Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Г. Шондин, Сингулярные точечные возмущения нечетного оператора в $\mathbb{Z}_2$ -градуированном пространстве, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 6, 924–940

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1237>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 15:45:57

УДК 517.9

СИНГУЛЯРНЫЕ ТОЧЕЧНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ НЕЧЕТНОГО ОПЕРАТОРА В $\mathbb{Z}_2$ -ГРАДУИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ю. Г. Шондин

В работе изучаются суперсимметричные операторные модели для точечных сингулярных возмущений операторов типа оператора Дирака и их спектральные свойства. Такие модели рассматриваются в классе нечетных самосопряженных операторов в $\mathbb{Z}_2$ -градуированном пространстве Понтрягина. Мы детализируем развитый ранее метод реализации сильно сингулярных возмущений через вложение их в теорию самосопряженных расширений. В терминах формулы М. Г. Крейна для резольвент дано описание нечетных самосопряженных расширений нечетного симметрического оператора с индексами дефекта $(1, 1)$ в $\mathbb{Z}_2$ -градуированном пространстве Понтрягина, а также квадратов таких расширений. Полученные результаты уточняются в приложении к сингулярным возмущениям нечетного самосопряженного дифференциального оператора.

Библиография: 15 названий.

1. Введение. Пусть A_0 – самосопряженный неограниченный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_0$ и для целого числа $m \geq 0$ $\mathcal{H}_j$, $j = 0, \pm 1, \dots, \pm(m+1)$, – шкала гильбертовых пространств со скалярными произведениями $\langle (A_0 - i)^j \cdot, (A_0 - i)^j \cdot \rangle_0$, определяющих оснащение $\mathcal{H}_0$:

$$\mathcal{H}_{m+1} \hookrightarrow \mathcal{H}_m \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathcal{H}_1 \hookrightarrow \mathcal{H}_0 \hookrightarrow \mathcal{H}_{-1} \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathcal{H}_{-m} \hookrightarrow \mathcal{H}_{-m-1}. \quad (1)$$

Сингулярные возмущения A^t оператора A_0 , порождаемые обобщенным элементом $\chi \in \mathcal{H}_{-m-1} \setminus \mathcal{H}_{-m}$ и формально записываемые в виде

$$A_0 + t^{-1} \langle \cdot, \chi \rangle_0 \chi, \quad t \in \mathbb{R} \cup \infty, \quad (2)$$

реализуются как канонические самосопряженные расширения некоторого симметрического оператора: расширения в исходном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_0$ в случае $m = 0$ (см., например, [1]), расширения в некотором пространстве Понтрягина Π_m с m отрицательными квадратами в сильно сингулярном случае $m > 0$ [2]–[4]. Такие возмущения используются для моделирования точечных взаимодействий в квантовой теории рассеяния.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00716.

Для описания точечного взаимодействия в суперсимметричной квантовой механике [5]–[7] представляет интерес исследование специальных возмущений указанного типа: нечетных возмущений A для нечетного оператора A_0 , заданного в $\mathbb{Z}_2$ -градуированном пространстве $\mathcal{H}_0$. Напомним [7], что линейное пространство $\mathcal{H}$ со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ называют $\mathbb{Z}_2$ -градуированным, если в нем выделены подпространства $\mathcal{H}_\pm$ соответственно четных и нечетных векторов и $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$; $\mathbb{Z}_2$ -градуировка определяет оператор четности τ со свойствами: τ – самосопряженный оператор и $\tau^2 = 1$. Нечетные самосопряженные операторы A характеризуются свойствами: $\tau \operatorname{dom} A = \operatorname{dom} A$, $\tau A + A\tau = 0$ – и в приведенном разложении пространства имеют блочное матричное представление

$$A = \begin{pmatrix} 0 & L^* \\ L & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Квадрат A^2 нечетного оператора является четным и имеет диагональный вид $A^2 = \operatorname{diag}(A_+, A_-)$, так для оператора вида (3) $A_+ = L^*L$, $A_- = LL^*$. Часто в качестве нечетного оператора A рассматривается оператор Дирака, квадрат которого интерпретируется как гамильтониан Паули для частицы со спином.

В настоящей работе изучаются нечетные сингулярные возмущения A нечетного оператора A_0 , заданного в $\mathbb{Z}_2$ -градуированном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_0$ с оператором четности τ , а также квадраты таких возмущений и, в частности, соотношения между тремя операторами A , A_+ , A_- .

Типичными примерами невозмущенных операторов A_0 являются:

- 1) оператор $i \frac{d}{dx}$ в $\mathcal{H}_0 = L^2(\mathbb{R}) = L^2_+(\mathbb{R}) \oplus L^2_-(\mathbb{R})$, разложенном на подпространства четных и нечетных функций относительно $\tau f(x) = f(-x)$;
- 2) двумерный оператор Дирака вида (3), где $L = -i\partial_1 + \partial_2$, в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_0 = L^2(\mathbb{R}^2) \otimes \mathbb{C}^2 = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ с оператором четности $\tau = \operatorname{diag}(1, -1)$.

Сингулярное возмущение задается обобщенным элементом χ , который в первом примере задается как обобщенная функция $\chi(x) = \delta^{(k)}(x)$, а во втором – как $\chi = (\chi(x), 0)$ или $\chi = (0, \chi(x))$, где $\chi(x) = p_k(\partial_1, \partial_1)\delta(x)$, $p_k(\cdot)$ – однородный полином степени k .

В работе используется в основном аналитический аппарат теории расширений в пространстве Понтрягина, связанный с формулой М. Г. Крейна [8], [9]. Применительно к нашей задаче основными объектами здесь являются: симметрический оператор S в Π_m с индексами дефекта $(1, 1)$ (необязательно плотно заданный), его фиксированное каноническое самосопряженное расширение A_1 , являющееся в общем случае линейным отношением; операторнозначные функции $\Gamma_z: \mathbb{C} \rightarrow \ker(S^* - z)$, $z \in \rho(A_1)$, удовлетворяющие соотношению

$$\Gamma_z = [1 + (z - w)(A_1 - z)^{-1}]\Gamma_w \quad (4)$$

в разных точках; Q -функция $Q(z)$, соответствующая S и A_1 и с точностью до вещественной константы определяемая соотношениями

$$Q(z)^* = Q(\bar{z}), \quad \frac{Q(z) - Q(w)^*}{z - \bar{w}} = \Gamma_w^* \Gamma_z, \quad z, w \in \rho(A_1); \quad (5)$$

$Q(z)$ принадлежит обобщенному классу Неванлинны $N_m(\mathbb{C})$ (см. [9]).

Сформулируем основные результаты. Пусть S – симметрический нечетный оператор с индексами дефекта $(1, 1)$ и A_1 – его фиксированное нечетное каноническое расширение в $\mathbb{Z}_2$ -градуированном пространстве Π_m . Тогда всякое другое нечетное каноническое расширение определяется с помощью формулы Крейна

$$(A_2 - z)^{-1} = (A_1 - z)^{-1} - \frac{\Gamma_z \Gamma_z^*}{M(z)}, \quad z \in \rho(A_1) \cap \rho(A_2), \quad (6)$$

в знаменателе которой фигурирует частная Q -функция $M(z)$ (функция Вейля), соответствующая S и A_1 и удовлетворяющая свойству нечетности $M(-z) = -M(z)$. Кроме того, если через $A_1^\pm$ и $A_2^\pm$ обозначить части в четном (нечетном) подпространстве для самосопряженных операторов или линейных отношений A_1^2 , A_2^2 и зафиксировать четность обобщенного элемента $\tau \Gamma_z 1 = -\Gamma_{-z} 1$, то пары A_1^+ , A_2^+ и A_1^- , A_2^- также связаны между собой с помощью аналогичных формул Крейна, но уже с функциями Вейля

$$M_+(w) = ((iy)^{-1} M(iy))|_{-y^2=w}, \quad M_-(w) = (iy M(iy))|_{-y^2=w}.$$

Функции $M_\pm(w)$, изначально определенные на $\mathbb{R}_- \cap \rho(A_1^\pm)$, аналитически продолжаются в комплексную область как некоторые Q -функции. Эти результаты уточняются далее для сингулярных возмущений. Мы показываем, что $M_+(w) \in N_{m/2}(\mathbb{C})$, а $M_-(w) \in N_{(m+1)/2}(\mathbb{C})$, и характеризуем операторы $A_2^\pm$ как сингулярные возмущения самосопряженных операторов $A_0^\pm$, соответствующих невозмущенному оператору A_0^2 .

