$ и $z \neq x$. Таким образом, проверено условие б) в п. 1 и, значит, $\exists x \in X: N(x) = x$.

6. ЗАМЕЧАНИЕ. При доказательстве п. 5 были использованы следующие средства:

- 1) сведение к случаю $N(0) \geq 0$;
- 2) аксиома максимальной цепи;
- 3) “выпрямление” цепи (т.е. биекция на цепь в $[0, 1]$) и переход к конфинальной последовательности;
- 4) теорема Бешпо Леви;

- 5) счетная аддитивность меры;
- 6) теорема Егорова;
- 7) порядковая насыщенность пересечения замкнутого шара в L_p с центром в нуле с положительным конусом.

Приведем один результат, базирующийся на 2)–7) и также доказываемый с помощью п. 1.

7. ТЕОРЕМА. Пусть (Ω, Σ, μ) – пространство с σ -конечной мерой, M – топологическое векторное пространство классов эквивалентности измеримых и почти всюду конечных функций из Ω в $\mathbb{R}$ с метризуемой топологией сходимости по мере на каждом множестве из Σ конечной меры и естественным отношением порядка, $M_+ = \{x \in M \mid x \geq 0\}$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, X – ограниченное замкнутое относительно сходимости в M монотонно неубывающих последовательностей множество в M , $X \subset M_+$, $(x, x' \in X, x'' \in M, x \leq x'' \leq x') \implies x'' \in X$, $\nu: \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что $(t \mapsto \nu(t, x(t))) \in M$ при $x \in M_+$,

$$\forall v \geq 0: \quad \nu(t, v) \leq \lim_{u \rightarrow v+0} \nu(t, u), \quad \forall v > 0: \quad \overline{\lim}_{u \rightarrow v-0} \nu(t, u) \leq \nu(t, v),$$

$K: \Omega^2 \times \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ измерима, $K(t, s, u, v)$ монотонно не убывает по u и v (без предположения о непрерывности справа или слева по u или v), причем определено отображение $f: X \rightarrow M$,

$$[f(x)](t) = \nu(t, x(t)) + \int_{\Omega} K(t, s, x(t), x(s)) d\mu(s),$$

$f(X) \cap M_+ \subset X$ и $\exists x_0 \in X: x_0 \leq f(x_0)$. Тогда $\exists x \in X: f(x) = x$.

8. ЗАМЕЧАНИЕ. При реализации схемы из п. 5 в п. 7 можно использовать для интегральной добавки технику из [2, с. 21]. В качестве $\nu(t, u)$ в п. 7 может быть взята, например, $\nu(t, u) = \nu_1(t, u) + a(t)\nu_2(u)$, где $\nu_1: \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Каратеодори, $a: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ измерима, а ν_2 монотонно не убывает (без предположения о непрерывности справа или слева). В качестве K в п. 7 можно взять $K(t, s, u, v) = K_1(t, s, u, v) + a_2(t, s)K_2(u) + a_3(t, s)K_3(v)$, где $K_1: \Omega^2 \times \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Каратеодори, монотонно не убывает по u и v , $a_i: \Omega^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ измеримы, а функции $K_i: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 2, 3$, монотонно не убывают (без предположения о непрерывности справа или слева) с соответствующими ограничениями с тем, чтобы удовлетворить условиям $f(X) \cap M_+ \subset X$ и $\exists x_0 \in X: x_0 \leq f(x_0)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Сухинин М. Ф. О трех принципах разрешимости операторных уравнений // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 1. С. 41–54.
- [2] Сухинин М. Ф. Избранные главы нелинейного анализа. М.: Изд. Российского ун-та Дружбы народов, 1992.
- [3] Фрелихер А., Бухер В. Дифференциальное исчисление в векторных пространствах без нормы. М.: Мир, 1970.