Заметим, что изучение квадратов сингулярных возмущений проводилось в [10], где было дано их описание для возмущений полуограниченных операторов, реализуемых в гильбертовом пространстве. Рассмотрение квадратов возмущений нечетных операторов в пространстве Понтрягина приводит к интересной связи между дефинитной и индефинитной реализациями для точечных возмущений, которая поясняется на примерах в заключительном пункте работы.

2. Операторная реализация сингулярных возмущений высокого ранга в пространстве Понтрягина. Приведем, следуя [2]–[4], операторную реализацию сингулярных возмущений, формально представляемых в виде (2), где A_0 – неограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_0$ со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$, t – вещественный параметр и для фиксированного положительного целого числа m обобщенный элемент $\chi \in \mathcal{H}_{-m-1} \setminus \mathcal{H}_{-m}$ в шкале пространств $\mathcal{H}_j$, задающих оснащение $\mathcal{H}_0$ (1). Реализация осуществляется с помощью вложения формального сингулярного возмущения (2) в теорию самосопряженных расширений в пространстве Понтрягина Π_m отрицательного индекса m . Лишь в случаях $\chi \in \mathcal{H}_0$ и $\chi \in \mathcal{H}_{-1}$ эти возмущения реализуются в исходном гильбертовом пространстве. В первом случае – это регулярные возмущения ранга 1, а во втором – это сингулярные возмущения, интерпретируемые через теорию расширений в $\mathcal{H}_0$ (см. [1]) как самосопряженные канонические расширения симметрического оператора $S_0 = A_0|_{\text{dom } S_0}$, $\text{dom } S_0 = \{u \in \text{dom } A_0 \mid \langle u, \chi \rangle_0 = 0\}$. Когда же $m > 0$, аналог оператора S_0 становится в существенном самосопряженным в $\mathcal{H}_0$ и нетривиальные сингулярные возмущения следует трактовать в пространстве с индефинитной метрикой, как это было впервые отмечено Ф. А. Березиным в [11].

Реализация сингулярных возмущений (2) строится по следующей схеме.

Пространство Π_m . Для фиксированного числа $\lambda_0 \in \rho(A_0)$ из резольвентного множества оператора A_0 введем элементы $e_j = (A_0 - \lambda_0)^{-j} \chi \in \mathcal{H}_{j-m-1}$, $j = 1, \dots, 2m$. Рассмотрим множество $\mathcal{P}_m$, порожденное линейными комбинациями элементов

$$f = f_m + \sum_{j=1}^{2m} F_j e_j, \quad f_m \in \mathcal{H}_m, \quad (F_j)_{j=1}^{2m} \in \mathbb{C}^{2m},$$

и снабдим его скалярным произведением

$$\langle f, f' \rangle = \langle f_m, f'_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^{2m} (F_j \langle e_j, f'_m \rangle_0 + \overline{F'_j} \langle f_m, e_j \rangle_0) + \sum_{j,k=1}^{2m} F_k \overline{F'_j} \langle e_k, e_j \rangle,$$

где

$$\langle e_k, e_j \rangle_m = \begin{cases} \langle e_k, e_j \rangle_0, & \text{если } j+k \geq 2m+2, \\ g_{j,k}, & \text{если } j+k \leq 2m+1. \end{cases}$$

Комплексные числа $g_{j,k}$ удовлетворяют соотношениям $\overline{g_{j,k}} = g_{k,j}$ и $g_{j,k+1} - g_{j+1,k} = (\lambda_0 - \bar{\lambda}_0)g_{j+1,k+1}$. Эти соотношения позволяют выразить все числа $g_{j,k}$ через $2m$ вещественных параметров, например, через $g_{j,j}$ и $\operatorname{Re} g_{j,j+1}$, $j = 1, \dots, m$.

Обозначим через G матрицу в $\mathbb{C}^m$ с матричными элементами $(g_{j,k})_{j,k=1}^m$ и рассмотрим пространство Понтрягина $\Pi_m = \mathcal{H}_0 \oplus \mathbb{C}^m \oplus \mathbb{C}^m$ с элементами $f = (f_0, F_0, F)$, $f_0 \in \mathcal{H}_0$, $F_0 \in \mathbb{C}^m$, $F \in \mathbb{C}^m$, и скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Pi_m} = \langle \cdot, G \cdot \rangle$, задаваемым оператором Грама

$$G = \begin{pmatrix} 1_0 & 0 \\ 0 & G_m \end{pmatrix}, \quad G_m = \begin{pmatrix} 0 & 1_m \\ 1_m & G \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Здесь $1_0, 1_m$ — единичные операторы в $\mathcal{H}_0$ и $\mathbb{C}^m$ соответственно.

Определим отображение $i_\chi: \mathcal{P}_m \rightarrow \Pi_m$ по правилу

$$i_\chi \left(f_m + \sum_{j=1}^{2m} F_j e_j \right) = \begin{pmatrix} f_0 = f_m + \sum_{k=m+1}^{2m} F_k e_k \\ \left(F_{0j} = \langle f_m, e_j \rangle_0 + \sum_{k=m+1}^{2m} F_k g_{j,k} \right)_{j=1}^m \\ (F_j)_{j=1}^m \end{pmatrix}.$$

Отображение i_χ изометрично и имеет плотный образ, так что пространство Понтрягина Π_m можно рассматривать как пополнение препространства $\mathcal{P}_m$.

Самосопряженное линейное отношение A^∞ в Π_m . Действие оператора A_0 естественно поднимается до действия его продолжения $\tilde{A}_0$ в $\mathcal{P}_m$

$$\operatorname{dom} \tilde{A}_0 = \{f \in \mathcal{P}_m \mid f_m = f_{m+1} + (A_0 - \lambda_0)^{-2m-1} \chi F_{2m+1}, \\ f_{m+1} \in \mathcal{H}_{m+1}, F_{2m+1} \in \mathbb{C}, F_1 = 0\},$$

$$\tilde{A}_0 f = A_0 f_m + \lambda_0 (A_0 - \lambda_0)^{-2m-1} \chi F_{2m+1} + \sum_{j=1}^{2m} (F_{j+1} + \lambda_0 F_j) e_j.$$

Замыкание i_χ -образа оператора $\tilde{A}_0$ в пространстве Понтрягина является уже самосопряженным линейным отношением A^∞ (см. [12], [13]), и его многозначная часть, т.е. собственное подпространство, соответствующее собственному значению ∞ , равна $A^\infty(0) = \{0\} \oplus \text{span}\{1, 0, \dots, 0\} \oplus \{0\}$. Вместе с присоединенными векторами оно порождает корневое подпространство, отвечающее точке на бесконечности вида $\{0\} \oplus \mathbb{C}^m \oplus \{0\}$. Отношение A^∞ можно рассматривать как поднятие A_0 из $\mathcal{H}_0$ в Π_m . Отметим также, что $\rho(A^\infty) = \rho(A_0)$.

Самосопряженные операторы A^t в Π_m . Операторы A^t определяются как канонические самосопряженные расширения симметрического оператора S в Π_m , являющегося одномерным сужением A^∞ ; S выбирается таким, что его дефектное подпространство $\ker(S^* - \lambda_0) = \text{ran}(S - \bar{\lambda}_0)^\perp$ одномерно и порождается вектором $i_\chi e_1 = \{0, 0, (1, 0, \dots, 0)\}$. Отсюда S и сопряженное отношение S^* в Π_m задаются как

$$S = A^\infty \cap \{i_\chi e_1, \lambda_0 i_\chi e_1\}^*, \quad S^* = A^\infty \dot{+} \text{span}\{i_\chi e_1, \lambda_0 i_\chi e_1\}.$$

Если ввести операторы $\Gamma: \mathbb{C} \rightarrow \ker(S^* - \lambda_0)$, $\Gamma c = \{0, 0, (c, 0, \dots, 0)\}$, то канонические самосопряженные расширения A^t , $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, в Π_m являются частью S^* и определяются как

$$A^t = \{f = f_\infty + \Gamma F_1, f'\} \in S^* \mid f_\infty \in \text{dom } A^\infty, \Gamma^*(f' - \bar{\lambda}_0 f) = (t + i \text{Im } \lambda_0 g_{1,1}) F_1\}.$$

При этом A^∞ является единственным многозначным каноническим расширением, т.е. не оператором, а линейным отношением. Обратимся к формуле Крейна для резольвент расширений. Резольвенту оператора A_0 будем обозначать через $R_0(z) = (A_0 - z)^{-1}$. Введем при $z \in \rho(A_0)$ операторнозначную функцию $\Gamma_z = (I + (z - \lambda_0)R^\infty(z))\Gamma$. Она удовлетворяет соотношению (4) и связана с Q -функцией $Q(z)$, соответствующей симметрическому оператору S и расширению A^∞ , соотношением (5).

Q -функция, определяемая этим соотношением с точностью до постоянной, вычисляется явно:

$$Q(z) = (z - \bar{\lambda}_0)^m (z - \lambda_0)^m Q_0(z) + p_{2m-1}(z), \quad (8)$$

где $Q_0(z)$ — функция класса Неванлинны, т.е. имеющая положительную мнимую часть в верхней полуплоскости, вида

$$Q_0(z) = (z - \bar{\lambda}_0) \langle R_0(z) e_m, e_{m+1} \rangle_0 + g_{m+1,m} \quad (9)$$

и p_{2m-1} — самосопряженный полином степени $\leq 2m - 1$:

$$p_{2m-1}(z) = \sum_{j=0}^{m-1} (z - \bar{\lambda}_0)^j (z - \lambda_0)^j g_{j,j+1} + \sum_{k=1}^m (z - \bar{\lambda}_0)^{k-1} (z - \lambda_0)^k g_{k,k}.$$

Из (8) следует, что $Q(z)$ принадлежит классу $N_m(\mathbb{C})$ (см. [9]). Во введенных обозначениях формула Крейна для резольвенты оператора A^t записывается в виде

$$(A^t - z)^{-1} = (A^\infty - z)^{-1} - \frac{\Gamma_z \Gamma_z^*}{M(z, t)}, \quad z \in \rho(A_0) \cap \rho(A^t), \quad (10)$$

где $M(z, t) = Q(z) - \text{Re } Q(\lambda_0) - t$ — фиксированная Q -функция.

3. Самосопряженные расширения нечетного симметрического оператора в $\mathbb{Z}_2$ -градуированном пространстве Понтрягина. Основные определения и понятия из теории операторов в $\mathbb{Z}_2$ -градуированных пространствах можно найти в [5]–[7]. Рассмотрим сначала общие свойства самосопряженных расширений нечетного симметрического оператора S (необязательно плотно заданного) в $\mathbb{Z}_2$ -градуированном пространстве Понтрягина $\mathcal{P}_m$, которое нам удобно обозначить через $\mathcal{H}$, со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Будем считать, что $\mathcal{H}$ разложено в ортогональную сумму $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ на четное и нечетное подпространства $\mathcal{H}_\pm$ и в $\mathcal{H}$ задан оператор четности τ , действующий на элементы из $\mathcal{H}_\pm$ как умножение на ± 1 . Оператор τ самосопряжен и $\tau^2 = 1$. Нечетность S означает, что $\text{dom } S$ инвариантна относительно τ и $\tau S + S\tau = 0$.

Предположим, что существует точка на положительной мнимой полуоси iy_0 , $y_0 > 0$, такая, что $iy_0 \notin \sigma_p(S)$ и подпространства $\text{ran}(S \pm iy_0)$ невырождены.

Напомним [8], что для плотно определенного симметрического оператора это условие заведомо выполняется. Введем дефектные подпространства $\mathcal{N}_{\lambda_0} = \mathcal{H} \ominus \text{ran}(S - \bar{\lambda}_0)$, $\lambda_0 = \pm iy_0$. Для неплотно заданного S его сопряженный S^* определяется как линейное отношение [12], [13]. Напомним, что линейное отношение A – это линейное многообразие в $\mathcal{H}^2$. Его область определения $\text{dom } A = \{f \in \mathcal{H} \mid \{f, f'\} \in A \text{ для некоторого } f' \in \mathcal{H}\}$, а область значений $\text{ran } A = \{f' \in \mathcal{H} \mid \{f, f'\} \in A \text{ для некоторого } f \in \mathcal{H}\}$. Множество $A(0) = \{f \in \mathcal{H} \mid \{0, f\} \in A\}$ называется *сингулярной частью* отношения A ; A является графиком оператора тогда и только тогда, когда $A(0) = \{0\}$. Мы будем отождествлять оператор S с его графиком $\{\{f, Sf\} \mid f \in \text{dom } S\}$. Тогда сопряженное линейное отношение $S^* = \{\{g, g'\} \in \mathcal{H}^2 \mid \langle g', f \rangle = \langle g, f' \rangle \text{ для всех } \{f, f'\} \in S\}$. Введем подпространства $N_{\lambda_0} = \{\mathcal{N}_{\lambda_0}, \lambda_0 \mathcal{N}_{\lambda_0}\} \in \mathcal{H}^2$.

При сделанном предположении справедлив аналог формулы фон Неймана [13, предложение 4.7]: $S^* = S \dot{+} N_{iy_0} \dot{+} N_{-iy_0}$ (прямая сумма). Назовем линейное отношение A в пространстве $\mathcal{H}$ *нечетным*, если

$$\tau \text{dom } A = \text{dom } A, \quad \{\{\tau f, -\tau f'\} \in A \mid \text{для всех } \{f, f'\} \in A\}.$$

Для плотно заданного оператора эта запись эквивалентна $A\tau = -\tau A$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть S – нечетный симметрический оператор в $\mathbb{Z}_2$ -градуированном пространстве Понтрягина $\mathcal{H}$. Тогда индексы дефекта $n_+ = n_-$, ($n_\pm = \dim N_{\pm iy_0}$) равны и сопряженное отношение S^* является нечетным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подпространства $\mathcal{N}_{\pm iy_0}$ порождаются векторами $f_{\pm i}$, удовлетворяющими условию $\langle (S \mp iy_0)f, f_{\pm iy_0} \rangle = 0$ для всех $f \in \text{dom } S$. Так как $\tau \text{dom } S = \text{dom } S$ и $\tau S = -S\tau$, то

$$0 = \langle (S \mp iy_0)\tau f, f_{\pm iy_0} \rangle = \langle \tau(-S \mp iy_0)f, f_{\pm iy_0} \rangle = -\langle (S \pm iy_0)f, \tau f_{\pm iy_0} \rangle.$$

Отсюда следует, что $\tau \mathcal{N}_{\pm iy_0} = \mathcal{N}_{\mp iy_0}$. Так как из $\tau^2 = 1$ следует, что τ обратим, то $n_+ = n_-$.

Далее, так как $\tau \text{dom } S = \text{dom } S$, то

$$\tau \text{dom } S^* = \tau \text{dom } S + \mathcal{N}_{-iy_0} + \mathcal{N}_{iy_0}.$$

Теперь, действуя τ на $\operatorname{ran} S^*$, получаем

$$\tau \operatorname{ran} S^* = \tau S \operatorname{dom} S + iy_0 \tau \mathcal{N}_{iy_0} + (-iy_0) \tau \mathcal{N}_{-iy_0} = -S \tau \operatorname{dom} S + iy_0 \mathcal{N}_{-iy_0} + (-iy_0) \mathcal{N}_{iy_0}.$$

Отсюда следует нечетность S^* .

Приведенное условие на оператор S эквивалентно условию невырожденности подпространств $\mathcal{N}_{\pm iy_0}$ [13, предложение 4.7], и все самосопряженные расширения оператора S являются ограничениями S^* и выделяются с помощью задания биективных изометрий $U: \mathcal{N}_{iy_0} \rightarrow \mathcal{N}_{-iy_0}$.

В отличие от случая обычных симметрий [14] вопрос о существовании нечетных самосопряженных расширений нечетного оператора решается положительно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Всякий нечетный симметрический оператор в $\mathbb{Z}_2$ -градуированном пространстве Понтрягина имеет нечетные самосопряженные расширения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно в качестве изометрического отображения U взять сам оператор четности $U = \tau$.

ТЕОРЕМА 1. *Множество нечетных самосопряженных расширений A нечетного симметрического оператора S , параметризуемых биективными изометриями U , находится во взаимно однозначном соответствии с множеством инволютивных, т.е. $\tau_d^2 = 1$, унитарных операторов τ_d в пространстве $\mathcal{N}_{iy_0}$. Это соответствие задается по правилу $U = \tau \tau_d$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Самосопряженное расширение A как линейное отношение записывается в виде

$$A = S \dot{+} \{(1+U)\mathcal{N}_{iy_0}, iy_0(1-U)\mathcal{N}_{iy_0}\} = S \dot{+} \{(1+U^{-1})\mathcal{N}_{-iy_0}, (-iy_0)(1-U^{-1})\mathcal{N}_{-iy_0}\}.$$

Действие τ на $\operatorname{dom} A$ в первом представлении имеет вид

$$\tau \operatorname{dom} A = \tau \operatorname{dom} S + \tau(1+U)\mathcal{N}_{iy_0} = \operatorname{dom} S + (1+\tau U \tau)\mathcal{N}_{-iy_0},$$

где использованы условия $\tau \operatorname{dom} A = \operatorname{dom} A$, $\tau^2 = 1$ и $\tau \mathcal{N}_{iy_0} = \mathcal{N}_{-iy_0}$. Условие нечетности отношения A с учетом нечетности S приводит к равенству

$$A = S \dot{+} \{(1+\tau U \tau)\mathcal{N}_{-iy_0}, (-iy_0)(1-\tau U \tau)\mathcal{N}_{-iy_0}\}.$$

Сравнивая в нем правую часть с представлением A в терминах изометрии U^{-1} (вторая строка в приведенном выше представлении A), устанавливаем равенство $\tau U \tau = U^{-1}$. Если обозначить $\tau_d = \tau U: \mathcal{N}_{iy_0} \rightarrow \mathcal{N}_{iy_0}$, то полученное равенство можно записать в виде $\tau_d^2 = 1$. Так как τ и U являются биективными изометриями, то τ_d унитарен в $\mathcal{N}_{iy_0}$ относительно индуцированного скалярного произведения. Обратно, если задан инволютивный унитарный оператор τ_d в $\mathcal{N}_{iy_0}$, снабженном индуцированным скалярным произведением, то определяем изометрию $U = \tau \tau_d: \mathcal{N}_{iy_0} \rightarrow \mathcal{N}_{-iy_0}$ и с помощью аналогичных рассуждений убеждаемся, что выделяемое с его помощью самосопряженное расширение A оператора S является нечетным.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Нечетный симметрический оператор с индексами дефекта (1, 1) в $\mathbb{Z}_2$ -градуированном пространстве Понтрягина $\mathcal{H}$ имеет лишь два нечетных самосопряженных расширения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пространство $\mathcal{N}_{iy_0}$ в этом случае изоморфно $\mathbb{C}$ и оператор τ_d действует в нем умножением на ± 1 . Пусть $f_i, f_{-i} = \tau f_i$ – нормированные векторы в $\mathcal{N}_{iy_0}, \mathcal{N}_{-iy_0}$ соответственно. По теореме 1 имеется лишь две различные возможности для параметризующих изометрий: $U_1 f_i = -f_{-i}$ и $U_2 f_i = f_{-i}$.

Далее рассматриваются лишь симметрические операторы с индексами дефекта (1, 1). Пару нечетных самосопряженных расширений оператора S будем обозначать через A_1, A_2 . Когда оператор S является плотно заданным, A_1, A_2 являются самосопряженными операторами. Когда же S – неплотно заданный оператор, A_1, A_2 могут оказаться самосопряженными линейными отношениями. Резольвенты каждых двух канонических самосопряженных расширений оператора S связаны между собой с помощью формулы Крейна. Как формула, выражающая резольвенту для A_2 через резольвенту для A_1 , она записывается в виде (6). Установим свойства функции $M(z)$ в знаменателе этой формулы, вытекающие из условия нечетности A_1 и A_2 .

ТЕОРЕМА 2. *Функция Вейля $M(z)$ в знаменателе формулы Крейна для резольвент двух нечетных самосопряженных канонических расширений нечетного симметрического оператора с индексом дефекта (1, 1) удовлетворяет свойству $M(-z) = -M(z)$ и представляется в виде*

$$M(z) = z\Gamma_{iy_0}^* \Gamma_{iy_0} + \frac{z^2 + y_0^2}{2} \Gamma_{iy_0}^* [(A_1 - z)^{-1} - (A_1 + z)^{-1}] \Gamma_{iy_0}. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что в силу нечетности A_1, A_2 $\tau(A_j - z)^{-1} = -(A_j + z)^{-1}\tau, j = 1, 2$. Поэтому если $z \in \rho(A_j)$, то и $-z \in \rho(A_j)$. Действуя оператором τ на элементы $\Gamma_z 1 = [1 + (z - iy_0)(A_1 - z)^{-1}] \Gamma_{iy_0} 1$ и учитывая нечетность A_1 , а также соотношение $\tau \Gamma_{iy_0} 1 = \pm \Gamma_{-iy_0} 1$, получим

$$\tau \Gamma_z 1 = [1 + (z - iy_0)(-A_1 - z)^{-1}] \tau \Gamma_{iy_0} 1 = \pm [1 + (-z + iy_0)(A_1 + z)^{-1}] \Gamma_{-iy_0} = \pm \Gamma_{-z} 1.$$

Учитывая это и умножая обе части в формуле Крейна (6) слева и справа на операторы τ , получим

$$-(A_2 + z)^{-1} = -(A_1 + z)^{-1} - \Gamma_{-z} M(z)^{-1} \Gamma_{-\bar{z}}^*.$$

После замены $z \mapsto -z$ мы вернемся к аналогичной формуле Крейна, только с функцией $-M(-z)$ в знаменателе. Сравнение с исходной формулой (6) дает $M(-z) = -M(z)$.

Для доказательства (11) воспользуемся для $M(z)$ как Q -функции, соответствующей симметрическому оператору S и его самосопряженному расширению A_1 , представлением (5). Выбрав в качестве базисной точки $\lambda_0 = iy_0$, запишем его в виде

$$M(z) = \operatorname{Re} M(iy_0) + z\Gamma_{iy_0}^* \Gamma_{iy_0} + (z^2 + y_0^2) \Gamma_{iy_0}^* (A_1 - z)^{-1} \Gamma_{iy_0}.$$

Отсюда с учетом нечетности $M(z)$ получим

$$M(z) = \frac{1}{2}(M(z) - M(-z)) = z\Gamma_{iy_0}^* \Gamma_{iy_0} + \frac{z^2 + y_0^2}{2} \Gamma_{iy_0}^* [(A_1 - z)^{-1} - (A_1 + z)^{-1}] \Gamma_{iy_0}.$$

Установим связь между квадратами нечетных канонических расширений A_1^2 и A_2^2 , которые сами являются уже четными. Представим их действующими в разложении $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ в виде

$$A_1^2 = \text{diag}(A_1^+, A_1^-), \quad A_2^2 = \text{diag}(A_2^+, A_2^-).$$

Будем рассматривать точки на мнимой оси $z = iy$, $-z = -iy$ и считать $y > 0$. Зафиксируем знак в действии оператора четности и будем считать, что $\tau\Gamma_i = -\Gamma_{-i}$. Введем операторы, отображающие $\mathbb{C}$ в подпространства фиксированной четности:

$$\Gamma_+(y) = \frac{1}{2iy}(\Gamma_{iy} - \Gamma_{-iy}), \quad \Gamma_-(y) = \frac{1}{2}(\Gamma_{iy} + \Gamma_{-iy}). \quad (12)$$

Тогда исходные операторы $\Gamma_{\pm iy}$ восстанавливаются по формулам обращения

$$\Gamma_{iy} = iy\Gamma_+(y) + \Gamma_-(y), \quad \Gamma_{-iy} = \Gamma_-(y) - iy\Gamma_+(y). \quad (13)$$

Определим при отрицательных w , $i\sqrt{-w} \in \rho(A_1)$, операторнозначные функции

$$\Gamma_w^\pm = \Gamma_\pm(\sqrt{-w}) \quad (14)$$

и функции

$$M_+(w) = (z^{-1}M(z))|_{w=z^2}, \quad M_-(w) = (zM(z))|_{w=z^2}. \quad (15)$$

ТЕОРЕМА 3. 1) Операторнозначные функции $\Gamma_w^\pm$ для любой пары точек $w, v \in \mathbb{R}_- \cap \rho(A_1^\pm)$ удовлетворяют соотношению

$$\Gamma_w^\pm - \Gamma_v^\pm = (w - v)(A_1^\pm - w)^{-1} \Gamma_v^\pm \quad (16)$$

и допускают аналитическое продолжение на область $\rho(A_1^\pm)$ с сохранением этого соотношения.

2) Функции $M_\pm(w)$ (16) допускают аналитическое продолжение на $\rho(A_1^\pm)$ и в этой области удовлетворяют соотношениям

$$M_\pm(w)^* = M_\pm(\bar{w}), \quad M_\pm(w) - M_\pm(v)^* = (w - \bar{v})\Gamma_v^{\pm*} \Gamma_w^\pm.$$

Они являются Q -функциями, соответствующими симметрическим операторам $S^\pm$ – одномерным сужениям $A_1^\pm$ на область

$$\text{dom } S^\pm = \{f, f'\} \in A_1^\pm \mid \Gamma_{-y_0}^{\pm*}(f' + y_0^2 f) = 0\}.$$

3) Каждая из пар $\{A_1^+, A_2^+\}$ и $\{A_1^-, A_2^-\}$ является парой канонических расширений соответствующего симметрического оператора $S^\pm$ в $\mathcal{H}_\pm$. Резольвенты для каждой пары связаны через формулу Крейна, в знаменателе которой стоит функция $M_\pm(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Установим справедливость (16). Для этого воспользуемся формулами (12) для $\Gamma_{\pm}(y)$ и выразим в них $\Gamma_{\pm iy}$ через $\Gamma_{\pm iy_0}$ с помощью формулы (4). Затем, используя формулы обращения (13), выразим $\Gamma_{\pm iy_0}$ через $\Gamma_{\pm}(y_0)$. В результате этих действий получим два выражения для $\Gamma_{+}(y)$:

$$\begin{aligned}\Gamma_{+}(y) &= \left[\frac{1}{2}(R_1(iy) + R_1(-iy)) - \frac{y_0}{2y}(R_1(iy) - R_1(-iy)) \right] (\Gamma_{-}(y_0) + iy_0\Gamma_{+}(y_0)), \\ \Gamma_{+}(y) &= \left[\frac{1}{2}(R_1(iy) + R_1(-iy)) + \frac{y_0}{2y}(R_1(iy) - R_1(-iy)) \right] (\Gamma_{-}(y_0) - iy_0\Gamma_{+}(y_0));\end{aligned}$$

и аналогичные два выражения для $\Gamma_{-}(y)$:

$$\begin{aligned}\Gamma_{-}(y) &= \Gamma_{-}(y_0) + iy_0\Gamma_{+}(y_0) \\ &+ \left[\frac{-iy_0}{2}(R_1(iy) + R_1(-iy)) + \frac{iy}{2}(R_1(iy) - R_1(-iy)) \right] (\Gamma_{-}(y_0) + iy_0\Gamma_{+}(y_0)), \\ \Gamma_{-}(y) &= \Gamma_{-}(y_0) - iy_0\Gamma_{+}(y_0) \\ &+ \left[\frac{iy_0}{2}(R_1(iy) + R_1(-iy)) + \frac{iy}{2}(R_1(iy) - R_1(-iy)) \right] (\Gamma_{-}(y_0) - iy_0\Gamma_{+}(y_0)).\end{aligned}$$

Складывая и вычитая выражения для $\Gamma_{+}(y)$, получим два соотношения: первое описывает связь между $\Gamma_{\pm}(y_0)$

$$\frac{1}{iy}(R_1(iy) - R_1(-iy))\Gamma_{-}(y_0) = (R_1(iy) + R_1(-iy))\Gamma_{+}(y_0) \quad (17)$$

и второе

$$\Gamma_{+}(y) = \frac{1}{2}(R_1(iy) + R_1(-iy))\Gamma_{-}(y_0) + \frac{y_0^2}{2iy}(R_1(iy) - R_1(-iy))\Gamma_{+}(y_0). \quad (18)$$

Аналогично, складывая и вычитая выражения для $\Gamma_{-}(y)$, получим два дополнительных соотношения:

$$2\Gamma_{+}(y_0) + iy(R_1(iy) - R_1(-iy))\Gamma_{+}(y_0) = (R_1(iy) + R_1(-iy))\Gamma_{-}(y_0) \quad (19)$$

и

$$\Gamma_{-}(y) = \Gamma_{-}(y_0) + \frac{iy}{2}(R_1(iy) - R_1(-iy))\Gamma_{-}(y_0) + \frac{y_0^2}{2}(R_1(iy) + R_1(-iy))\Gamma_{+}(y_0). \quad (20)$$

Если подставим выражение для $(R_1(iy) + R_1(-iy))\Gamma_{-}(y_0)$ из (19) в (18), то получим соотношение в различных точках для $\Gamma_{+}(y)$. Аналогично, если подставим $(R_1(iy) + R_1(-iy))\Gamma_{+}(y_0)$ из (17) в (20), то получим соотношение в различных точках для $\Gamma_{-}(y)$. Оба эти соотношения записываются в виде

$$\Gamma_{\pm}(y) = \Gamma_{\pm}(y_0) + (y_0^2 - y^2)(A_1^{\pm} + y^2)^{-1}\Gamma_{\pm}(y_0).$$

Из них следует утверждение 1) для $\Gamma_w^\pm = \Gamma_\pm(y) \mid_{w=-y^2}$.

2) Воспользуемся определением (15) функций $M_\pm(w)$, $w = -y^2$, и представлением (11) для $M(z)$. Выразим в этом представлении операторы Γ_{iy_0} через $\Gamma_\pm(y_0)$ по формулам (13). Для $M_+(w)$ получим

$$\begin{aligned} M_+(w) &= y_0^2 \Gamma_+(y_0)^* \Gamma_+(y_0) + \Gamma_-(y_0)^* \Gamma_-(y_0) \\ &\quad + \frac{y_0^2 - y^2}{2iy} [y_0^2 \Gamma_+(y_0)^* (R_1(iy) - R_1(-iy)) \Gamma_+(y_0) \\ &\quad + \Gamma_-(y_0)^* (R_1(iy) - R_1(-iy)) \Gamma_-(y_0)]. \end{aligned}$$

Преобразуем первое слагаемое в квадратных скобках так, чтобы вместо $\Gamma_-(y_0)$ в нем фигурировали операторы $\Gamma_+(y_0)$. Для этого воспользуемся последовательно сначала соотношением (17), затем – (19), заменим $-y^2 \mapsto w$ и получим выражение

$$\begin{aligned} M_+(w) &= 2y_0^2 \Gamma_+(y_0)^* \Gamma_+(y_0) + \Gamma_-(y_0)^* \Gamma_-(y_0) + w \Gamma_+(y_0)^* \Gamma_+(y_0) \\ &\quad + (w + y_0^2) \Gamma_+(y_0)^* (A_1^+ - w)^{-1} \Gamma_+(y_0). \end{aligned}$$

Аналогичные вычисления для $M_-(z)$ приводят к выражению

$$M_-(w) = -y_0^4 \Gamma_+(y_0)^* \Gamma_+(y_0) + w \Gamma_-(y_0)^* \Gamma_-(y_0) + (w + y_0^2) \Gamma_-(y_0)^* (A_1^- - w)^{-1} \Gamma_-(y_0).$$

Остальная часть утверждения 2) следует из полученных представлений для $M_\pm(w)$.

3) Заметим, что для заданного самосопряженного оператора или отношения A справедливо равенство $(A - iy)^{-1} (A + iy)^{-1} = (A^2 + y^2)^{-1}$. Подставим в формулу Крейна (6) последовательно значения $z = \pm iy$ и перемножим соответствующие части полученных формул друг на друга. После простых преобразований, используя нечетность $M(-z) = -M(z)$, соотношение $2iy(A_1 - iy)\Gamma_{-iy} = \Gamma_{iy} - \Gamma_{-iy}$ и аналогичное сопряженное соотношение, получим

$$\begin{aligned} (A_2^2 + y^2)^{-1} &= (A_1^2 + y^2)^{-1} - \frac{1}{2iy} M(z)^{-1} (\Gamma_{iy} \Gamma_{-iy}^* + \Gamma_{-iy} \Gamma_{iy}^*) \\ &\quad + M(z)^{-1} \left(\frac{1}{iy} - M(z)^{-1} \Gamma_{-iy}^* \Gamma_{-iy} \right) \Gamma_{iy} \Gamma_{iy}^*. \end{aligned} \quad (21)$$

Так как $M(z)$ является фиксированной Q -функцией симметрического оператора S , то из определяющего соотношения для Q -функций (5) при $z = -iy$, $w = -iy$ выводим соотношение $iy \Gamma_{-iy}^* \Gamma_{-iy} = M(z)$. Из него следует равенство 0 последнего слагаемого в формуле (21). Выразим второе слагаемое в (21) в терминах операторов $\Gamma_\pm(y)$ (см. (12)):

$$\frac{1}{2iy} M(z)^{-1} (\Gamma_{iy} \Gamma_{-iy}^* + \Gamma_{-iy} \Gamma_{iy}^*) = -iy M(iy)^{-1} \Gamma_+(y) \Gamma_+(y)^* - \frac{1}{iy} M(iy)^{-1} \Gamma_-(y) \Gamma_-(y)^*.$$

В результате, если мы положим $w = -y^2$, введем функции $M_+(-y^2) = (iy)^{-1} M(iy)$, $M_-(-y^2) = iy M(iy)$ и операторы $\Gamma_w^\pm$ (14), то получим

$$(A_2^2 - w)^{-1} = (A_1^2 - w)^{-1} - M_+(w)^{-1} \Gamma_w^+ \Gamma_w^{+*} - M_-(w)^{-1} \Gamma_w^- \Gamma_w^{-*}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В теореме 3 мы фиксировали оператор четности $\tau\Gamma_i = -\Gamma_{-i}$. При другом выборе $\tau\Gamma_i = \Gamma_{-i}$ результаты аналогичны, только теперь роли Γ_w^+ и Γ_w^- , $M_+(w)$ и $M_-(w)$ меняются местами.

4. Сингулярные возмущения нечетного оператора, порождаемые однородными обобщенными элементами. Применим теперь полученные результаты к описанию нечетных сингулярных возмущений нечетного оператора A_0 , используя описание сингулярных возмущений из п. 2. Градуировка здесь вводится следующим образом. Пусть исходное гильбертово пространство $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0^+ \oplus \mathcal{H}_0^-$ является $\mathbb{Z}_2$ -градуированным относительно оператора четности τ , A_0 – нечетный самосопряженный оператор в $\mathcal{H}_0$. Эта градуировка естественно продолжается на пространства введенной шкалы $\mathcal{H}_j$, $j = m+1, \dots, -m-1$, оснащения. Дополнительно будем считать обобщенный элемент χ однородным, т.е. четным или нечетным. Теперь нам следует согласовать градуировку оснащенного пространства и структуру пространства Понтрягина Π_m или, другими словами, обеспечить унитарность и эрмитовость τ в этом пространстве. Чтобы избежать излишних построений, мы примем, что выполняется следующее условие минимальности: $\Pi_m = \overline{\text{span}}\{\Gamma_z 1 \mid z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\}$, эквивалентное условию $\mathcal{H}_0 = \overline{\text{span}}\{(A_0 - z)^{-1}e_{m+1} \mid z \in \rho(A_0)\}$. Тогда действие τ в Π_m полностью определяется действием на элементах $\Gamma_z 1$: $\tau\Gamma_z 1 = \mp\Gamma_{-z} 1$, где знак “–” соответствует четному χ , знак “+” – нечетному χ . Это накладывает условия на оператор Грама или на параметризующий набор чисел $g_{j,k}$. При выборе мнимой базисной точки $\lambda_0 = iy_0$, $y_0 > 0$, эти условия имеют вид

$$g_{j,j+1} = iy_0 g_{j+1,j+1}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (22)$$

В качестве независимых параметров можно выбрать m вещественных чисел $(g_{k,k})_{k=1}^m$. Вследствие этих условий самосопряженное отношение A^∞ , являющееся “поднятием” A_0 , автоматически оказывается нечетным самосопряженным отношением, а его одномерное сужение S – нечетным симметрическим оператором с индексом дефекта $(1, 1)$. Дефектное пространство $\mathcal{N}_{iy_0}$ порождается вектором $\Gamma_{iy_0} 1 = i\chi e_1 = \{0, 0, (1, 0, \dots, 0)\}$, а пространство $\mathcal{N}_{-iy_0}$ – вектором $\Gamma_{-iy_0} 1 = (1 - 2iy_0(A^\infty - iy_0)^{-1})\Gamma_{iy_0} 1$. Так как $\langle \Gamma_{\pm iy_0} 1, \Gamma_{\pm iy_0} 1 \rangle = g_{1,1}$, то, выбрав $g_{1,1} \neq 0$, мы обеспечиваем невырожденность дефектных подпространств и, тем самым, справедливость исходного условия на симметрический оператор. По следствию 1 имеется лишь еще одно нечетное каноническое самосопряженное расширение отличное от A^∞ , которое мы обозначим просто A . Оно соответствует фиксированному значению $t = 0$ параметра, различающего различные расширения. Поэтому мы будем опускать указание на этот параметр.

Представление (8) для функции $M(z)$, определяющей нечетный самосопряженный оператор A через формулу Крейна (10), уточняется:

$$M(z) = (z^2 + y_0^2)^m Q_0(z) + p_{2m-1}(z), \quad p_{2m-1}(z) = z \sum_{k=1}^m (z^2 + y_0^2)^{k-1} g_{k,k}. \quad (23)$$

Здесь функция $Q_0(z) \in N_0(\mathbb{C})$ описывается формулой (9), которая может быть преобразована к виду

$$Q_0(z) = (z^2 + y_0^2) \langle R_0(z) e_{m+1}, e_{m+1} \rangle_0 + z \langle e_{m+1}, e_{m+1} \rangle_0$$

с $e_{m+1} = R_0(iy_0)^{m+1}\chi$. Отсюда и из нечетности A_0 видно, что Q_0 нечетна: $Q_0(-z) = -Q_0(z)$. Подытожим сказанное в виде следующего правила, дающего описание нечетных сингулярных возмущений.

Пусть A_0 – нечетный симметрический оператор в $\mathbb{Z}_2$ -градуированном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_0$. Сингулярное нечетное возмущение A , порождаемое однородным обобщенным элементом $\chi \in \mathcal{H}_{-m-1} \setminus \mathcal{H}_{-m}$, реализуется как каноническое самосопряженное расширение нечетного симметрического оператора S в пространстве Понтрягина Π_m . Метрика Π_m задается матрицей Грама (7), матричные элементы $g_{j,k}$ которого удовлетворяют соотношениям (22), а S есть одномерное сужение самосопряженного отношения A^∞ – естественного “поднятия” A_0 в Π_m ; A определяется с помощью формулы Крейна (6), в которой необходимо положить $A_2 = A$, $A_1 = A^\infty$ и задать $M(z)$ по формуле (23); $M(z)$ из (23) является Q -функцией, соответствующей S и A^∞ . При этом $M(z) \in N_m(\mathbb{C})$ аналитична в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ и $M(z) = -M(-z)$.

Обратимся теперь к описанию функций $M_\pm$, характеризующих квадрат A^2 сингулярного возмущения. В соответствии с изложенным в п. 3 функции $M_\pm(w)$ представляются в виде

$$M_+(w) = (w + y_0^2)^m Q_{0+}(w) + \sum_{k=1}^m (w + y_0^2)^{k-1} g_{k,k}, \quad (24)$$

$$M_-(w) = w M_+(w), \quad (25)$$

где функция $Q_{0+}(w)$ является аналитическим продолжением $(iy)^{-1}Q_0(iy)|_{y^2=-w}$ с отрицательной вещественной полуоси.

ТЕОРЕМА 4. Пусть обобщенный элемент χ четный, что соответствует принятому выбору $\tau\Gamma_{iy_0} = -\Gamma_{-iy_0}$. Тогда функции $M_\pm(w)$:

- 1) аналитичны в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$;
- 2) принадлежат классам $M_+(w) \in N_{[m/2]}(\mathbb{C})$, $M_-(w) \in N_{[(m+1)/2]}(\mathbb{C})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Функция $Q_0(z)$ допускает представления типа (11):

$$Q_0(z) = z\gamma_{iy_0}^* \gamma_{iy_0} + \frac{z^2 + y_0^2}{2} \gamma_{iy_0}^* [(A_0 - z)^{-1} - (A_0 + z)^{-1}] \gamma_{iy_0},$$

где $\gamma_{iy_0} = (A_0 - iy_0)^{-m-1}\chi: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{H}_0 \setminus \mathcal{H}_1$. Из него получаем

$$Q_{0+}(w) = \gamma_{iy_0}^* \gamma_{iy_0} + (w + y_0^2) \gamma_{iy_0}^* (A_0^2 - w)^{-1} \gamma_{iy_0}.$$

Из этого представления следует аналитичность $Q_{0+}(w)$ при $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, а из представлений (24), (25) и аналитичность $M_\pm(w)$ в этой области.

2) Представление для $Q_{0+}(w)$ после перехода к спектральному представлению оператора A_0^2 приводится к интегральному виду

$$Q_{0+}(w) = \int d\sigma(t) + (w + y_0^2) \int (t - w)^{-1} d\sigma(t),$$

где $\sigma(t)$ – неубывающая, непрерывная слева, ограниченная функция. Из условия, что образ γ_{iy_0} принадлежит пространству $\mathcal{H}_0 \setminus \mathcal{H}_1$, следует, что

$$\int t d\sigma(t) = \infty.$$

Подставив полученное представление в (24), (25), получим интегральные представления для функций $M_{\pm}(w)$. Сравнивая их с характеристическим интегральным представлением функций из класса $N_{\kappa}(\mathbb{C})$ (см. [15]), приходим к утверждению 2).

СЛЕДСТВИЕ 2. *Разложение пространства Π_m на четную и нечетную части есть разложение $\Pi_m = \Pi_{\kappa_1} \oplus \Pi_{\kappa_2}$ на подпространства Понтрягина с индексами $\kappa_1 = [m/2]$, $\kappa_2 = [(m+1)/2]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пространство Π_m есть замкнутая линейная оболочка элементов $\{\Gamma_z F\}$, а пространства $\Pi_m^{\pm}$ – замкнутая линейная оболочка элементов $\{\Gamma_w^{\pm} F\}$, где $\Gamma_w^{\pm}$ определяются по Γ_z согласно формулам (14), (12). Соответствующие пространства являются пространствами с воспроизводящими ядрами

$$K_{\pm}(w, v) = \Gamma_w^{\pm} * \Gamma_v^{\pm} = (\bar{w} - v)^{-1} (M_{\pm}(w)^* - M_{\pm}(v)).$$

По теореме 4 и по определению классов $N_{\kappa}(\mathbb{C})$ (см. [9]) такие ядра определяют пространства Понтрягина с индексами равными индексам классов, которым принадлежат функции $M_{\pm}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если же обобщенный элемент χ нечетный, что соответствует выбору $\tau \Gamma_{iy_0} = \Gamma_{-iy_0}$, то $M_+(w) = iy M(iy)|_{-y^2=w}$, $M_-(-y^2) = (iy)^{-1} M(iy)|_{-y^2=w}$, и тогда $M_+(w) \in N_{[(m+1)/2]}(\mathbb{C})$, $M_-(w) \in N_{[m/2]}(\mathbb{C})$.

Остановимся на спектральных свойствах рассмотренных сингулярных возмущений A нечетного самосопряженного оператора A_0 . Спектр невозмущенного оператора $\sigma(A_0)$ симметричен по отношению к преобразованию $\lambda \mapsto -\lambda$ (см. [5, теорема 6.3]). Возмущенный оператор A действует при $\chi \in \mathcal{H}_{-m-1} \setminus \mathcal{H}_{-m}$ в пространстве Понтрягина Π_m . Спектр самосопряженного отношения A^{∞} есть $\sigma(A^{\infty}) = \sigma(A_0) \cup \infty$. Согласно формуле Крейна спектр сингулярных возмущений A кроме части $\sigma(A_0)$ содержит также часть, определяемую нулями функции $M(z)$. В соответствии со свойствами $M(z)^* = M(\bar{z})$ и $M(z) = -M(-z)$ расположение этих нулей на комплексной плоскости симметрично относительно преобразований $z \mapsto \bar{z}$ и $z \mapsto -z$.

Наиболее просто характеризуется комплексная часть спектра A . Если точка $\lambda \in \mathbb{C}_+$ является нулем функции $M(z)$ порядка k , то $\lambda \in \sigma_p(A)$ и алгебраическая кратность, отвечающая этому собственному значению, равна k . Так как $M(z)^* = M(\bar{z})$, то точка $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A)$ и имеет ту же кратность. Из нечетности $M(z)$ следует, что $\mathbb{C}_+ \ni -\bar{\lambda} \in \sigma(A)$. Так как максимальная кратность собственных значений в верхней полуплоскости самосопряженного оператора в Π_m не превышает m , то отсюда следует оценка для кратности: если $\mathbb{C}_+ \ni \lambda \in \sigma_p(A)$ и $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$, то $k \leq m/2$; если же $\operatorname{Re} \lambda = 0$, то $k \leq m$.

Для описания вещественного спектра, следуя [9], обозначим через $\sigma_0(A) = \sigma(A|_{\mathcal{L}})$ часть спектра отрицательного типа, где A – самосопряженное линейное отношение в Π_m и $\mathcal{L}$ – неположительное m -мерное инвариантное подпространство такое, что

$\operatorname{Im} \sigma(A|_{\mathcal{L}}) \geq 0$. Как и в [9], для $\lambda \in \sigma_0(A)$ обозначим через $\kappa_\lambda(A)$ алгебраическую кратность λ по отношению к $A|_{\mathcal{L}}$. Характеризация вещественных нулей функции $M(z)$ использует понятие обобщенного нуля отрицательного типа заданной кратности [9].

Пусть точка $\mu \in \mathbb{R}$ является обобщенным нулем отрицательного типа и кратности r функции $M(z)$. Тогда $\mu \in \sigma_0(A)$ и $\kappa_\lambda(A) = r$. В силу нечетности $M(z)$ если $\mu \in \mathbb{R}_+$ является обобщенным нулем отрицательного типа $M(z)$ кратности r , то и $-\mu \in \mathbb{R}_-$ также является таким нулем. Поскольку полная кратность обобщенных нулей отрицательного типа функций из класса $N_m(\mathbb{C})$ не превышает m , то $r \leq m/2$. Отсюда получаем, что ненулевые точки $\mu \in \sigma_0(A)$ расположены симметрично относительно нуля и соответствующие индексы равны $\kappa_\mu(A) = \kappa_{-\mu}(A) \leq m/2$. Особая роль точки $\mu = 0$. Если $\mu = 0$ есть обобщенный нуль отрицательного типа $M(z)$ кратности r , то $r \leq m$, $0 \in \sigma_0(A)$ и $\kappa_0(A) \leq m$.

Рассмотрим два примера с различными способами задания градуировки.

ПРИМЕР 1 (точечное взаимодействие для оператора $-i \frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}$). Рассмотрим случай:

- а) $\chi = \delta(x) \in \mathcal{H}_{-1}$;
- б) $\chi = \delta'(x) \in \mathcal{H}_{-2} \setminus \mathcal{H}_{-1}$.

а) Рассмотрим оператор $A_0 = -i \frac{d}{dx}$ в пространстве $\mathcal{K} = L^2(\mathbb{R}) = L_+^2(\mathbb{R}) \oplus L_-^2(\mathbb{R})$, разложенном на подпространства четных и нечетных функций относительно $\tau f(x) = f(-x)$. Очевидно A_0 нечетен. Рассмотрим точечное возмущение, определяемое $\chi = \delta(x) \in \mathcal{H}_{-1}$ и, следовательно, реализуемое в $L^2(\mathbb{R})$ как расширение симметрического оператора $S = A_0|_{\operatorname{dom} S}$, $\operatorname{dom} S = \{f \in \operatorname{dom} A_0 \mid f(0) = 0\}$. Функция $M(z)$, характеризующая нечетное самосопряженное расширение A , легко вычисляется:

$$M(z) = \begin{cases} i, & \text{если } \operatorname{Im} z > 0, \\ -i, & \text{если } \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

Тогда для $M_\pm(w)$ из (15) имеем

$$M_+(w) = \frac{1}{\sqrt{-w}}, \quad M_-(w) = -\sqrt{-w}, \quad w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+.$$

Из вида этих функций заключаем, что $A^2 = \operatorname{diag}(A^+, A^-)$, где оператор A^+ является расширением Фридриха оператора

$$S^+ = \left(-\frac{d^2}{dx^2} \right) \Big|_{\operatorname{dom} S^+}, \quad \operatorname{dom} S^+ = \left\{ f \in \operatorname{dom} \left(-\frac{d^2}{dx^2} \right) \cap L_+^2 \mid f(0) = 0 \right\},$$

а A^- – расширением Крейна оператора

$$S^- = \left(-\frac{d^2}{dx^2} \right) \Big|_{\operatorname{dom} S^-}, \quad \operatorname{dom} S^- = \left\{ f \in \operatorname{dom} \left(-\frac{d^2}{dx^2} \right) \cap L_-^2 \mid f^{(\prime)}(0) = 0 \right\}.$$

б) При тех же $\mathcal{H}_0, A_0$ рассмотрим симметрический оператор $S = A_0|_{\operatorname{dom} S}$, $\operatorname{dom} S = \{f \in \operatorname{dom} A_0 \mid f^{(\prime)}(0) = 0\}$. Здесь

$$M(z) = \begin{cases} iz^2 + cz, & \text{если } \operatorname{Im} z > 0, \\ -iz^2 + cz, & \text{если } \operatorname{Im} z < 0, \end{cases} \quad c \in \mathbb{R};$$

$M(z) \in N_1(\mathbb{C})$ и сингулярное возмущение A реализуется в $\Pi_1 = \mathcal{H}_0 \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ с оператором Грама (7), в котором при выборе $\lambda_0 = iy_0$ $g_{1,1} = -y_0 + c$. Так как теперь χ нечетен, то (см. замечание 1) функции $M_{\pm}(w)$ вычисляются по формулам $M_+(w) = iyM(iy)|_{-y^2=w}$, а $M_-(w) = iy^{-1}M(iy)|_{-y^2=w}$:

$$M_+(w) = (-w)^{3/2} + cw, \quad M_-(w) = -(-w)^{1/2} + c, \quad w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+.$$

При этом $M_+ \in N_1(\mathbb{C})$, $M_- \in N_0(\mathbb{C})$, а операторы $A^{\pm}$ характеризуются следующим образом. Оператор A^+ определяется по $A_0^+ = -\frac{d^2}{dx^2}$ в L_+^2 , $\chi = \delta''(x)$ и $M_+(w)$ и действует в пространстве Понтрягина Π_1 . Оператор A^- определяется по $A_0^- = -\frac{d^2}{dx^2}$ в L_-^2 , $\chi = \delta'(x)$ и $M_-(w)$ и действует в гильбертовом пространстве L_-^2 .

ПРИМЕР 2 (точечное взаимодействие для оператора Дирака в $\mathbb{R}^1$ и $\mathbb{R}^2$). В случае $\mathbb{R}^1$ в пространстве $\mathcal{H}_0 = L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2 = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$, разложенном на четное и нечетное подпространства по отношению к оператору четности $\tau = \text{diag}(1, -1)$, рассмотрим оператор Дирака с нулевой массой на оси A_0 , имеющий блочное представление (3) с $L = \frac{d}{dx}$. Сингулярное точечное взаимодействие порождается четным обобщенным элементом $\chi = (\chi(x), 0)$ с $\chi(x) = \delta(x)$. Так как $\chi \in \mathcal{H}_{-1} \setminus \mathcal{H}_0$, это случай гильбертовой теории расширений. Q -функция $M(z)$ вычисляется с помощью перехода к Фурье представлению и совпадает с функцией $M(z)$ из случая а) примера 1; $M_{\pm}(w)$ совпадают с соответствующими функциями примера 1 и так же интерпретируются операторы $A^{\pm}$, через которые теперь выражается оператор Паули $A^2 = \text{diag}(A^+, A^-)$.

В случае $\mathbb{R}^2$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_0 = L^2(\mathbb{R}^2) \otimes \mathbb{C}^2 = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ рассмотрим оператор Дирака с нулевой массой на плоскости A_0 , имеющий блочное представление (3) с $L = -i\partial_1 + \partial_2$. Сингулярное точечное взаимодействие порождается четным обобщенным элементом $\chi = (\chi(x), 0)$ с $\chi(x) = \delta(x)$. Теперь $\chi \in \mathcal{H}_{-2} \setminus \mathcal{H}_{-1}$. Соответствующая Q -функция $M(z) \in N_1(\mathbb{C})$ и имеет вид

$$M(z) = -\pi^{-1}z \ln(-z^2) + cz, \quad c \in \mathbb{R},$$

$$M_+(w) = -\pi^{-1} \ln(-w) + c, \quad M_-(w) = -\pi^{-1}w \ln(-w) + cw,$$

при этом $M_+ \in N_0(\mathbb{C})$, $M_- \in N_1(\mathbb{C})$. Оператор A действует в Π_1 с оператором Грама (7), где при выборе $\lambda_0 = iy_0$ $g_{1,1} = -\pi^{-1} \ln(y_0^2) + c$. Операторы $A^{\pm}$ на диагонали в разложении A^2 характеризуются следующим образом. Оператор A^+ является реализацией в $L^2(\mathbb{R}^2)$ сингулярного возмущения оператора $-\Delta$ с обобщенным элементом $\chi = \delta(x)$, характеризуемой функцией $M_+(w)$. Оператор же A^- является реализацией в Π_1 сингулярного возмущения оператора $-\Delta$ с обобщенным элементом $\chi = (-i\partial_1 + \partial_2)\delta(x)$, характеризуемой функцией $M_-(w)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Альбеверио С., Гестези Ф., Хёэг-Крон Р., Хольден Х. Решаемые модели в квантовой механике. М.: Мир, 1991.
- [2] Шондин Ю.Г. Квантово-механические модели в $\mathbb{R}^n$, ассоциированные с расширением оператора энергии в пространстве Понтрягина // ТМФ. 1988. Т. 74. № 3. С. 331–344.
- [3] van Diejen J.F., Tip A. Scattering from generalized point interaction using selfadjoint extensions in Pontryagin spaces // J. Math. Phys. 1991. V. 32. № 3. P. 630–641.
- [4] Шондин Ю.Г. Возмущения на тонких множествах высокой коразмерности эллиптических операторов и теория расширений в пространстве с индефинитной метрикой // Записки научн. семинаров ПОМИ. Исследования по линейным операторам и теории функций (вып. 23). Т. 222. С.-Пб.: Наука, 1995. С. 246–292.
- [5] Цикон Х., Фрёзе Р., Кирш В., Саймон Б. Операторы Шрёдингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии. М.: Мир, 1990.
- [6] Borisov N.V., Müller W., Schrader R. Relative index theorems and supersymmetric scattering theory // Comm. Math. Phys. 1988. V. 114. № 3. P. 475–513.
- [7] Березин Ф.А. Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными. М.: Изд. МГУ, 1983.
- [8] Крейн М.Г., Лангер Г. О дефектных подпространствах и обобщенных резольвентах эрмитова оператора в пространстве Π_κ // Функцион. анализ и его прилож. 1971. Т. 5. № 3. С. 54–69.
- [9] Kreĭn M.G., Langer H. Some propositions on analytic matrix functions related to the theory of operators on the space Π_κ // Acta Sci. Math. (Szeged). 1981. V. 43. P. 181–205.
- [10] Albeverio S., Karwowski W., Koshmanenko V. Square powers of singularly perturbed operators // Math. Nachr. 1995. V. 31. P. 5–24.
- [11] Березин Ф.А. О модели Ли // Матем. сб. 1963. Т. 60. № 4. С. 425–453.
- [12] Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М.: Наука, 1986.
- [13] Dijksma A., de Snoo H.S.V. Symmetric and self-adjoint relations in Kreĭn spaces. I // Oper. Theory Adv. Appl. 1987. V. 24. P. 145–166.
- [14] Кочубей А.Н. О симметрических операторах, коммутирующих с семейством унитарных операторов // Функцион. анализ и его прилож. 1979. Т. 13. № 4. С. 77–78.
- [15] Daho K., Langer H. Sturm–Liouville operators with indefinite weight function // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 1977. V. 78. P. 161–191.

Нижегородский государственный педагогический университет
E-mail: shondin@shmath.nnov.ru

Поступило
15.03.98
Исправленный вариант
12.04.99